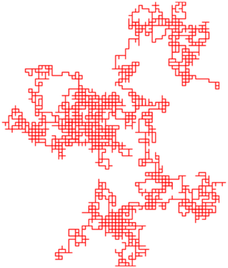
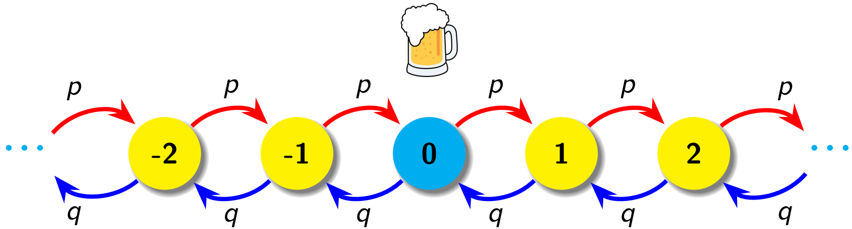
Una introducción a las caminatas aleatorias

Renato Álvarez-Nodarse

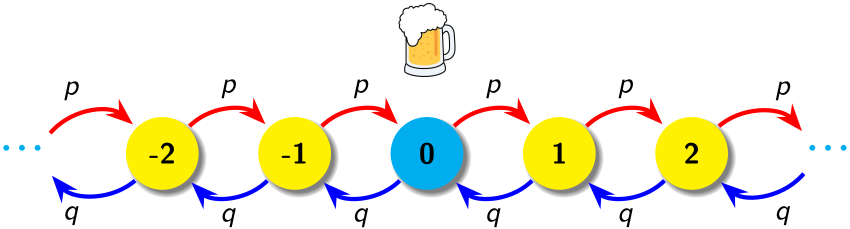


Orthonet, Sevilla, noviembre 2016

Supongamos que una persona está en su bar favorito 0. Nuestro borracho se bebe una cerveza en el bar 0 y luego con probabilidad p se mueve al bar de la derecha y con probabilidad q se mueve al bar de la izquierda, de forma que $p + q = 1$.

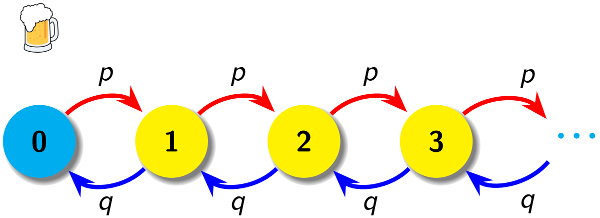


Supongamos que una persona está en su bar favorito 0. Nuestro borracho se bebe una cerveza en el bar 0 y luego con probabilidad p se mueve al bar de la derecha y con probabilidad q se mueve al bar de la izquierda, de forma que $p + q = 1$.

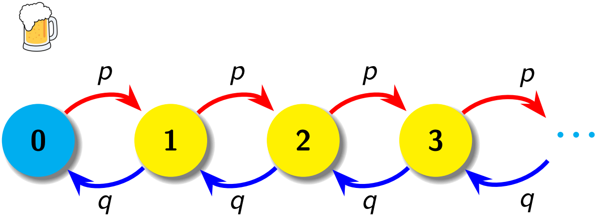


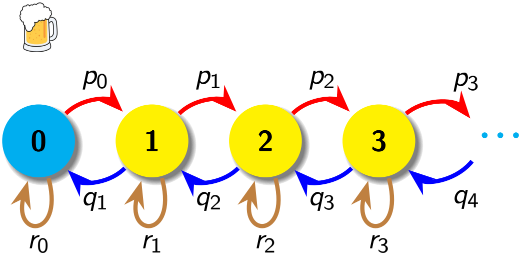
¿qué probabilidad hay de que pueda regresar, digamos en k pasos, al bar inicial? ¿qué probabilidad hay de regresar en algún momento de tiempo? Si esta última probabilidad es 1, ¿cuál es el tiempo que debe esperar el borracho para regresar a su bar favorito?

¿Qué ocurrirá si la calle es semi infinita?

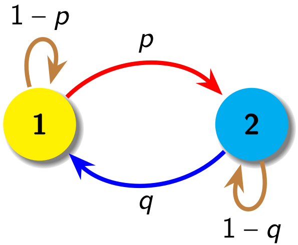


¿Qué ocurrirá si la calle es semi infinita?

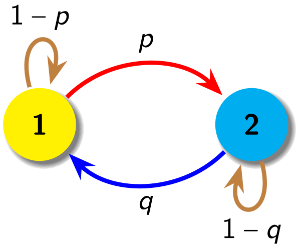




Asumamos que tenemos dos estados posibles 1 y 2 y que las transiciones entre ambos se representa por el diagrama



Asumamos que tenemos dos estados posibles 1 y 2 y que las transiciones entre ambos se representa por el diagrama



Vamos a hacerle corresponder a cada diagrama una matriz $\mathbb{P}$ de la siguiente forma: la entrada p_{ij} de $\mathbb{P}$ representa la probabilidad de pasar del estado i al j. Así para nuestro proceso con dos estados tenemos

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}.$$

La matriz $\mathbb{P}$ es la *matriz de probabilidades de trasición*

Si tenemos un número finito de estados

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \quad \forall\, i \geq 1,$$

La matriz $\mathbb{P}$ es la *matriz de probabilidades de trasición*

Si tenemos un número finito de estados

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \quad \forall\, i \geq 1,$$

Si tenemos una cadena semiinfinita

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \sum_{j\geq 1} p_{ij} = 1, \quad \forall\, i \geq 1.$$

Si tenemos un número finito de estados

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \quad \forall i \geq 1,$$

Si tenemos una cadena semiinfinita

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \sum_{j\geq 1} p_{ij} = 1, \quad \forall i \geq 1.$$

¿Cómo será el de una cadena doblemente infinita?

Si tenemos un número finito de estados

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \quad \forall i \geq 1,$$

Si tenemos una cadena semiinfinita

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \sum_{j\geq 1} p_{ij} = 1, \quad \forall i \geq 1.$$

¿Cómo será el de una cadena doblemente infinita?

Prueba que si $\mathbb{P}$ es una matriz estocástica, entonces $\mathbb{P}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ también lo es.

Sea un conjunto numerable I y sea λ una medida de probabilidad sobre I, i.e., $\lambda = \{\lambda_i,\ i \in \mathrm{I}, \quad 0 \le \lambda_i < +\infty \text{ para todo } i \in \mathrm{I}\}$, $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i = 1$.

En adelante I será $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o un subconjunto finito de estos.

Sea un conjunto numerable I y sea λ una medida de probabilidad sobre I, i.e., $\lambda = \{\lambda_i,\ i \in \mathrm{I},\quad 0 \leq \lambda_i < +\infty$ para todo $i \in \mathrm{I}\}$, $\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i = 1$.

En adelante I será $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o un subconjunto finito de estos.

Sea X una variable aleatoria con valores sobre I. Definiremos $\lambda_i = P(X = i)$ como la probabilidad de que la variable X tome el valor $i \in \mathrm{I}$. Como $\sum_{i \in \mathrm{I}} P(X = i) = 1$, λ es una medida de probabilidad que denominaremos *distribución* de X.

Sea un conjunto numerable I y sea λ una medida de probabilidad sobre I, i.e., $\lambda = \{\lambda_i,\ i \in \mathrm{I},\quad 0 \le \lambda_i < +\infty \text{ para todo } i \in \mathrm{I}\}$, $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i = 1$.

En adelante I será $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o un subconjunto finito de estos.

Sea X una variable aleatoria con valores sobre I. Definiremos $\lambda_i = P(X = i)$ como la probabilidad de que la variable X tome el valor $i \in \mathrm{I}$. Como $\sum_{i\in\mathrm{I}} P(X = i) = 1$, λ es una medida de probabilidad que denominaremos *distribución* de X.

$(X_n)_{n\ge 0}$ es una cadena de Markov discreta con distribución inicial λ_0 si

$$\begin{cases} P(X_0) = \lambda_0, \\ P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}} = \mathbb{P}_{i_n i_{n+1}}, \end{cases}$$

i.e, X_0 tiene la distribución λ_0 y la **probabilidad** de que $X_{n+1} = i_{n+1}$ condicionada a que $X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n$ **sólo depende** del valor de X_n en el **paso anterior** y está determinada por $\mathbb{P}$, siendo su distribución la fila i-ésima, i.e., $(p_{ij})_{j\in\mathrm{I}}$.

Para las cadenas de Markov se tiene que

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1) = \lambda_0 p_{i_0, i_1},$$

y, en general, que, para todos $i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathrm{I}$,

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

La propiedad anterior caracteriza a los procesos de Markov.

Para las cadenas de Markov se tiene que

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1) = \lambda_0 p_{i_0, i_1},$$

y, en general, que, para todos $i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathrm{I}$,

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

La propiedad anterior caracteriza a los procesos de Markov.

Teorema

Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con distribución inicial λ. Entonces la cadena $(X_{m+n})_{n \geq 0}$ condicionada a que $X_m = i$ es una cadena de Markov con distribución inicial $\delta_i = \{\delta_{ij},\ j \in \mathrm{I}\}$, donde $\delta_{kl} = 1$ si $k = l$ y 0 en otro caso.

Escribamos la distribución inicial λ usando el vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \cdots)$ y sea $\mathbb{P}$ la matriz de probabilidades de transición.

Definiremos de la forma habitual los productos $\lambda\mathbb{P}$, $\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P}^2$, $\ldots \mathbb{P}^n$, y lo extenderemos de manera *obvia* al caso de dimensión infinita.

Denotaremos por $p_{ij}^{(n)}$ los elementos de la matriz $\mathbb{P}^n$.

Escribamos la distribución inicial λ usando el vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \cdots)$ y sea $\mathbb{P}$ la matriz de probabilidades de transición.

Definiremos de la forma habitual los productos $\lambda\mathbb{P}$, $\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P}^2$, $\ldots \mathbb{P}^n$, y lo extenderemos de manera *obvia* al caso de dimensión infinita.

Denotaremos por $p_{ij}^{(n)}$ los elementos de la matriz $\mathbb{P}^n$.

Teorema (*falta de memoria* del proceso de Markov)

Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una cadena de Markov con distribución inicial λ y $\mathbb{P}$ una matriz de probabilidades de transición. Entonces, para todos $n, m \geq 0$

(i) $P(X_n = j) = (\lambda\, \mathbb{P}^n)_j$ *(ii)* $P(X_{n+m} = j | X_m = i) = p_{ij}^{(n)}$.

Escribamos la distribución inicial λ usando el vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \cdots)$ y sea $\mathbb{P}$ la matriz de probabilidades de transición.

Definiremos de la forma habitual los productos $\lambda\mathbb{P}$, $\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P}^2, \ldots \mathbb{P}^n$, y lo extenderemos de manera *obvia* al caso de dimensión infinita. Denotaremos por $p_{ij}^{(n)}$ los elementos de la matriz $\mathbb{P}^n$.

Teorema (*falta de memoria* del proceso de Markov)

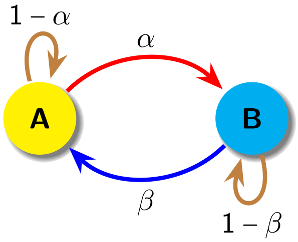
Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una cadena de Markov con distribución inicial λ y $\mathbb{P}$ una matriz de probabilidades de transición. Entonces, para todos $n, m \geq 0$

(i) $P(X_n = j) = (\lambda\,\mathbb{P}^n)_j$ *(ii)* $P(X_{n+m} = j | X_m = i) = p_{ij}^{(n)}$.

Este teorema asegura que si la variable tomó el valor i en cierto paso m la probabilidad de que dicha variable tome el valor j tras n pasos es independiente de lo que haya ocurrido antes del paso m.

Además, la prob. de encontrar el sistema en el estado j habiendo partido del estado i en n pasos es justo $\mathbb{P}_{ij}^n = p_{ij}^{(n)}$.

Sea un sistema constituido con dos estados A y B:



y cuya correspondiente matriz de probabilidades de transición es

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in [0,1].$$

Vamos a calcular $\mathbb{P}^n$, la matriz de probabilidades de transición en n-pasos. Para ello notamos que

$$\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{P}^n \cdot \mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{AA}^{(n)} & p_{AB}^{(n)} \\ p_{BA}^{(n)} & p_{BB}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{AA}^{(n)} & p_{AB}^{(n)} \\ p_{BA}^{(n)} & p_{BB}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

Calculemos, por ejemplo, $p_{AA}^{(n)}$. De la ecuación matricial se sigue que

$$p_{AA}^{(n+1)} = (1-\alpha) p_{AA}^{(n)} + \beta p_{AB}^{(n)}.$$

Usando que $p_{AB}^{(n)} = 1 - p_{AA}^{(n)}$, pues $\mathbb{P}^n$ es una matriz estocástica, tenemos

$$p_{AA}^{(n+1)} = (1-\alpha-\beta) p_{AA}^{(n)} + \beta, \qquad p_{AA}^{(0)} = p_{AA} = 1-\alpha.$$

Vamos a calcular $\mathbb{P}^n$, la matriz de probabilidades de transición en n-pasos. Para ello notamos que

$$\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{P}^n \cdot \mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{AA}^{(n)} & p_{AB}^{(n)} \\ p_{BA}^{(n)} & p_{BB}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{AA}^{(n)} & p_{AB}^{(n)} \\ p_{BA}^{(n)} & p_{BB}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

Calculemos, por ejemplo, $p_{AA}^{(n)}$. De la ecuación matricial se sigue que

$$p_{AA}^{(n+1)} = (1-\alpha) p_{AA}^{(n)} + \beta p_{AB}^{(n)}.$$

Usando que $p_{AB}^{(n)} = 1 - p_{AA}^{(n)}$, pues $\mathbb{P}^n$ es una matriz estocástica, tenemos

$$p_{AA}^{(n+1)} = (1-\alpha-\beta) p_{AA}^{(n)} + \beta, \qquad p_{AA}^{(0)} = p_{AA} = 1-\alpha.$$

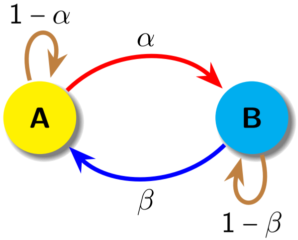
Solución: $p_{AA}^{(n)} = \dfrac{\beta + \alpha(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}$.

Ejercicio: Calcula los restantes elementos de $\mathbb{P}^n$.

$p_{AA}^{(n)}$ es la probabilidad de regresar al estado A tras n pasos.

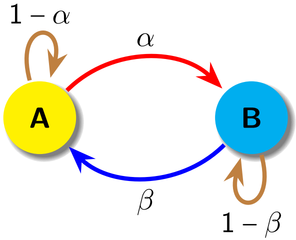
$p_{AA}^{(n)}$ es la probabilidad de regresar al estado A tras n pasos. ¡Podríamos haber regresado muchas veces antes!

Ejemplo: Ir de $A \to A$ en 4 pasos. $A \to B \to A \to B \to A$



$p_{AA}^{(n)}$ es la probabilidad de regresar al estado A tras n pasos.
¡Podríamos haber regresado muchas veces antes!

Ejemplo: Ir de $A \to A$ en 4 pasos. $A \to B \to A \to B \to A$



Nos interesa poder calcular la probabilidad de regresar **por primera vez** al estado A tras n pasos.

Ejemplo: Ir de $A \to A$ por 1º vez en 4 pasos. $A \to B \to B \to B \to A$.

Sea $q_{AA}^{(n)}$ la probabilidad de regresar al estado A por **primera** vez en n pasos. Entonces:

$$q_{AA}^{(1)} = 1 - \alpha,$$

Sea $q_{AA}^{(n)}$ la probabilidad de regresar al estado A por **primera** vez en n pasos. Entonces:

$$q_{AA}^{(1)} = 1 - \alpha, \quad q_{AA}^{(2)} = \alpha\beta,$$

Sea $q_{AA}^{(n)}$ la probabilidad de regresar al estado A por **primera** vez en n pasos. Entonces:

$$q_{AA}^{(1)} = 1 - \alpha, \quad q_{AA}^{(2)} = \alpha\beta, \quad q_{AA}^{(3)} = \alpha(1-\beta)\beta,$$

Sea $q_{AA}^{(n)}$ la probabilidad de regresar al estado A por **primera** vez en n pasos. Entonces:

$$q_{AA}^{(1)} = 1 - \alpha, \quad q_{AA}^{(2)} = \alpha\beta, \quad q_{AA}^{(3)} = \alpha(1-\beta)\beta, \quad q_{AA}^{(4)} = \alpha(1-\beta)^2\beta, \ldots .$$

Sea $q_{AA}^{(n)}$ la probabilidad de regresar al estado A por **primera** vez en n pasos. Entonces:

$$q_{AA}^{(1)} = 1-\alpha, \quad q_{AA}^{(2)} = \alpha\beta, \quad q_{AA}^{(3)} = \alpha(1-\beta)\beta, \quad q_{AA}^{(4)} = \alpha(1-\beta)^2\beta, \; \ldots .$$

La probabilidad de regresar por primera vez a A será entonces

$$q_{AA} = \sum_{n=1}^{\infty} q_{AA}^{(n)} = 1-\alpha+\alpha\beta+\alpha(1-\beta)\beta+\alpha(1-\beta)^2\beta+\cdots =$$

Sea $q_{AA}^{(n)}$ la probabilidad de regresar al estado A por **primera** vez en n pasos. Entonces:

$$q_{AA}^{(1)} = 1-\alpha, \quad q_{AA}^{(2)} = \alpha\beta, \quad q_{AA}^{(3)} = \alpha(1-\beta)\beta, \quad q_{AA}^{(4)} = \alpha(1-\beta)^2\beta, \dots .$$

La probabilidad de regresar por primera vez a A será entonces

$$q_{AA} = \sum_{n=1}^{\infty} q_{AA}^{(n)} = 1-\alpha+\alpha\beta+\alpha(1-\beta)\beta+\alpha(1-\beta)^2\beta+\cdots = 1.$$

Definición

Un estado i se llama recurrente si la probabilidad de regresar a dicho estado (en algún momento) es igual a 1. En caso contrario se llama transitorio.

Dado un estado recurrente queremos calcular el tiempo de espera para regresar al mismo:

$$\tau_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n q_{ii}^{(n)} + \infty(1 - q_{ii}).$$

En esta definición está implícito que el tiempo τ_{AA} siempre es infinito si la probabilidad de primeros retornos no es 1 (¿por qué?).

Dado un estado recurrente queremos calcular el tiempo de espera para regresar al mismo:

$$\tau_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n q_{ii}^{(n)} + \infty(1 - q_{ii}).$$

En esta definición está implícito que el tiempo τ_{AA} siempre es infinito si la probabilidad de primeros retornos no es 1 (¿por qué?).

$$\tau_{AA} = \sum_{n=1}^{\infty} n q_{AA}^{(n)} + \infty \overbrace{(1 - q_{AA})}^{=0},$$

$$\tau_{AA} = \sum_{n=1}^{\infty} n q_{AA}^{(n)} = (1-\alpha) + 2\alpha\beta + 3\alpha(1-\beta)\beta + 4\alpha(1-\beta)^2\beta + \cdots$$

Dado un estado recurrente queremos calcular el tiempo de espera para regresar al mismo:

$$\tau_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n q_{ii}^{(n)} + \infty (1 - q_{ii}).$$

En esta definición está implícito que el tiempo τ_{AA} siempre es infinito si la probabilidad de primeros retornos no es 1 (¿por qué?).

$$\tau_{AA} = \sum_{n=1}^{\infty} n q_{AA}^{(n)} + \infty \overbrace{(1 - q_{AA})}^{=0},$$

$$\tau_{AA} = \sum_{n=1}^{\infty} n q_{AA}^{(n)} = (1-\alpha) + 2\alpha\beta + 3\alpha(1-\beta)\beta + 4\alpha(1-\beta)^2\beta + \cdots = 1 + \frac{\alpha}{\beta}$$

Dado un estado recurrente queremos calcular el tiempo de espera para regresar al mismo:

$$\tau_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n q_{ii}^{(n)} + \infty (1 - q_{ii}).$$

En esta definición está implícito que el tiempo τ_{AA} siempre es infinito si la probabilidad de primeros retornos no es 1 (¿por qué?).

$$\tau_{AA} = \sum_{n=1}^{\infty} n q_{AA}^{(n)} + \infty \overbrace{(1 - q_{AA})}^{=0},$$

$$\tau_{AA} = \sum_{n=1}^{\infty} n q_{AA}^{(n)} = (1-\alpha) + 2\alpha\beta + 3\alpha(1-\beta)\beta + 4\alpha(1-\beta)^2\beta + \cdots = 1 + \frac{\alpha}{\beta}$$

Definición

n estado recurrente con tiempo medio de retorno finito se denomina positivamente recurrente.

Cambiemos A por 1 y B 2. Calculamos la probabilidad de retorno:

$$p_{11}^{(n)} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}=1,2} p_{1i_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}1}$$

y la probabilidad de los primeros retornos a A

$$q_{11}^{(n)} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}\neq 1} p_{1i_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}1}.$$

¿Cómo podemos realizar la última operación mediante la multiplicación de matrices?

Cambiemos A por 1 y B 2. Calculamos la probabilidad de retorno:

$$p_{11}^{(n)} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}=1,2} p_{1i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1}1}$$

y la probabilidad de los primeros retornos a A

$$q_{11}^{(n)} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}\neq 1} p_{1i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1}1}.$$

¿Cómo podemos realizar la última operación mediante la multiplicación de matrices?

El elemento $p_{11}^{(2)}$ de $\mathbb{P}^2$ nos da la probabilidad de retornar a 1 en dos pasos: $p_{11}^2 + p_{12}p_{21}$.

Cambiemos A por 1 y B 2. Calculamos la probabilidad de retorno:

$$p_{11}^{(n)} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}=1,2} p_{1i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1}1}$$

y la probabilidad de los primeros retornos a A

$$q_{11}^{(n)} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}\neq 1} p_{1i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1}1}.$$

¿Cómo podemos realizar la última operación mediante la multiplicación de matrices?
El elemento $p_{11}^{(2)}$ de $\mathbb{P}^2$ nos da la probabilidad de retornar a 1 en dos pasos: $p_{11}^2 + p_{12}p_{21}$.

Si queremos tener la probabilidad del primer retorno hay que excluir el sumando p_{11}^2. Como

$$q_{11}^{(2)} = \sum_{i_1\neq 1} p_{1i_1} p_{i_1 1} = p_{12}p_{21}$$

Sea $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I - \Pi_1$, donde $\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ la proyección sobre el estado 1. Entonces

$$\mathbb{P} \cdot Q = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} \\ 0 & p_{22} \end{bmatrix}$$

Sea $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I - \Pi_1$, donde $\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ la proyección sobre el estado 1. Entonces

$$\mathbb{P} \cdot Q = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} \\ 0 & p_{22} \end{bmatrix}$$

La primera columna es de ceros. Luego haciendo $\mathbb{P} \cdot Q \cdot \mathbb{P}$ habremos excluido la posibilidad de habernos quedarnos en 1 (p_{11} ha sido excluido)

$$\mathbb{P} \cdot Q \cdot \mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{12}p_{21} & p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{22} & p_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Sea $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I - \Pi_1$, donde $\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ la proyección sobre el estado 1. Entonces

$$\mathbb{P} \cdot Q = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} \\ 0 & p_{22} \end{bmatrix}$$

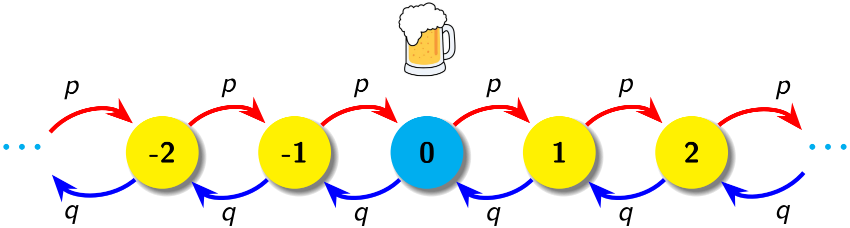
La primera columna es de ceros. Luego haciendo $\mathbb{P} \cdot Q \cdot \mathbb{P}$ habremos excluido la posibilidad de habernos quedarnos en 1 (p_{11} ha sido excluido)

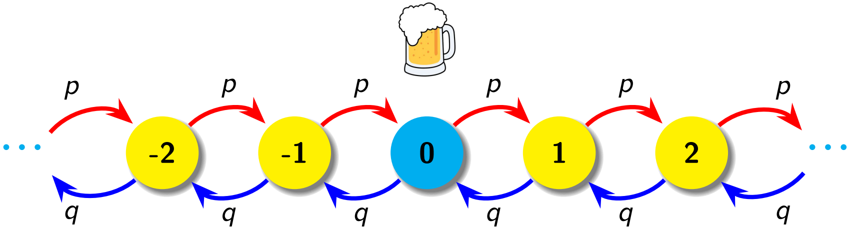
$$\mathbb{P} \cdot Q \cdot \mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{12}p_{21} & p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{22} & p_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Luego para calcular $q_{11}^{(n)}$ tenemos que calcular el primer elemento de la matriz

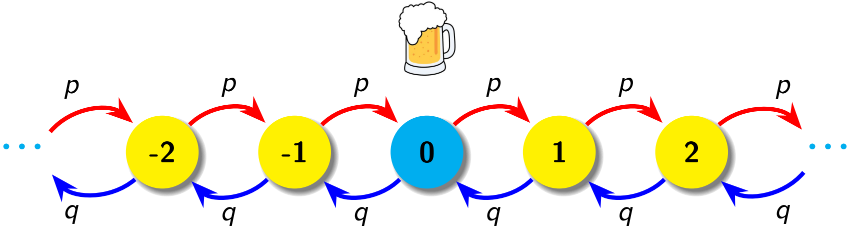
$$\underbrace{\mathbb{P} \cdot Q \cdot \mathbb{P} \cdot Q \cdots \mathbb{P} \cdot Q}_{n-1 \text{ veces}} \cdot \mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{P}}^{n-1} \cdot \mathbb{P}, \qquad \widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \cdot Q.$$

Ejercicio: Realiza el mismo estudio para el caso de la transición $A \to B$, es decir con que probabilidad llegamos a B partiendo de A, y si lo hacemos en un tiempo finito. ¿Se puede deducir que $q_{AB} = 0$ conocido que $q_{AA} = 1$? Reproduce los resultados usando la matriz $\mathbb{P}$ y una matriz Q adecuada.


p
p
p
p
p
p
. . .
-2
-1
0
1
2
. . .
q
q
q
q
q
q



$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \dots & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \cdots \\ \dots & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \cdots \\ \dots & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & \dots & 0 & \cdots \\ \dots & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & \cdots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad p + q = 1.$$



$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \ldots & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \cdots \\ \ldots & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \cdots \\ \ldots & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & \ldots & 0 & \cdots \\ \ldots & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & \cdots \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad p + q = 1.$$

¿Como trabajar con estas matrices?

Probabilidad de retorno:

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Probabilidad de retorno:

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Esta es la probabilidad de retornar al bar 0 en $2n$ pasos pero no necesariamente la primera vez. Así que la pregunta es ¿cómo calcular la probabilidad de los primeros retornos?

Probabilidad de retorno:

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Esta es la probabilidad de retornar al bar 0 en $2n$ pasos pero no necesariamente la primera vez. Así que la pregunta es ¿cómo calcular la probabilidad de los primeros retornos?

$$\underbrace{\mathbb{P} \cdot Q \cdot \mathbb{P} \cdot Q \cdots \mathbb{P} \cdot Q}_{n-1 \text{ veces}} \cdot \mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{P}}^{n-1} \cdot \mathbb{P}, \qquad \widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \cdot Q.$$

NO!

Denotemos por p_n la probabilidad de retornar a dicho estado en n pasos y por q_n la propiedad de retornar por primera vez a i en n pasos. Es obvio que $p_n \geq q_n$ para todo n.

Denotemos por p_n la probabilidad de retornar a dicho estado en n pasos y por q_n la propiedad de retornar por primera vez a i en n pasos. Es obvio que $p_n \geq q_n$ para todo n.

Vamos a asumir que el proceso es de Markov: dado cierto instante (paso) n el futuro (lo que ocurrirá después del paso n) es independiente del pasado (lo que ha ocurrido antes del paso n).

Asumiremos que $p_0 = 1$ y que $q_0 = 0$. Entonces

$$p_1 = q_1 \underbrace{p_0}_{=1} + \underbrace{q_0}_{=0} p_1 = q_1,$$

Denotemos por p_n la probabilidad de retornar a dicho estado en n pasos y por q_n la propiedad de retornar por primera vez a i en n pasos. Es obvio que $p_n \geq q_n$ para todo n.

Vamos a asumir que el proceso es de Markov: dado cierto instante (paso) n el futuro (lo que ocurrirá después del paso n) es independiente del pasado (lo que ha ocurrido antes del paso n).

Asumiremos que $p_0 = 1$ y que $q_0 = 0$. Entonces

$$p_1 = q_1 \underbrace{p_0}_{=1} + \underbrace{q_0}_{=0} p_1 = q_1, \quad p_2 = q_2 \underbrace{p_0}_{=1} + q_1 p_1 + \underbrace{q_0}_{=0} p_2 = q_2 + q_1 p_1, \quad \ldots$$

Denotemos por p_n la probabilidad de retornar a dicho estado en n pasos y por q_n la propiedad de retornar por primera vez a i en n pasos. Es obvio que $p_n \geq q_n$ para todo n.

Vamos a asumir que el proceso es de Markov: dado cierto instante (paso) n el futuro (lo que ocurrirá después del paso n) es independiente del pasado (lo que ha ocurrido antes del paso n).

Asumiremos que $p_0 = 1$ y que $q_0 = 0$. Entonces

$$p_1 = q_1 \underbrace{p_0}_{=1} + \underbrace{q_0}_{=0} p_1 = q_1, \quad p_2 = q_2 \underbrace{p_0}_{=1} + q_1 p_1 + \underbrace{q_0}_{=0} p_2 = q_2 + q_1 p_1, \quad \ldots$$

$$p_n = q_n p_0 + q_{n-1} p_1 + q_{n-2} p_2 + \cdots + q_1 p_{n-1} + q_0 p_n,$$

Definamos las funciones (recordemos que $p_0 = 1$)

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} p_n z^n, \quad q(z) = q_1 z + q_2 z^2 + \cdots = \sum_{n\geq 1} q_n z^n,$$

donde $p_n \in (0,1)$, $q_n \in (0,1)$. p y q son funciones analíticas en $|z| \leq 1$ y además q converge en $z = 1$.

$$p(z)q(z) = (1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots)(q_1 z + q_2 z^2 + \cdots)$$

Definamos las funciones (recordemos que $p_0 = 1$)

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} p_n z^n, \quad q(z) = q_1 z + q_2 z^2 + \cdots = \sum_{n\geq 1} q_n z^n,$$

donde $p_n \in (0,1)$, $q_n \in (0,1)$. p y q son funciones analíticas en $|z| \leq 1$ y además q converge en $z = 1$.

$$p(z)q(z) = (1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots)(q_1 z + q_2 z^2 + \cdots)$$

$$\begin{aligned} p(z)q(z) &= q_1 z + (q_2 + q_1 p_1) z^2 + (q_3 + q_2 p_1 + q_1 p_2) z^3 + \cdots + \\ &\quad + (q_n + q_{n-1} p_1 + q_{n-2} p_2 + \cdots + q_1 p_{n-1}) z^n + \cdots \\ &= p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \cdots + p_n z^n + \cdots = p(z) - 1. \end{aligned}$$

$$p(z)q(z) = p(z) - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q(z) = 1 - \frac{1}{p(z)}.$$

Definición

Las funciones $p(z)$ y $q(z)$ anteriores se denominan funcines generatrices de los retornos y de los primeros retornos, respectivamente. La ecuación $p(z)q(z) = p(z) - 1$ se denomina ecuación de renuevo.

Está claro que la probabilidad q_{ii} de retorno al estado inicial será

$$q_{ii} = q_1 + q_2 + \cdots + q_n + \cdots = q(1).$$

Así el *estado* inicial es *recurrente* si $q(1) = 1 \iff p(1) = \infty$.

Definición

Las funciones $p(z)$ y $q(z)$ anteriores se denominan funcines generatrices de los retornos y de los primeros retornos, respectivamente. La ecuación $p(z)q(z) = p(z) - 1$ se denomina ecuación de renuevo.

Está claro que la probabilidad q_{ii} de retorno al estado inicial será

$$q_{ii} = q_1 + q_2 + \cdots + q_n + \cdots = q(1).$$

Así el *estado* inicial es *recurrente* si $q(1) = 1 \iff p(1) = \infty$.

Si $q(1) = 1$ podemos calcular si es positivamente recurrente:

$$\tau_{ii} = \sum_{n\geq 1} nq_n = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots = \lim_{z\to 1-} \frac{q(z) - \overbrace{q(1)}^{=1}}{z-1} = q'(1-).$$

Usando $p_{AA}^{(n)} = \frac{\beta+\alpha(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}$ y $q(z) = 1 - \frac{1}{p(z)}$,

$$p_{AA}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta + \alpha(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta} z^n \quad \Rightarrow p_{AA}(1) = \infty \quad \Rightarrow q_{AA}(1) = 1.$$

La serie anterior se puede sumar

$$p_{AA}(z) = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha z + \beta z - z + 1)} + \frac{\beta}{(\alpha+\beta)(1-z)},$$

luego

$$q_{AA}(z) = 1 - \frac{1}{p_{AA}(z)} = \frac{(\alpha+\beta-1) z^2 + (1-\alpha) z}{(\beta-1) z + 1},$$

de donde se sigue, nuevamente, que $q_{AA}(1) = 1$ y además, para el tiempo esperado de retorno tenemos

$$\tau_{AA} = q'_{AA}(1-) = \lim_{z\to 1-} \left[1 - \alpha + \frac{2\alpha\beta z}{1-(1-\beta) z} - \frac{\alpha(\beta-1)\beta z^2}{(1-(1-\beta) z)^2} \right] = 1 + \frac{\alpha}{\beta}.$$

$$p_{00}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n z^{2n}, \qquad q(z) = 1 - \frac{1}{p(z)}.$$

Tenemos la identidad

$$(1 - z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{z^{2n}}{2^{2n}} \quad \Rightarrow$$

$$p_{00}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n z^{2n}, \qquad q(z) = 1 - \frac{1}{p(z)}.$$

Tenemos la identidad

$$(1 - z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{z^{2n}}{2^{2n}} \quad \Rightarrow$$

$$p_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{4pq}z^2}} \quad \Rightarrow$$

$$p_{00}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n z^{2n}, \qquad q(z) = 1 - \frac{1}{p(z)}.$$

Tenemos la identidad

$$(1 - z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{z^{2n}}{2^{2n}} \quad \Rightarrow$$

$$p_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{4pq}z^2}} \quad \Rightarrow \quad q_{00}(z) = 1 - \sqrt{1 - 2\sqrt{p\,q}z^2} \quad \Rightarrow$$

$$p_{00}(1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{4pq}}} \quad \Rightarrow \quad q_{00}(1) = 1 - \sqrt{1 - 2\sqrt{p\,q}}.$$

Por tanto $q(1) = 1$ si y sólo si $p = q = 1/2$.

$$p_{00}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n z^{2n}, \qquad q(z) = 1 - \frac{1}{p(z)}.$$

Tenemos la identidad

$$(1 - z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{z^{2n}}{2^{2n}} \quad \Rightarrow$$

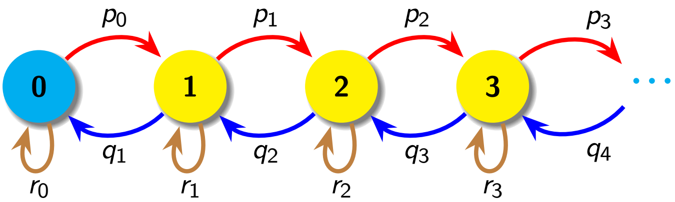
$$p_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{4pq} z^2}} \quad \Rightarrow \quad q_{00}(z) = 1 - \sqrt{1 - 2\sqrt{p\,q} z^2} \quad \Rightarrow$$

$$p_{00}(1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{4pq}}} \quad \Rightarrow \quad q_{00}(1) = 1 - \sqrt{1 - 2\sqrt{p\,q}}.$$

Por tanto $q(1) = 1$ si y sólo si $p = q = 1/2$.

$$\tau_{00} = \lim_{z \to 1-} q'_{00}(z) = \lim_{z \to 1-} \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} = \infty,$$

Sea la siguiente caminata aleatoria



cuya matriz $\mathbb{P}$ de probabilidades de transición es

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad r_0+q_0 = 1, \; p_i+q_i+r_i = 1, \; \forall\, i \geq 1,$$

y donde se asume que los p_i y q_i son todos distintos de cero.

La matriz $\mathbb{P}$ es una matriz tridiagonal con coeficientes reales y positivos: El teorema de Favard asegura que existe una SPO respecto a cierta medida definida positiva

$$d\mu(x) = \rho(x)dx + \sum_k m_k \delta(x - x_k)dx + d\mu_{sc}(x),$$

donde ρ es la parte absolutamente continua y los dos restantes la parte singular de la medida.

Sea la matriz

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \pi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \pi_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \pi_3 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \frac{\pi_i}{\pi_{i-1}} = \sqrt{\frac{p_{i-1}}{q_i}}, \ \ i \geq 1,$$

tenemos

$$\Pi{\cdot}\mathbb{P}{\cdot}\Pi^{-1} = \begin{bmatrix} r_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & r_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & r_2 & a_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & r_3 & a_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \mathbb{J}, \qquad a_i = \sqrt{p_i q_{i+1}} > 0, \ \ i \geq 0,$$

donde $\mathbb{J}$ es una matriz de Jacobi (tridiagonal, real y simétrica) asociada a la correspondiente sucesión de polinomios ortonormales $(p_n)_n$.

A partir de la ecuación matricial $x\mathbf{p}(x) = \mathbb{J}\mathbf{p}(x)$, podemos probar que

$$x^n\mathbf{p}(x) = \mathbb{J}^n\mathbf{p}(x),$$

donde los elementos de la matriz $\mathbb{J}^n$ se calculan por la fórmula

$$\mathbb{J}^n_{ij} = \int_{\operatorname{supp} d\mu} x^n p_i(x)p_j(x)d\mu(x), \quad i,j \geq 0,$$

La fórmula anterior se denomina fórmula de Karling y McGregor.

A partir de la ecuación matricial $x\mathbf{p}(x) = \mathbb{J}\mathbf{p}(x)$, podemos probar que

$$x^n\mathbf{p}(x) = \mathbb{J}^n\mathbf{p}(x),$$

donde los elementos de la matriz $\mathbb{J}^n$ se calculan por la fórmula

$$\mathbb{J}^n_{ij} = \int_{\operatorname{supp} d\mu} x^n p_i(x)p_j(x)d\mu(x), \quad i,j \geq 0,$$

La fórmula anterior se denomina fórmula de Karling y McGregor.

Prueba: escribimos la fórmula término a término:

$$x^n p_i(x) = \sum_{j=i-n}^{i+n} \mathbb{J}^n_{ij}p_j(x) = \sum_{j=0}^{i+n} \mathbb{J}^n_{ij}p_j(x)$$

donde, se asume que $p_j(x) \equiv 0$ si $j < 0$.

A partir de la ecuación matricial $x\mathbf{p}(x) = \mathbb{J}\mathbf{p}(x)$, podemos probar que

$$x^n\mathbf{p}(x) = \mathbb{J}^n\mathbf{p}(x),$$

donde los elementos de la matriz $\mathbb{J}^n$ se calculan por la fórmula

$$\mathbb{J}^n_{ij} = \int_{\mathrm{supp}\, d\mu} x^n p_i(x) p_j(x) d\mu(x), \quad i, j \geq 0,$$

La fórmula anterior se denomina fórmula de Karling y McGregor.

Prueba: escribimos la fórmula término a término:

$$x^n p_i(x) = \sum_{j=i-n}^{i+n} \mathbb{J}^n_{ij} p_j(x) = \sum_{j=0}^{i+n} \mathbb{J}^n_{ij} p_j(x)$$

donde, se asume que $p_j(x) \equiv 0$ si $j < 0$.

Multiplicando ambas partes por $p_i(x)d\mu(x)$ e integrando sobre el soporte de la medida de ortogonalidad $d\mu(x)$ se obtiene el resultado.

Como la matriz $\mathbb{J}$ es tal que $\mathbb{J}_{ij} \in [0,1]$ se puede probar que su espectro está contenido en $[-1,1]$, luego el Teorema de Favard nos asegura que la medida asociada a $\mathbb{J}$ está soportada en $[-1,1]$.

Como la matriz $\mathbb{J}$ es tal que $\mathbb{J}_{ij} \in [0, 1]$ se puede probar que su espectro está contenido en $[-1, 1]$, luego el Teorema de Favard nos asegura que la medida asociada a $\mathbb{J}$ está soportada en $[-1, 1]$.

Sea $f(x)$ una función analítica en el soporte $\operatorname{supp} \mu(x)$ de la medida $d\mu(x)$

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} c_n x^n.$$

Entonces

$$\int_{\operatorname{supp} d\mu} f(x) p_i(x) p_j(x) d\mu(x) = (f(\mathbb{J}))_{ij}.$$

Como la matriz $\mathbb{J}$ es tal que $\mathbb{J}_{ij} \in [0,1]$ se puede probar que su espectro está contenido en $[-1,1]$, luego el Teorema de Favard nos asegura que la medida asociada a $\mathbb{J}$ está soportada en $[-1,1]$.

Sea $f(x)$ una función analítica en el soporte $\operatorname{supp}\mu(x)$ de la medida $d\mu(x)$

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} c_n x^n.$$

Entonces

$$\int_{\operatorname{supp} d\mu} f(x)p_i(x)p_j(x)d\mu(x) = (f(\mathbb{J}))_{ij}.$$

Para z pequeña

$$f(x) = \frac{1}{1-zx}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(d\mu(x)),$$

es analítica en $\operatorname{supp}(d\mu(x)) \Rightarrow$

$$\int_{\operatorname{supp} d\mu} \frac{p_i(x)p_j(x)}{1-xz} d\mu(x) = (\mathrm{I} - z\mathbb{J})^{-1}_{ij}.$$

Sea $i = j$.

$$(\mathrm{I} - z\mathbb{J})^{-1}_{ii} = \int_{\mathrm{supp}\, d\mu} \frac{p_i^2(x)d\mu(x)}{1 - xz} = \int_{\mathrm{supp}\, d\mu} \frac{d\mu_i(x)}{1 - xz},$$

donde $d\mu_i(x) = p_i^2(x)d\mu(x)$ es la **medida espectral** de $(p_n)_n$.

Desarrollando en serie la función $(1 - zx)^{-1}$ obtenemos

$$\int_{\mathrm{supp}\, d\mu} \frac{d\mu_i(x)}{1 - xz} = \int_{\mathrm{supp}\, d\mu} \sum_{n\geq 0} (zx)^n d\mu_i(x) = \sum_{n\geq 0} \mu_n^{(i)} z^n = \widehat{\mu}_i(z),$$

donde $\mu_n^{(i)}$ son los momentos de orden n de la medida espectral $d\mu_i(x)$ y $\widehat{\mu}_i(z)$ es la **función generariz de los momentos**.

Veamos ahora las propiedades de retorno.

Comenzamos con la función generatriz de los retornos ($\mathbb{P} = \Pi \cdot \mathbb{J} \cdot \Pi^{-1}$)

$$p_i(z) = \sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} z^n = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_{ii}^n z^n = \sum_{n\geq 0} (\Pi \cdot \mathbb{J}^n \cdot \Pi^{-1})_{ii} z^n$$

donde Π es la matriz diagonal que vimos antes

$$p_i(z) = \sum_{n\geq 0} (\Pi \cdot \mathbb{J}^n \cdot \Pi^{-1})_{ii} z^n = \sum_{n\geq 0} \pi_i \mathbb{J}_{ii}^n \pi_i^{-1} z^n = \sum_{n\geq 0} \mathbb{J}_{ii}^n z^n = (I - z\mathbb{J})_{ii}^{-1}.$$

Juntando esto con lo anterior tenemos

$$p_i(z) = (I - z\mathbb{J})_{ii}^{-1} = \widehat{\mu}_i(z) = \int_{\operatorname{supp} d\mu} \frac{d\mu_i(x)}{1 - xz} = s_i(z)$$

Veamos ahora las propiedades de retorno.

Comenzamos con la función generatriz de los retornos ($\mathbb{P} = \Pi \cdot \mathbb{J} \cdot \Pi^{-1}$)

$$p_i(z) = \sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} z^n = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_{ii}^n z^n = \sum_{n\geq 0} (\Pi \cdot \mathbb{J}^n \cdot \Pi^{-1})_{ii} z^n$$

donde Π es la matriz diagonal que vimos antes

$$p_i(z) = \sum_{n\geq 0} (\Pi \cdot \mathbb{J}^n \cdot \Pi^{-1})_{ii} z^n = \sum_{n\geq 0} \pi_i \mathbb{J}_{ii}^n \pi_i^{-1} z^n = \sum_{n\geq 0} \mathbb{J}_{ii}^n z^n = (I - z\mathbb{J})_{ii}^{-1}.$$

Juntando esto con lo anterior tenemos

$$p_i(z) = (I - z\mathbb{J})_{ii}^{-1} = \widehat{\mu}_i(z) = \int_{\mathrm{supp}\, d\mu} \frac{d\mu_i(x)}{1 - xz} = s_i(z)$$

Sea $F(z;\mu) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d\mu(x)}{x - z}$ la función de Stieltjes asociada a la medida $d\mu(x)$. Entonces

$$s_i(z) = -z^{-1} F(z^{-1}; \mu_i), \quad s_0(z) := s(z) = -z^{-1} F(z^{-1}; \mu).$$

Recordemos que propabilidad de retorno al estado i es $p_i(1) = s_i(1)$ y por tanto, la probabilidad de primeros retornos, según la ecuación de renuevo es $q(1) = 1 - 1/p(1)$.
Así el proceso será recurrente si la función $s_i(1) = -F(1; \mu_i) = -\infty$.

Recordemos que propabilidad de retorno al estado i es $p_i(1) = s_i(1)$ y por tanto, la probabilidad de primeros retornos, según la ecuación de renuevo es $q(1) = 1 - 1/p(1)$.
Así el proceso será recurrente si la función $s_i(1) = -F(1; \mu_i) = -\infty$.

Para decidir si el proceso es positivamente recurrente calculamos el tiempo esperado de retorno

$$\tau_{ii} = \lim_{z \to 1-} \frac{q(z) - 1}{z - 1} = \lim_{z \to 1-} \frac{1}{(1 - z) s_i(z)}.$$

Este último límite está estrechamente relacionado con que la medida espectral asociada a $\mathbb{P}$ tenga un punto de masa en $x = 1$.

▸ $d\mu_i(x) = p_i^2(x)d\mu(x)$ tiene un pto. de masa en $x = 1 \Leftrightarrow d\mu(x)$ lo tiene.

▸$d\mu_i(x) = p_i^2(x) d\mu(x)$ tiene un pto. de masa en $x = 1 \Leftrightarrow d\mu(x)$ lo tiene.

▸Nos interesa el caso $z \to 1$. Así que descomponemos nuestra medida:

$$d\mu(x) = \mu(\{1\})\delta(x-1)dx + d\widetilde{\mu}(x),$$

donde $\widetilde{\mu}(x)$ es la medida que se obtiene al eliminar el punto de masa (si lo hay) en $x = 1$. Entonces

$$F(\zeta;\mu) = \frac{\mu(\{1\})}{\zeta - 1} + \int_{-1}^{1} \frac{d\widetilde{\mu}(x)}{x - \zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [-1,1] \quad \Rightarrow$$

▸$d\mu_i(x) = p_i^2(x) d\mu(x)$ tiene un pto. de masa en $x = 1 \Leftrightarrow d\mu(x)$ lo tiene.

▸Nos interesa el caso $z \to 1$. Así que descomponemos nuestra medida:

$$d\mu(x) = \mu(\{1\})\delta(x-1)dx + d\widetilde{\mu}(x),$$

donde $\widetilde{\mu}(x)$ es la medida que se obtiene al eliminar el punto de masa (si lo hay) en $x = 1$. Entonces

$$F(\zeta;\mu) = \frac{\mu(\{1\})}{\zeta - 1} + \int_{-1}^{1} \frac{d\widetilde{\mu}(x)}{x-\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [-1,1] \quad \Rightarrow$$

$$(\zeta - 1)F(\zeta;\mu) = \mu(\{1\}) + \int_{-1}^{1} \frac{\zeta - 1}{x - \zeta} d\widetilde{\mu}(x) \quad \Rightarrow$$

▸$d\mu_i(x) = p_i^2(x) d\mu(x)$ tiene un pto. de masa en $x = 1 \Leftrightarrow d\mu(x)$ lo tiene.

▸Nos interesa el caso $z \to 1$. Así que descomponemos nuestra medida:

$$d\mu(x) = \mu(\{1\})\delta(x-1)dx + d\widetilde{\mu}(x),$$

donde $\widetilde{\mu}(x)$ es la medida que se obtiene al eliminar el punto de masa (si lo hay) en $x = 1$. Entonces

$$F(\zeta;\mu) = \frac{\mu(\{1\})}{\zeta - 1} + \int_{-1}^{1} \frac{d\widetilde{\mu}(x)}{x-\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [-1,1] \quad \Rightarrow$$

$$(\zeta - 1)F(\zeta;\mu) = \mu(\{1\}) + \int_{-1}^{1} \frac{\zeta - 1}{x - \zeta} d\widetilde{\mu}(x) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\zeta \to 1+} \int_{-1}^{1} \frac{\zeta - 1}{\zeta - x} d\widetilde{\mu}(x) = \int_{-1}^{1} \lim_{\zeta \to 1+} \frac{\zeta - 1}{\zeta - x} d\widetilde{\mu}(x) = \int_{-1}^{1} 0\, d\widetilde{\mu}(x) = 0.$$

Lo anterior se puede resumir en el siguiente teorema:

Teorema

Sea una caminata aleatoria con matriz de transición de la forma

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad r_0+q_0 = 1, \; p_i+q_i+r_i = 1, \; \forall i \geq 1,$$

y sea $F(z;\mu_i) = \int_{-1}^{1} \frac{d\mu_i(x)}{x-z}$ *la función de Stieltjes asociada a la correspondiente familia de polinomios ortonormales* $(p_n)_n$*. Entonces el estado* i *de dicha caminata es recurrente si* $s_i(1) = -F(1;\mu_i) = \infty$ *y positivamente recurrente si* $\mu_i(\{1\}) > 0$*, siendo la medida* $d\mu_i(x) = p_i(x)^2 d\mu(x)$ *la medida espectral asociada a la familia* $(p_n)_n$ *y* $d\mu(x)$ *la medida de ortogonalidad de* $(p_n)_n$*.*

Comenzaremos con un simple ejercicio de álgebra lineal elemental. Sea la matriz por bloques

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (*)$$

Recordemos que $p(z) := p_{00}(z) = (I - z\mathbb{J})^{-1}_{00}$. Sea

$$\mathbb{J} = \left[\begin{array}{c|cccccc} r_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline a_0 & r_1 & a_1 & & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & r_2 & a_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & r_3 & a_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cccccc} r_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline a_0 & & & & & & \\ 0 & & & \mathbb{J}^{(1)} & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \end{array}\right]$$

Si $p^{(1)}(z) = (I - z\mathbb{J}^{(1)})^{-1}_{00}$, entonces usando (*) obtenemos

$$p(z) = (1 - r_0 z - a_0^2 z^2 p^{(1)}(z))^{-1}.$$

El primero corresponde a la matriz

$$\mathbb{J} = \left[\begin{array}{c|cccccc} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right].$$

Aquí

$$p(z) = \frac{1}{1 - a^2 z^2 p^{(1)}(z)} \quad \Rightarrow \quad p(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2 z^2}}{2a^2 z^2},$$

y se ha escogido el signo menos para que $p(z)$ sea analítica en $z = 0$.

Para recuperar la medida usamos la fórmula de inversión de Stieltjes:
Para la parte absolutamente continua:

$$\omega(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \Im F(x + i\epsilon, \mu),$$

y si hay un punto de masa:

$$\mu(\{x\}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \epsilon \Im F(x + i\epsilon, \mu) > 0.$$

Para recuperar la medida usamos la fórmula de inversión de Stieltjes: Para la parte absolutamente continua:

$$\omega(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \Im F(x + i\epsilon, \mu),$$

y si hay un punto de masa:

$$\mu(\{x\}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \epsilon \Im F(x + i\epsilon, \mu) > 0.$$

No hay polos así que no hay masas y la parte abs. continua es

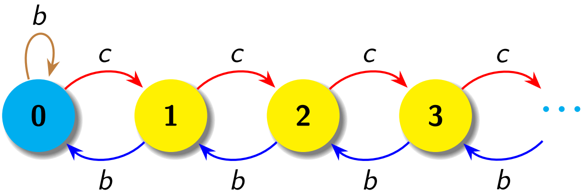
$$d\mu(x) = \omega(x) dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2a^2},$$

$$\mathbb{J} = \left[\begin{array}{c|cccccc} b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right].$$

Ejercicio: Prueba, usando que $p^{(1)}(z)$ es la función $p(z)$ del ejemplo anterior, que

$$p(z) = \frac{2}{1 - 2bz + \sqrt{1 - 4a^2 z^2}}.$$

En el caso especial cuando $a = \sqrt{b(1-b)}$, $b \in (0,1)$ obtenemos una matriz de Jacobi que corresponde a la caminata aleatoria



$b + c = 1, \; b \in (0,1).$

Ejemplo 2. Prueba que si $a = \sqrt{b(1-b)}$

$$q(z) = 1 - \frac{1}{p(z)} = bz + \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2 z^2}}{2}$$

y que la función de Stieltjes es

$$F(z;\mu) = -z^{-1} p(z^{-1}) = \frac{1}{2b} \frac{z - 2b - \sqrt{z^2 + 4b^2 - 4b}}{z - 1}.$$

Calculamos

$$q(1) = bz + \frac{1 - \sqrt{(1-2b)^2}}{2} = \begin{cases} 1, & b \geq 1/2, \\ 2b, & b < 1/2. \end{cases}$$

Para el tiempo medio, si $b \geq 1/2$,

$$\tau = \left.\frac{dq(z)}{dz}\right|_{z=1} = b + \left.\frac{2(1-b)\,bz}{\sqrt{1 - 4(1-b)\,bz}}\right|_{z=1} = \frac{b}{2b-1},$$

luego es positivamente recurrente si $b > 1/2$.

$$q(z) = 1 - \frac{1}{p(z)} = bz + \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2 z^2}}{2}$$

y que la función de Stieltjes es

$$F(z;\mu) = -z^{-1} p(z^{-1}) = \frac{1}{2b} \frac{z - 2b - \sqrt{z^2 + 4b^2 - 4b}}{z - 1}.$$

Calculamos

$$q(1) = bz + \frac{1 - \sqrt{(1-2b)^2}}{2} = \begin{cases} 1, & b \geq 1/2, \\ 2b, & b < 1/2. \end{cases}$$

Para el tiempo medio, si $b \geq 1/2$,

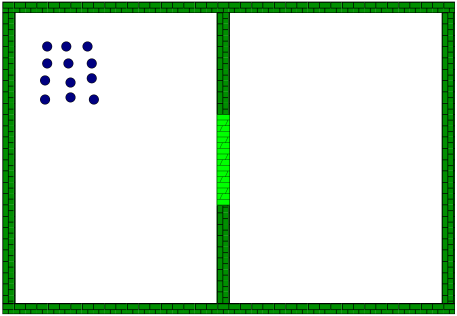
$$\tau = \left.\frac{dq(z)}{dz}\right|_{z=1} = b + \left.\frac{2(1-b)bz}{\sqrt{1 - 4(1-b)bz}}\right|_{z=1} = \frac{b}{2b-1},$$

luego es positivamente recurrente si $b > 1/2$.

Ejercicio: Usando la función de Stieltjes recupera la medida de ortogonalidad y comprueba que tiene una masa en el cero si $b > 1/2$.

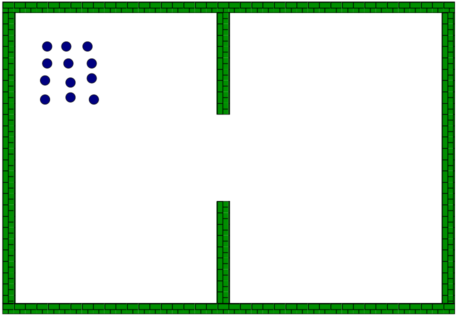
ME = estudio del comportamiento de sistemas con muchas partículas mediante el uso, entre otras cosas de la teoría de las probabilidades.

Ejemplo: Imaginemos que tenemos una habitación con un tabique y todas las moleculas están en una esquina. ¿Qué ocurre si quitamos en tabique?



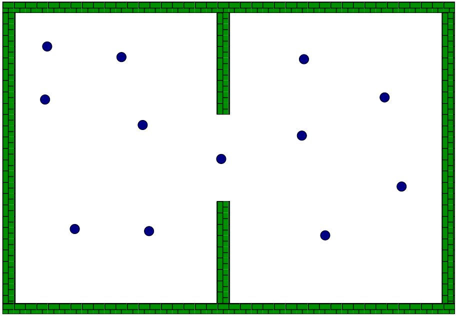
ME = estudio del comportamiento de sistemas con muchas partículas mediante el uso, entre otras cosas de la teoría de las probabilidades.

Ejemplo: Imaginemos que tenemos una habitación con un tabique y todas las moleculas están en una esquina. ¿Qué ocurre si quitamos en tabique?



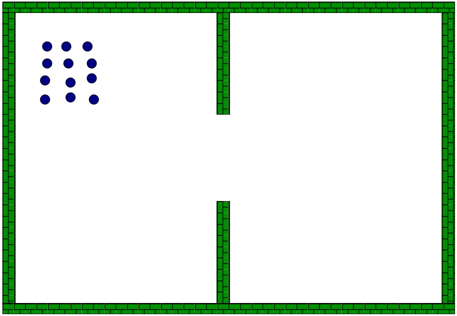
ME = estudio del comportamiento de sistemas con muchas partículas mediante el uso, entre otras cosas de la teoría de las probabilidades.

Ejemplo: Imaginemos que tenemos una habitación con un tabique y todas las moleculas están en una esquina. ¿Qué ocurre si quitamos en tabique?



ME = estudio del comportamiento de sistemas con muchas partículas mediante el uso, entre otras cosas de la teoría de las probabilidades.

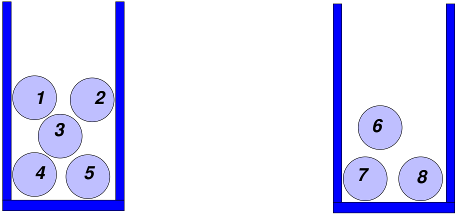
Ejemplo: Imaginemos que tenemos una habitación con un tabique y todas las moleculas están en una esquina. ¿Qué ocurre si quitamos en tabique?



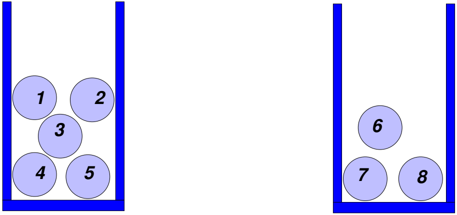
La mecánica estadística tendría que dar como resultado que el proceso es reversible, pero la segunda ley de la termodinámica nos dice que es irreversible. ¿Cómo resolver esta aparente contradicción?

P. y T. Ehrenfest propusieron el siguiente modelo para explicar el fenómeno:

Nos dan $2N$ bolas numeradas colocadas en dos urnas, digamos i en la de la izquierda y $2N - i$ en la de la derecha. Se elige al azar un número del 1 al $2N$ y la bola a la que le corresponde ese número se pasa a la otra urna. El **estado** del sistema **queda fijado por el número de bolas i en la urna de la izquierda**.

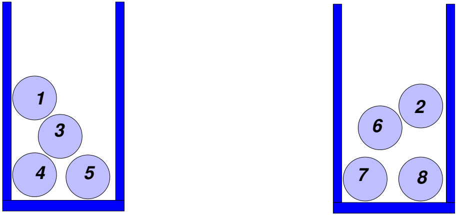


Nos dan $2N$ bolas numeradas colocadas en dos urnas, digamos i en la de la izquierda y $2N - i$ en la de la derecha. Se elige al azar un número del 1 al $2N$ y la bola a la que le corresponde ese número se pasa a la otra urna. El **estado** del sistema **queda fijado por el número de bolas i en la urna de la izquierda**.



Si sale el número 2

Nos dan $2N$ bolas numeradas colocadas en dos urnas, digamos i en la de la izquierda y $2N - i$ en la de la derecha. Se elige al azar un número del 1 al $2N$ y la bola a la que le corresponde ese número se pasa a la otra urna. El **estado** del sistema **queda fijado por el número de bolas i en la urna de la izquierda**.



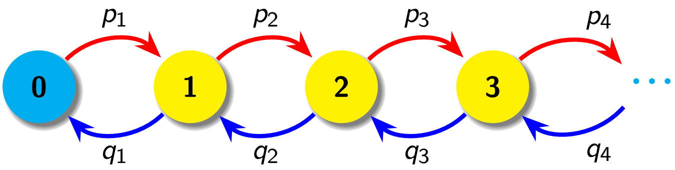
Si sale el número 2, la bola 2 pasa de la urna izq. a la urna der.

Es obvio que es más probable que al elegir un número al azar, este corresponda a una bola de la urna que tenga más bolas, por lo que el estado del equilibrio sería que en cada urna haya $\approx N$ bolas.

Es obvio que es más probable que al elegir un número al azar, este corresponda a una bola de la urna que tenga más bolas, por lo que el estado del equilibrio sería que en cada urna haya $\approx N$ bolas.

Pregunta: ¿Si partimos del estado inicial $2N$ bolas en la urna de la izq., que probabilidad hay de que regresemos a dicho estado después de n pasos?

El proceso anterior se puede modelar mediante una *cadena de Markov* del tipo



Supongamos que en cierto momento estamos en el estado E_i. Entonces el próximo estado en el que podemos estar es o bien el E_{i-1} o E_{i+1}. Además la probabilidad de estar en dichos estados es $k/2N$ y $1 - k/2N$, respectivamente. Así, la matriz de probabilidades de transición será

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ \frac{1}{2N} & 0 & \frac{2N-1}{2N} & & & & \\ & \frac{2}{2N} & 0 & \frac{2N-2}{2N} & & & \\ & & \ddots & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 0 & \frac{1}{2N} \\ & & & & & \frac{2N}{2N} & 0 \end{pmatrix}$$

Para este caso resulta que existe una familia muy conocida de polinomios ortogonales (en este caso finita) que nos permite resolver el problema de forma analítica.

Sean los polinomios de Kravchuk definidos por

$$K_i(x) \quad = \quad {}_2\tilde{F}_1\left(\begin{matrix}-i,-x\\ -2N\end{matrix};2\right), \qquad x = 0,1,\dots,2N; \quad i = 0,1,\dots,2N.$$

Estos satisfacen la propiedad de ortogonalidad

$$\sum_{x=0}^{2N} K_i(x)K_j(x)\frac{\binom{2N}{x}}{2^{2N}} = \frac{(-1)^i i!}{(-2N)_i}\delta_{ij} \equiv d_i^2\delta_{ij} \quad 0 \le i,j \le 2N,$$

de donde se sigue la siguiente RRTT

$$\frac{1}{2}(2N-i)K_{i+1}(x) - \frac{1}{2}2NK_i(x) + \frac{i}{2}K_{i-1}(x) = -xK_i(x)$$

podemos escribir en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ \frac{1}{2N} & 0 & \frac{2N-1}{2N} & & & & \\ & \frac{2}{2N} & 0 & \frac{2N-2}{2N} & & & \\ & & \ddots & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 0 & \frac{1}{2N} \\ & & & & & \frac{2N}{2N} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_0(x) \\ K_1(x) \\ K_2(x) \\ \\ \\ \\ K_{2N}(x) \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{x}{N}\right) \begin{pmatrix} K_0(x) \\ K_1(x) \\ K_2(x) \\ \\ \\ \\ K_{2N}(x) \end{pmatrix},$$

siendo la matriz la misma que la de nuestra cadena de Markov.

podemos escribir en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ \frac{1}{2N} & 0 & \frac{2N-1}{2N} & & & & \\ & \frac{2}{2N} & 0 & \frac{2N-2}{2N} & & & \\ & & \ddots & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 0 & \frac{1}{2N} \\ & & & & & \frac{2N}{2N} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_0(x) \\ K_1(x) \\ K_2(x) \\ \\ \\ K_{2N}(x) \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{x}{N}\right) \begin{pmatrix} K_0(x) \\ K_1(x) \\ K_2(x) \\ \\ \\ K_{2N}(x) \end{pmatrix},$$

siendo la matriz la misma que la de nuestra cadena de Markov.

La fórmula de Karlin-McGregor nos conduce a (el coeficiente d_i corresponde a la norma, necesario para *ortonormalizar* a la familia K_n)

$$(\mathbb{P}^n)_{ij} = d_j^{-2} \sum_{x=0}^{2N} \left(1 - \frac{x}{N}\right)^n K_i(x) K_j(x) \frac{\binom{2N}{x}}{2^{2N}}.$$

$$(\mathbb{P}^n)_{00} = \sum_{x=0}^{2N} \left(1 - \frac{x}{N}\right)^n \frac{\binom{2N}{x}}{2^{2N}}$$

luego la función generatríz $p_{00}(z) = p(z)$ se convierte en

$$p(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{00}^n \, z^n = \sum_{x=0}^{2N} \frac{N}{N(1-z) + xz} \frac{\binom{2N}{x}}{2^{2N}}.$$

$$(\mathbb{P}^n)_{00} = \sum_{x=0}^{2N} \left(1 - \frac{x}{N}\right)^n \frac{\binom{2N}{x}}{2^{2N}}$$

luego la función generatríz $p_{00}(z) = p(z)$ se convierte en

$$p(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{00}^n z^n = \sum_{x=0}^{2N} \frac{N}{N(1-z)+xz} \frac{\binom{2N}{x}}{2^{2N}}.$$

Es fácil comprobar que $p(1) = \infty$ y por tanto la ecuación de renuevo nos dice que $q(1) = 1 - 1/p(1) = 1$, es decir el estado E_0 es recurrente.

Ejercicio: Prueba que cualquier estado E_i es recurrente.

Para el tiempo medio de espera $\tau = q'(z) = \frac{p'(z)}{p^2(z)}$

$$q'(z) = \sum_{x=0}^{2N} \frac{N(N-x)}{(N(1-z)+xz)^2} \frac{\binom{2N}{x}}{2^{2N}}$$

luego $q'(1) = 2^{2N}$. Es decir, el estado E_0 es positivamente recurrente.

Para el tiempo medio de espera $\tau = q'(z) = \frac{p'(z)}{p^2(z)}$

$$q'(z) = \sum_{x=0}^{2N} \frac{N(N-x)}{(N(1-z)+xz)^2} \frac{\binom{2N}{x}}{2^{2N}}$$

luego $q'(1) = 2^{2N}$. Es decir, el estado E_0 es positivamente recurrente.

Ejercicio: Comprueba que cualquier estado E_i es positivamente recurrente y el tiempo medio de espera es

$$\tau_i = \frac{2^{2N}}{\binom{2N}{i}}.$$

Resumiendo:

1. Con probabilidad 1 se volvemos a cualquier estado inicial i del que hayamos partido

Resumiendo:

1. Con probabilidad 1 se volvemos a cualquier estado inicial i del que hayamos partido
2. Que el tiempo esperado (o medio) de retorno al estado i dado es (en unidades de tiempo)

$$T_{ii} = \frac{2^{2N}}{\binom{2N}{i}} \qquad \binom{2N}{i} = \frac{(2N)!}{(2N-i)!i!}$$

Resumiendo:

1. Con probabilidad 1 se volvemos a cualquier estado inicial i del que hayamos partido
2. Que el tiempo esperado (o medio) de retorno al estado i dado es (en unidades de tiempo)

$$T_{ii} = \frac{2^{2N}}{\binom{2N}{i}} \qquad \binom{2N}{i} = \frac{(2N)!}{(2N-i)!i!}$$

Unas cuentas sencillas: Escojamos $N = 1000$ (dos mil bolas) y repitamos nuestro experimento cada $\tau = 10^{-9}$ seg. (procesador de 1GHz)

El modelo de urnas de los Ehrenfest: Solución

$$T_{ii} = \frac{2^{2N}(2N-i)!i!}{(2N)!}, \qquad N = 1000, \quad \tau = 10^{-9}\text{seg}$$

$$T_{ii} = \frac{2^{2N}(2N-i)!i!}{(2N)!}, \qquad N = 1000, \quad \tau = 10^{-9}\text{seg}$$

Si partimos del *equilibrio* $i = N$ (mitad y mitad), el tiempo T_{NN} esperado para que el sistema regrese a él es de $\mathbf{5{,}6} \times \mathbf{10^{-8}}$ segundos. **FAST!!!**

El modelo de urnas de los Ehrenfest: Solución

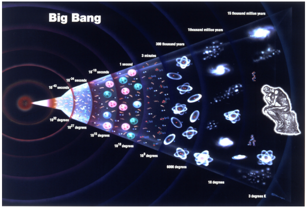
$$T_{ii} = \frac{2^{2N}(2N-i)!i!}{(2N)!}, \qquad N = 1000, \quad \tau = 10^{-9}\text{seg}$$

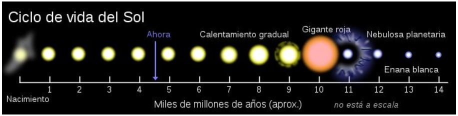
Partiendo de E_0 o E_{2N} (todas en una urna), $T_{00} \approx \mathbf{3{,}6 \times 10^{585}}$ años.

El modelo de urnas de los Ehrenfest: Solución

$$T_{ii} = \frac{2^{2N}(2N-i)!\,i!}{(2N)!}, \qquad\qquad N = 1000, \quad \tau = 10^{-9}\text{seg}$$

Partiendo de E_0 o E_{2N} (todas en una urna), $T_{00} \approx \mathbf{3{,}6 \times 10^{585}}$ años. Teniendo en cuenta que la edad del Universo se estima en $\mathbf{1{,}4 \times 10^{10}}$ años, que la vida en la Tierra desaparecerá en unos $\mathbf{5 \times 10^{9}}$ años

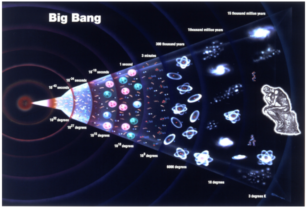


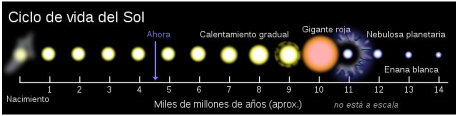


El modelo de urnas de los Ehrenfest: Solución

$$T_{ii} = \frac{2^{2N}(2N-i)!i!}{(2N)!}, \qquad N = 1000, \quad \tau = 10^{-9}\text{seg}$$

Partiendo de E_0 o E_{2N} (todas en una urna), $T_{00} \approx \mathbf{3{,}6 \times 10^{585}}$ años. Teniendo en cuenta que la edad del Universo se estima en $\mathbf{1{,}4 \times 10^{10}}$ años, que la vida en la Tierra desaparecerá en unos $\mathbf{5 \times 10^{9}}$ años





y que en una habitación de 25 m^3 hay $\mathbf{6 \times 10^{26}}$ moléculas y no 2000 ... $\Longrightarrow$ **IRREVERSIBILIDAD**. El cálculo con tiempo de Plank 10^{-44} es ...