Polinomios Ortogonales en la circunferencia unidad

I Escuela Orthonet

Sevilla, 14 -18 de Noviembre de 2016

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

☆ Definición. Primeras propiedades

- Relación de recurrencia
- Ceros medida y de ortogonalidad

☆ Representaciones matriciales

- Matriz de Hessenberg
- Matriz CMV

☆ Introducción a la Teoría de Szegö

☆ Algunas aplicaciones

Polinomios ortogonales en la recta real

- Ecuaciones diferenciales de orden dos → Soluciones

Operadores autoadjuntos

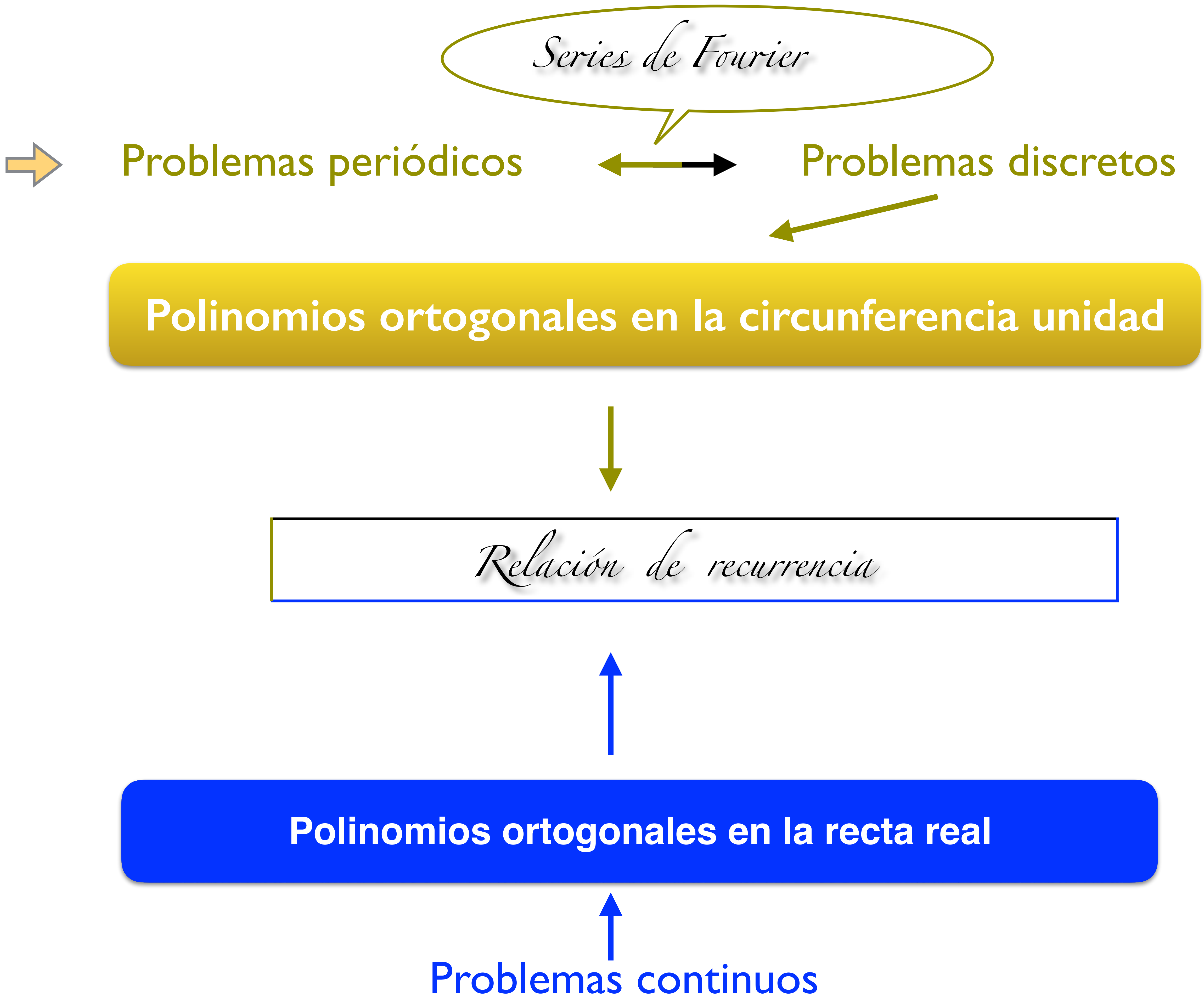
Propiedades de ortogonalidad

Valores propios → Magnitudes físicas medibles → *Reales*

- Problemas periódicos → Polinomios trigonométricos

→ Polinomios complejos

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad



Series de Fourier
Problemas periódicos
Problemas discretos
Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad
Relación de recurrencia
Polinomios ortogonales en la recta real
Problemas continuos

Producto escalar

$$(p,q)_\mu = \int_{\mathbb{C}} p(z)\overline{q(z)}d\mu(z), \quad p,q \in \mathbb{C}[z]$$

Soporte de μ $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$

$\searrow$ $\mathbb{T}$

Matriz de Gram

$$G_{n,m} = (z^n,\ z^m)$$

$\mathbb{R} \longrightarrow z = \overline{z} \longrightarrow G_{n,m} = \int_{\mathbb{R}} z^{n+m} d\mu(z)$ Hankel

$\mathbb{T} \longrightarrow \overline{z} = z^{-1} \longrightarrow G_{n,m} = \int_{\mathbb{T}} z^{n-m} d\mu(z)$ Toeplitz

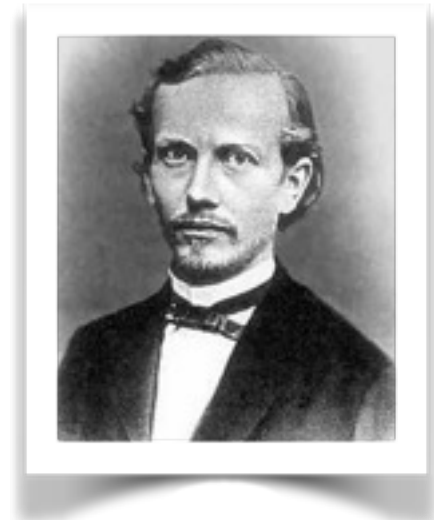
Producto escalar. Matriz de Gram

- $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $$G_{n,m} = \int_{\mathbb{R}} z^{n+m} d\mu(z)$$

$$H = (H_{i,j})$$
$$H_{i,j} = h_{i+j}$$

$i, j = 0, 1, 2, 3, 4$

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \\ h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 \\ h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & h_8 \end{pmatrix}$$



Hankel

- $\mathbb{T}$ $\longrightarrow$ $$G_{n,m} = \int_{\mathbb{T}} z^{n-m} d\mu(z)$$

$$T = (T_{i,j})$$
$$T_{i,j} = t_{i-j}$$

$i, j = 0, 1, 2, 3, 4$

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & t_1 & t_2 \\ t_{-3} & t_{-2} & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-4} & t_{-3} & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

Toeplitz

Producto escalar

Matriz de Gram $G_{n,m} = (z^n,\ z^m)$

Significado físico $\longrightarrow$ *Correlación entre los lugares* m *y* n

Independiente de la elección del origen

$G_{n,m}$ $\longrightarrow$ Dependiente de $n - m$

Leyes naturales $\longrightarrow$ *Matrices de* Toeplitz

Polinomios ortogonales en la recta real y matrices de Jacobi

- Measure $d\mu$ on $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ $\xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$ (p_n) ONP

- TTRR

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_{n+1}p_n(x) + a_np_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad p_{-1} \equiv 0$$

- Jacobi matrix

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

C.G.Jacobi

(1804 -1851)

Matemático alemán

- TTRR: Matrix form

$$\boxed{xp(x) = \mathcal{J}p(x)}$$

$$p = (p_0, p_1, p_2, \dots)^t$$

Polinomios ortogonales en la recta real

$$\boxed{x p_n(x) = a_{n+1} p_{n+1}(x) + b_{n+1} p_n(x) + a_n p_{n-1}(x)}$$

Ecuación en diferencias de orden dos

Representación matricial $\longrightarrow$ Matriz de Jacobi

¿ Ecuación en diferencias de orden dos ?

¿ Representación matricial ?

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

- Notación $\mathbb{P} = \mathbb{C}[z]$, $\qquad \mathbb{P}_n = \langle 1, z, z^2, \ldots, z^n \rangle$

$$\Lambda = \mathbb{C}[z^{-1}, z], \quad \Lambda_{m,n} = \langle z^m, z^{m+1}, \ldots z^n \rangle, \quad m \leq n$$

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

$\mu \longrightarrow$ Medida de Borell positiva en $\mathbb{T}$

- Producto escalar en Λ

$$(p, q)_\mu = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}d\mu(\theta), \qquad p, q \in \Lambda$$

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

- Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt $\{1, z, z^2, \dots, z^n\}$

  $\longrightarrow$ $\{p_n\}_{n\geq 0}$ Base ortogonal de $\mathbb{P}$

  - $p_n \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$
  - $(p_n,\ p_m)_\mu = 0$ si $n \neq m$ Equivalentemente
  - $(p_n, z^k)_\mu = 0$ si $k = 0, 1 \dots, n-1$

Para cada μ en $\mathbb{T}$ $\longrightarrow$ $\{p_n\}_{n\geq 0}$ SPO

- Única salvo factores no triviales

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

<u>Única salvo factores no triviales</u>

Dada $\{p_n\}_{n\geq 0}$ SPO en $\mathbb{T}$ respecto de μ

$\{q_n\}_{n\geq 0}$ es SPO con respecto de μ $\Leftrightarrow$ $q_n = \lambda_n p_n, \ \lambda_n \in \mathbb{C}^*$

Polinomios ortonormales en la circunferencia unidad

- Para cada medida μ en $\mathbb{T}$ $\Longrightarrow$ Existe una única $(\phi_n)_{n\geq 0}$ SPOM

  - $\kappa_n = 1/\|\phi_n\|$
  - $\varphi_n = \kappa_n \phi_n \Longrightarrow \|\varphi_n\| = 1$ SPON

- Ejemplo . *Medida de Lebesgue*

$$\mu(\theta) = \theta$$

$$(z^n, z^m)_\mu = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)} d\theta = 2\pi\delta_{nm}$$

$$\phi_n(z) = z^n \qquad \varphi_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}$$

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

- Producto escalar en Λ

$$(p,q)_\mu = \int_0^{2\pi} p(z)\overline{q}(z^{-1})d\mu(\theta), \quad p,q \in \Lambda, \quad z = e^{i\theta}$$

- Propiedades

  - $$(p(z),\ q(z)r(z))_\mu = (p(z)\overline{r}(z^{-1}), q(z))_\mu, \quad \forall p,q,r \in \Lambda$$

  - $$(zp(z),\ zq(z))_\mu = (p(z),\ q(z))_\mu, \quad \forall p,q \in \Lambda$$

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

- Operador de multiplicación en $\mathbb{P}$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbb{P}} : \; \mathbb{P} &\to \mathbb{P} \\ p(z) &\to zp(z) \end{aligned}$$

- Propiedades

  - Isométrico

  - $S_1 \perp S_2 \iff \Pi_{\mathbb{P}}(S_1) \perp \Pi_{\mathbb{P}}(S_2), \quad S_1, S_2 \subset \mathbb{P}$

Relación de recurrencia

- Operador de multiplicación

$$\Pi_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$$
$$p(z) \to zp(z)$$

- Relación de recurrencia

$$z\phi_n(z) = \phi_{n+1}(z) + \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\phi_k(z)$$

No es un buen camino...

Otra posibilidad:

$$z\phi_n(z) = \phi_{n+1}(z) + h_n(z), \qquad h_n \in \mathbb{P}_n$$

$$\boxed{\phi_{n+1}(z) = z\phi_n(z) + \phi_{n+1}(0)\phi_n^*(z)}$$

$$\left(\phi_n^*(z) = z^n\overline{\phi}_n(z^{-1})\right)$$

Polinomio recíproco

Ecuación en diferencias

Eliminando ϕ_n^*

$$\boxed{\phi_{n+1}(z) = z\phi_n(z) + \phi_{n+1}(0)\phi_n^*(z)}$$

Operador *

$$\boxed{\phi_{n+1}^*(z) = \phi_n^*(z) + \overline{\phi_{n+1}(0)}z\phi_n(z)}$$

Ecuación en diferencias de orden dos

$$\boxed{(a_{n+1} + a_n z)\phi_n(z) = a_n\phi_{n+1}(z) + (1 - |a_n|^2)a_{n+1}z\phi_{n-1}(z)}$$

Parámetros de Schur $\quad a_n = \phi_n(0)$

Condiciones iniciales: $\phi_0(z) \equiv 1, \qquad \phi_1(z) = z + a_1$

Polinomios ortonormales. Relación de recurrencia

- Polinomios ortonormales $\qquad \varphi_n = \kappa_n \phi_n \quad \left(\kappa_n = 1/\|\phi_n\|\right)$

$$\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \cdots + \kappa_n a_n$$

- Relación de recurrencia

$$z\varphi_{n-1}(z) = \rho_n \varphi_n(z) - a_n \varphi_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1$$

$$\varphi_n^*(z) = \overline{a}_n \varphi_n(z) + \rho_n \varphi_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1$$

$$\left(\rho_n = \frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n} = |1 - |a_n|^2|^{1/2}, \quad n \geq 1\right)$$

Fórmula de Christoffel-Darboux

$$K_n(z,y) := \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(z)} = \frac{\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(y)} - z\overline{y}\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(y)}}{1 - z\overline{y}}$$

$$= \frac{\varphi_{n+1}^*(z)\overline{\varphi_{n+1}^*(y)} - \varphi_{n+1}(z)\overline{\varphi_{n+1}(y)}}{1 - z\overline{y}}$$

$\left((\varphi_n)_{n\geq 0} \quad \text{Sucesión de polinomios ortonormales} \right)$

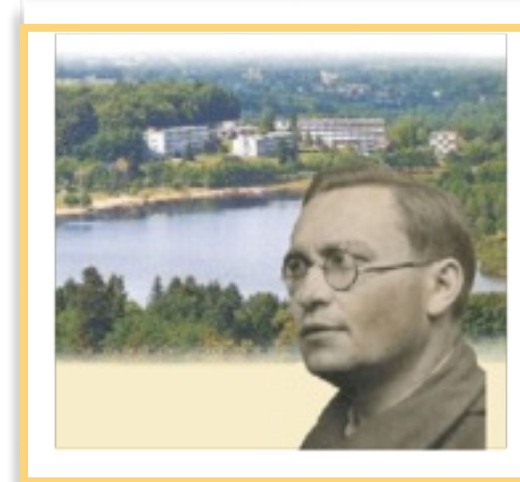
Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

- u Funcional lineal hermitiano en Λ $\quad (u[z^{-n}] = \overline{u[z^n]})$
  - Funcional sesquilineal $\quad (\cdot,\cdot)_u : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$

$$(f,g)_u := u[f(z)\overline{g}(z^{-1})], \ f,g \in \Lambda$$

  - Cuasi-definido si existe $\{p_n\}_{n\geq 0}$ SPO
    - $p_n \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$
    - $(p_n, p_m)_u = l_n \delta_{n,m}, \ \ l_n \neq 0$
  - Definido positivo si $\quad l_n > 0$

Teorema de Favard



Dada $(\phi_n)_{n\geq 0}$ *satisfaciendo la relación de recurrencia*

$$\phi_n(z) = z\phi_{n-1}(z) + a_n\phi^*_{n-1}(z)$$

existe un único funcional u *con respecto del cual* $(\phi_n)_{n\geq 0}$

es una secesión de polinomios ortogonales mónicos (SPOM)

Parámetros de Schur

Propiedades

- $$\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2} = 1 - |a_n|^2$$
- $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$

Dada $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ *es posible construir* $(\phi_n)_{n\geq 0}$ *SPOM*

$$\boxed{\phi_n(z) = z\phi_{n-1}(z) + a_n\phi_{n-1}^*(z)}$$

$$\boxed{(a_{n+1} + a_n z)\phi_n(z) = a_n\phi_{n+1}(z) + (1 - |a_n|^2)a_{n+1}z\phi_{n-1}(z)}$$

Construcción de familias de POM

Ejemplos

- $$a_n = 0, \quad n \geq 1$$

  $$\phi_n(z) = z^n, \quad d\mu(\theta) = d\theta$$

- $$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1$$

  $$\phi_n(z) = z^n + \frac{n}{n+1} z^{n-1} + \frac{n-1}{n+1} z^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

  $$d\mu(\theta) = \sin^2(\theta/2) d\theta$$

Ceros y medida de ortogonalidad

- Relación de recurrencia $\longrightarrow$ *Construcción de familias de PO*

¿Recuperación de la medida de ortogonalidad?

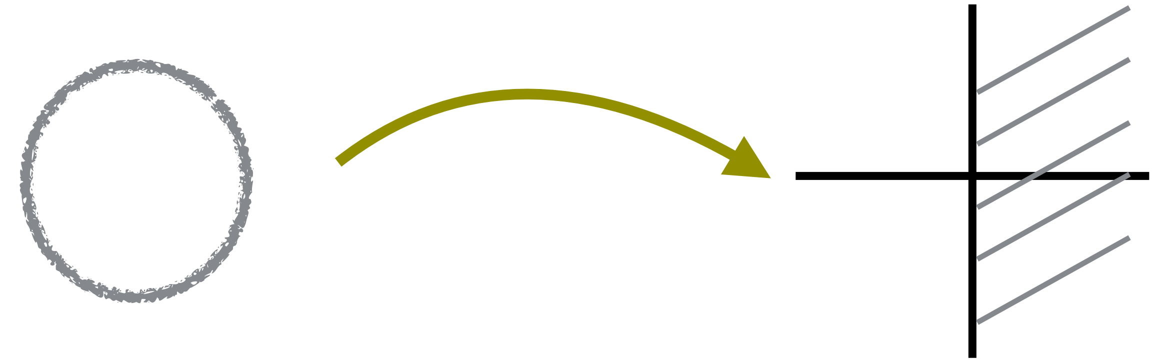
- Relación de recurrencia $\longrightarrow$ Ceros

  $\searrow$ Medida de ortogonalidad

- $(\phi_n)_{n\geq 0}$ SPO $\longrightarrow$ *Ceros en el disco unidad*

Medida de ortogonalidad

Función de Carathéodory



$$F(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z} d\mu(t), \quad |z| < 1$$

Analítica en $\mathbb{D}$

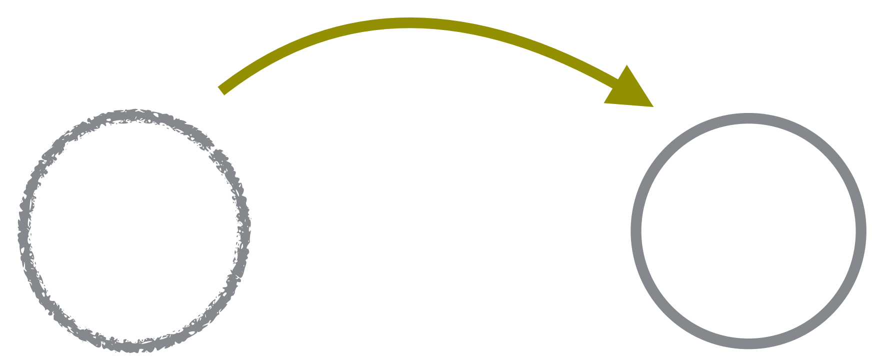
$$F(z) = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}_j z^j, \quad \mu_j = \int_{\mathbb{T}} z^j d\mu(z)$$

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\varphi}_n^*}{\varphi_n^*}$$

Polinomio de segunda especie

Función de Schur

$$f(z) = \frac{1-F(z)}{1+F(z)}$$



$\mathbb{D}$ $\quad$ $\overline{\mathbb{D}}$

Medida de ortogonalidad

Función de Carathéodory - Función de Schur

Permiten recobrar la medida de ortogonalidad

$$d\mu(e^{i\theta}) = \omega(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s(e^{i\theta}), \quad \theta \in (-\pi, \pi],$$

$$\omega(\theta) = \lim_{r \uparrow 1} ReF(re^{i\theta})$$

$$\mu(\{e^{i\theta_0}\}) = \lim_{r \to 1} \frac{1-r}{2} F(re^{i\theta_0}) \neq 0$$

Puntos de masa

$$\mu_s = 0 \iff Re \int_{\mathbb{T}} \frac{f}{1+f} = 0$$

Medida de ortogonalidad

Ejemplos

- Medida de Lebesgue

$$a_n = 0, \quad n \geq 0 \longrightarrow \phi_n(z) = z^n \longrightarrow F(z) = 1 \longrightarrow \mu(\theta) = \theta$$

- Polinomios de Bersntein-Szegö

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = 0, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$\phi_n(z) = z^{n-1}(z + a)$$

$$F(z) = \frac{-\overline{a}z + 1}{\overline{a}z + 1} \qquad f(z) = \overline{a}\, z$$

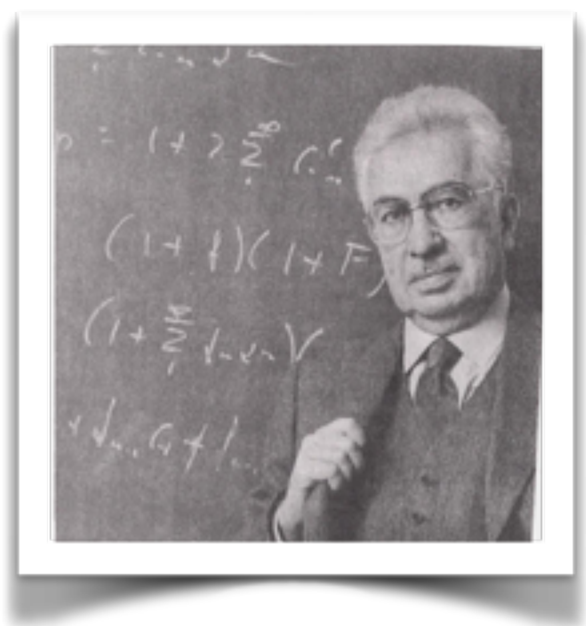
$$\omega(\theta) = \frac{1 - |a|^2}{|1 - ae^{i\theta}|^2} \qquad d\mu_s = 0$$

Método de "ida y vuelta"

$(a_n)_{n\geq 0}$ $\longleftrightarrow$ μ

RR

$(\phi_n)_{n\geq 0}$



Luis Vigil

1914 -2003

$f(z)$

$(\mu_n)_{n\geq 0}$ $\longleftrightarrow$ $F(z)$

Polinomios ortonormales en la circunferencia unidad

$\mathbb{T} \longrightarrow [-2, 2]$

$z \longrightarrow x = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$

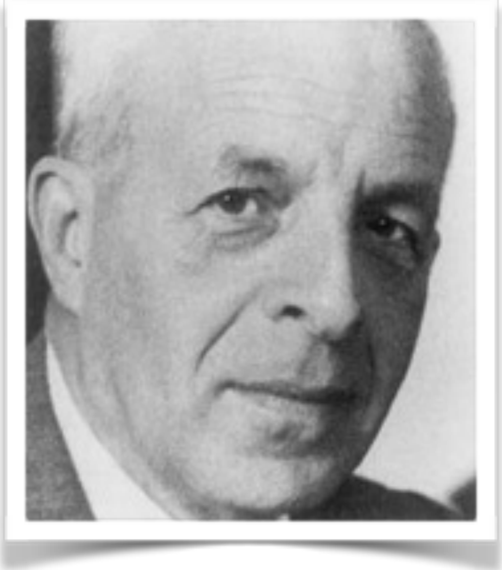
μ Simétrica (PS reales) $\longrightarrow \mathrm{Sz}(\mu)$

$$\int P(x)\,d(\mathrm{Sz}(\mu)(x)) = \int P(z + z^{-1})\,d\mu(z), \quad \forall P \in \mathbb{P}$$

Polinomios ortonormales en la recta real

Polinomios ortonormales en la circunferencia unidad

$$(\varphi_n)_{n\geq 0}$$



Gabor Szegö

$$p_n^{(e)}(x) = \frac{z^{-n}(\varphi_{2n}^*(z) + \varphi_{2n}(z))}{\sqrt{2(1+a_{2n})(z^{-1}-z)}} \longrightarrow \mu_e = \mathrm{Sz}(\mu)$$

$$p_{n-1}^{(o)}(x) = \frac{z^{-n}(\varphi_{2n}^*(z) - \varphi_{2n}(z))}{\sqrt{2(1-a_{2n})(z^{-1}-z)}} \longrightarrow d\mu_o(x) = (4-x^2)d\mu_e(x)$$

Polinomios ortonormales en la recta real

$$(p_n^{(e)})_{n\geq 0},\ (p_n^{(o)})_{n\geq 0}$$

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

- ☆ *Definición. Primeras propiedades*
  - ○ *Relación de recurrencia*
  - ○ *Ceros medida y de ortogonalidad*
- ☆ Representaciones matriciales
  - ○ Matriz de Hessenberg

    Introducción a la Teoría de Szegö
  - ○ Matriz CMV
- ☆ Algunas aplicaciones

Matrices de Hessenberg

$$\boxed{z\varphi_n(z) = \sum_{j=0}^{n+1} d_{n,j}\varphi_j(z)}$$

$$\left(d_{nj} \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq j \leq n+1, \quad n \geq 0 \right)$$

Coeficiente de z^{n+1} $\longrightarrow$ $d_{n,n+1} = \rho_{n+1}, \quad n \geq 0$

Coeficiente de $z^j, \quad 0 \leq j \leq n, \quad n \geq 0$

$$\boxed{d_{nj} = -\frac{\kappa_j}{\kappa_n}\overline{a}_j a_{n+1}}$$

Matrices de Hessenberg

Representación de $\Pi_{\mathbb{P}}$ respecto de la base $(\varphi_n)_{n\geq 0}$

Karl Hessenberg

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & \cdots \\ d_{20} & d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$d_{nj} = \begin{cases} -\rho_{j+1}\rho_{j+2}\ldots\rho_n\overline{a}_j a_{n+1} & \text{si } j = 0, 1, \ldots, n-1 \\ -\overline{a}_n a_{n+1} & \text{si } j = n \\ \quad \rho_{n+1} & \text{si } j = n+1 \end{cases}$$

- Complicada dependencia de los parámetros de Schur
- No es una matriz banda
- No siempre representa el operador de multiplicación completo

Matrices de Hessenberg

- Ejemplo

$$a_n = 0, \quad n \geq 1$$

$$\phi_n(z) = z^n, \quad d\mu(\theta) = d\theta$$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

- No es una matriz banda
- No representa el operador de multiplicación completo
- No es unitaria

Matrices de Hessenberg y ceros

- ϕ_N es el polinomio característico de $\mathcal{H}_N$

$$(zI_N - \mathcal{H}_N)\begin{pmatrix} \varphi_0(z) \\ \varphi_1(z) \\ \vdots \\ \varphi_{N-1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \rho_N \varphi_N(z) \end{pmatrix}, \quad N \geq 1$$

- Regla de Cramer

$$\varphi_{N-1}(z) = \frac{\det(zI_{N-1} - \mathcal{H}_{N-1})}{\det(zI_N - \mathcal{H}_N)} \rho_N \varphi_N(z)$$

- Inducción

$$\frac{\phi_N(z)}{\det(zI_N - \mathcal{H}_N)} = \frac{\phi_1(z)}{\det(zI_1 - \mathcal{H}_1)} \quad \Big(\varphi_n = \kappa_n \phi_n\Big)$$

Szegö's Theorem

"The elegance of a mathematical theorem
is directly proporcional to the number of independent ideas one can see in the theorem
and inversely proportional to the effort it takes to see them"

G.Pólya, Mathematical Discovery, 1981

Theorem . Let $d\mu = w(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s$ and let $\{a_n\}_{n\geq 0}$ the Shur parameters of μ. Then

$$\prod_{j=0}^{\infty}(1-|a_j|^2) = \exp\left(\int_0^{2\pi}\log(\omega(\theta))\frac{d\theta}{2\pi}\right)$$

$$\mathcal{H} \quad \text{Unitaria} \iff \overline{\mathbb{P}} = L^2_\mu(\mathbb{T}) \iff \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 = \infty$$

Matriz de Hessenberg

Complicada dependencia de los parámetros de Schur

No es una matriz banda

No siempre representa el operador de multiplicación completo

$\mathcal{H}$ no Unitaria $\quad z\overline{\mathbb{P}} \subseteq \overline{\mathbb{P}}$

$\mathcal{H}$ Unitaria $\quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\mathbb{P}} = L^2_\mu(\mathbb{T})$

$\downarrow$

Operador de multiplicación en Λ ...

¿ Otra representación matricial mas sencilla?

Polinomios ortogonales de Laurent

- μ Medida en $\mathbb{T}$
- $\{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \ldots\}$ Base de Λ
- Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt $\longrightarrow$

$(\chi_n)_{n\geq 0}$ Base ortonormal $\longrightarrow$ **SPONL**

- $\chi_n \in \mathbb{L}_n \setminus \mathbb{L}_{n-1}$ $\quad \left(\mathbb{L}_{2n} := \Lambda_{-n,n} \;,\; \mathbb{L}_{2n+1} := \Lambda_{-n,n+1} \right)$
- $(\chi_n, \chi_m)_\mu = 0 \;\; si \;\; n \neq m$ Equivalentemente

$$(\chi_{2n}, z^k)_\mu = 0 \quad si \quad k = -n+1, \ldots, n$$

$$(\chi_{2n+1}, z^k)_\mu = 0 \quad si \quad k = -n, \ldots, n$$

Polinomios ortogonales de Laurent

Relación con PO

- μ Medida en $\mathbb{T}$, $(\chi_n)_{n\geq 0}$ Sucesión en Λ

Definimos

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_{2n}(z) &= z^n \overline{\chi}_{2n}(z^{-1}), \quad n \geq 0 \\ \varphi_{2n+1}(z) &= z^n \chi_{2n+1}(z), \quad n \geq 0 \end{aligned}}$$

Entonces

$$\boxed{(\chi_n)_{n\geq 0} \ \text{SPOL} \iff (\varphi_n)_{n\geq 0} \ \text{SPO}}$$

Correspondencia

Polinomios ortogonales de Laurent

$(\chi_n)_{n\geq 0}$ **SPOL** $\Longleftrightarrow$ $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ **SPO**

Ejemplo

$$\mu(\theta) = \theta/2\pi \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi_n(z) = z^n, \quad n \geq 0$$

$$\chi_{2n-1}(z) = z^n, \quad n \geq 1$$

$$\chi_{2n}(z) = z^{-n}, \quad n \geq 0$$

Polinomios ortogonales de Laurent

Representación matricial

- Operador de multiplicación $\quad \Pi_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$

$$f(z) \to z f(z)$$

$(\chi_n)_{n\geq 0}$ Base ortonormal en Λ

Representación matricial

$$z\chi_n(z) = \sum_{\boxed{k=n-2}}^{\boxed{n+2}} \pi_{nk}\chi_k(z), \quad \pi_{nk} \in \mathbb{C}$$

Penta-diagonal

Cálculo de los coeficientes...

Polinomios ortogonales de Laurent

Dada $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ **SPO** $\longleftrightarrow$ $(\chi_n)_{n\geq 0}$ **SPOL**

$$\boxed{\begin{aligned} \chi_{2n}(z) &= z^{-n}\varphi_{2n}^*(z), && n \geq 0 \\ \chi_{2n+1}(z) &= z^{-n}\varphi_{2n+1}(z), && n \geq 0 \end{aligned}}$$

Propiedades

Relación de recurrencia

$$\boxed{z\varphi_{n-1}(z) = \rho_n\varphi_n(z) - a_n\varphi_{n-1}^*(z)}$$

Polinomios ortogonales de Laurent

Relación de recurrencia $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ **SPO** $\longleftrightarrow$ $(\chi_n)_{n\geq 0}$ **SPOL**

$$\boxed{\begin{aligned} \chi_{2n-1}(z) &= z^{-n+1}\varphi_{2n-1}(z), && n \geq 1 \\ \chi_{2n}(z) &= z^{-n}\varphi^*_{2n}(z), && n \geq 0 \end{aligned}}$$

○ $z\varphi_{n-1}(z) = \rho_n\varphi_n(z) - a_n\varphi^*_{n-1}(z)$

$\varphi^*_n(z) = \overline{a}_n\varphi_n(z) + \rho_n\varphi^*_{n-1}(z)$

☆ $z\chi_{2n-1}(z) = z^{2-n}\varphi_{2n-1}(z) = z^{1-n}(\rho_{2n}\varphi_{2n}(z) - a_{2n}\varphi^*_{2n-1}(z))$

★
$$\boxed{\begin{aligned} z\chi_{2n-1} &= \rho_{2n}\rho_{2n+1}\chi_{2n+1} - \rho_{2n}a_{2n+1}\chi_{2n} \\ &\quad - \overline{a}_{2n-1}a_{2n}\chi_{2n-1} - \rho_{2n-1}a_{2n}\chi_{2n-2} \end{aligned}}$$

RR 5-términos

Polinomios ortogonales de Laurent

Operador de multiplicación $\Pi_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$

$f(z) \to z f(z)$

$\left((\chi_n)_{n\geq 0}\ \text{Base ortonormal} \right)$

Representación matricial

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -a_1 & \rho_1 & & & & & \\ -\rho_1 a_2 & -\overline{a}_1 a_2 & -\rho_2 a_3 & \rho_2\rho_3 & & & \\ \rho_1\rho_2 & \overline{a}_1\rho_2 & -\overline{a}_2 a_3 & \overline{a}_2\rho_3 & & & \\ & & -\rho_3 a_4 & -\overline{a}_3 a_4 & -\rho_4 a_5 & \rho_4\rho_5 & \\ & & \rho_3\rho_4 & \overline{a}_3\rho_4 & -\overline{a}_4 a_5 & \overline{a}_4\rho_5 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

- **Penta-diagonal**
- **Sencilla dependencia de los parámetros de Schur**
- **Siempre representa el operador de multiplicación completo**

Representación matricial

Operador de multiplicación

$$\Pi_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$$
$$\chi_n(z) \to z\chi_n(z)$$

Composición de

$$\Pi_\Lambda^{(1)} : \Lambda \to \Lambda$$
$$\chi_n(z) \to z\chi_{n*}(z)$$

$$\Pi_\Lambda^{(2)} : \Lambda \to \Lambda$$
$$\chi_{n*}(z) \to \chi_n(z)$$

$$\boxed{\Pi_\Lambda = \Pi_\Lambda^{(1)}\Pi_\lambda^{(2)}}$$

Polinomios ortogonales de Laurent

$(\chi_n)_{n\geq 0}$ **SPOL** $\Longleftrightarrow$ $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ **SPO**

Relaciones entre POL

$$\begin{pmatrix} \chi_{2n-1}(z) \\ \chi_{2n}(z) \end{pmatrix} = \Theta_{2n} \begin{pmatrix} \chi_{2n-1*}(z) \\ \chi_{2n*}(z) \end{pmatrix} \qquad \Theta_n = \begin{pmatrix} -a_n & \rho_n \\ \rho_n & \overline{a}_n \end{pmatrix}$$

$$z \begin{pmatrix} \chi_{2n*}(z) \\ \chi_{2n+1} * (z) \end{pmatrix} = \Theta_{2n+1} \begin{pmatrix} \chi_{2n}(z) \\ \chi_{2n+1}(z) \end{pmatrix} \qquad (f_*(z) = \overline{f}(z^{-1}), \;\; \forall f \in \Lambda)$$

Polinomios ortogonales de Laurent

$$\Pi_\Lambda^{(1)} : \Lambda \to \Lambda \qquad \chi_n(z) \to z\chi_{n*}(z)$$

$$\Pi_\Lambda^{(2)} : \Lambda \to \Lambda \qquad \chi_{n*}(z) \to \chi_n(z)$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \Theta_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \Theta_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \Theta_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \Theta_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{L}\,\mathcal{M}$$

Matriz pentadiagonal : Producto de dos tridiagonales

PO en la circunferencia unidad y matrices CMV

- ϕ_N Polinomio característico de $\mathcal{C}_N$

$$\boxed{(zI_N - \mathcal{C}_N)X_N(z) = b_N(z)}$$

$$X_N(z) := z^{[(N-1)/2]}(\chi_0(z)\chi_1(z)\cdots\chi_{N-1}(z))^T$$

$$b_N(z) := \begin{cases} \rho_N \; z^{1+\left[\frac{N-1}{2}\right]} \; \chi_{N*}(z) \; (0,0,\ldots,0,1)^T, & N \;\; par \\ \\ \rho_N \; z^{1+\left[\frac{N-1}{2}\right]} \; \chi_N(z) \; (0,0,\ldots,\rho_{N-1}\overline{a}_{N-1})^T, & N \; impar \end{cases}$$

- Regla de Cramer & Inducción & Relación entre $\varphi_N, \; \phi_N, \; \chi_N$

PO en la circunferencia unidad y matrices CMV

- Truncación unitaria de $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -a_1 & \rho_1 & & & & & \\ -\rho_1 a_2 & -\bar{a}_1 a_2 & -\rho_2 a_3 & \rho_2\rho_3 & & & \\ \rho_1\rho_2 & \bar{a}_1\rho_2 & -\bar{a}_2 a_3 & \bar{a}_2\rho_3 & & & \\ & & -\rho_3 a_4 & -\bar{a}_3 a_4 & -\rho_4 a_5 & \rho_4\rho_5 & \\ & & \rho_3\rho_4 & \bar{a}_3\rho_4 & -\bar{a}_4 a_5 & \bar{a}_4\rho_5 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Polinomio característico $\phi_N \longrightarrow$ Polinomio para-ortogonal

- Ceros simples, entrelazados y en $\mathbb{T}$

Matrices CMV

- Measure $d\mu$ in $\mathbb{T}$ $\longrightarrow \{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \dots\} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} (\chi_n)$ ONLP
- FTRR

$$z\chi_{2n-1} = \rho_{2n}\rho_{2n+1}\chi_{2n+1} - \rho_{2n}a_{2n+1}\chi_{2n} - \overline{a}_{2n-1}a_{2n}\chi_{2n-1} - \rho_{2n-1}a_{2n}\chi_{2n-2}$$

$$z\chi_{2n} = \overline{a}_{2n}\rho_{2n+1}\chi_{2n+1} - \overline{a}_{2n}a_{2n+1}\chi_{2n} + \overline{a}_{2n-1}\rho_{2n}\chi_{2n-1} + \rho_{2n-1}\rho_{2n}\chi_{2n-2}$$

- CMV matrix

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -a_1 & \rho_1 & & & & & \\ -\rho_1 a_2 & -\overline{a}_1 a_2 & -\rho_2 a_3 & \rho_2\rho_3 & & & \\ \rho_1\rho_2 & \overline{a}_1\rho_2 & -\overline{a}_2 a_3 & \overline{a}_2\rho_3 & & & \\ & & -\rho_3 a_4 & -\overline{a}_3 a_4 & -\rho_4 a_5 & \rho_4\rho_5 & \\ & & \rho_3\rho_4 & \overline{a}_3\rho_4 & -\overline{a}_4 a_5 & \overline{a}_4\rho_5 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

(a_n) Schur parameters, $\rho_n = (1 - |a_n|)^{1/2}$

- FTRR : Matrix form

$$\boxed{z\chi(z) = \mathcal{C}\chi(z)} \qquad \chi = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots)^t$$

JACOBI vs. **CMV**

OPRL

$p = (p_n)$

3RR

$$xp(x) = \mathcal{J}p(x)$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} * & * & & & & \\ * & * & * & & & \\ & * & * & * & & \\ & & * & * & * & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

JACOBI

auto-adjunta 3-diagonal

Laurent OPUC

$\chi = (\chi_n)$

5RR

$$z\chi(z) = \mathcal{C}\chi(z)$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} * & * & & & & \\ * & * & * & * & & \\ * & * & * & * & & \\ & & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

CMV

unitaria 5-diagonal

CMV matrices: unitary analogue of Jacobi matrices

CMV - Aplicaciones

Teoría espectral

Teoria de operadores ⟷ Teoría de PO

Sistemas integrables

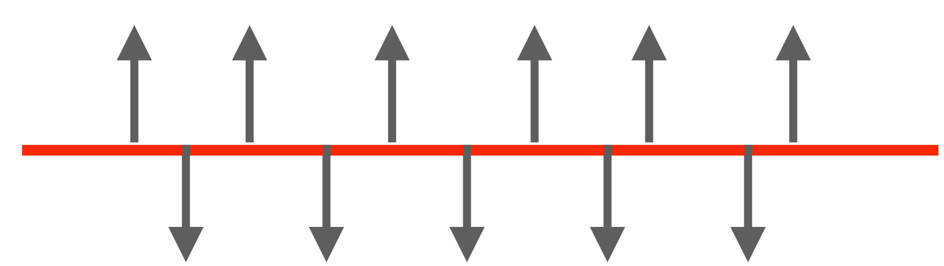
Schur flows

Ablowitz Ladik

Teoría de Aproximación

Fórmulas de cuadratura

Quantum random walks



CMV - Aplicaciones

Sistemas integrables → Schur flows

→ Ablowitz Ladik

Matrices de Jacobi y sistemas integrables

◇ **Toda Lattice**

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_{n+1} - b_n) \\ \dot{b}_n = 2(a_n^2 - a_{n-1}^2) \end{cases}$$

◇ **Par de Lax**

$$\dot{\mathcal{J}} = [\mathcal{J}, P] \qquad P = J_+ - J_- = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ -a_1 & 0 & a_2 & & \\ & -a_2 & 0 & a_3 & \\ & & -a_3 & 0 & a_4 \\ & & & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \ \textbf{Darboux}$$

$$\dot{\mathcal{K}}(t) \qquad \textbf{Toda ?}$$

◇ **Medida**

$$d\mu(x,t) = e^{-xt}\, d\mu(x,0)$$

$$\Big\downarrow \ \textbf{Darboux}$$

$$d\nu(x,t) = \wp(x)\, d\mu(x,t) = e^{-xt}\, \wp(x)\, d\mu(x,0) = e^{-xt}\, d\nu(x,0)$$

Darboux & Jacobi: Una forma de generar soluciones de Toda

Matrices CMV y sistemas integrables

☆ Schur flows

$$\dot{a}_n = (1 - |a_n|^2)\,(a_{n+1} - a_{n-1})$$

(L.Golinskii, 2006)

Ablowitz-Ladik

$$-i\dot{a}_n = (1 - |a_n|^2)\,(a_{n+1} + a_{n-1})$$

(Thesis I.Nenciu - Caltech, 2005)

☆ Lax Pair

$$\dot{\mathcal{C}} = [\pi(\operatorname{Re}\mathcal{C}), \mathcal{C}]$$

$$\dot{\mathcal{C}} = [\pi(\operatorname{Re} i\,\mathcal{C}), \mathcal{C}]$$

$$\operatorname{Re}\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathcal{C} + \mathcal{C}^{+})$$

$$\pi(M) := P_{+}M - P_{-}M$$

☆ Medida

$$d\mu(z,t) = e^{-t(z + z^{-1})}\,d\mu(z,0)$$

Darboux

$$d\nu(z,t) = \ell(z)\,d\mu(z,t) = e^{-t(z+z^{-1})}\,\ell(z)\,d\mu(z,0) = e^{-t(z+z^{-1})}\,d\nu(z,0)$$

Matrices CMV y sistemas integrables

☆ **Schur flows**

Ablowitz-Ladik

$$\dot{a}_n = (1 - |a_n|^2)\,(\lambda a_{n+1} - \overline{\lambda} a_{n-1})$$

$\downarrow\uparrow$

☆ **Lax Pair**

$$\dot{\mathcal{C}} = [\mathcal{C}, \pi(\mathrm{Re}(\lambda \mathcal{C}))]$$

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathcal{C} + \mathcal{C}^+)$$

$$\pi(M) := P_+ M - P_- M$$

$\downarrow\uparrow$

☆ **Medida**

$$d\mu(z,t) = e^{-t(\lambda z + \overline{\lambda} z^{-1})}\, d\mu(z,0)$$

$\downarrow$ **Darboux** $\uparrow$

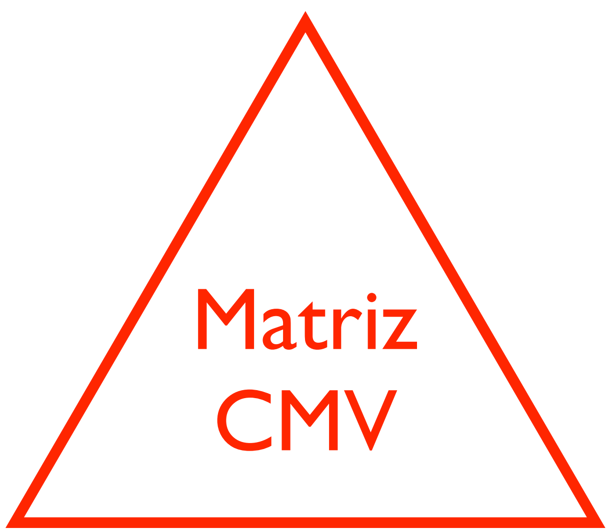
$$d\nu(z,t) = \ell(z)\, d\mu(z,t) = e^{-t(\lambda z + \overline{\lambda} z^{-1})}\, \ell(z)\, d\mu(z,0) = e^{-t(\lambda z + \overline{\lambda} z^{-1})}\, d\nu(z,0)$$

Polinomios ortogonales en la recta real

Operadores autoadjuntos

Toda Lattice

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad



Operadores unitarios

Schur flows
Ablowitz Ladik

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

- ☆ *Definición. Primeras propiedades*
  - ○ *Relación de recurrencia*
  - ○ *Ceros medida y de ortogonalidad*
- ☆ *Representaciones matriciales*
  - ○ *Matriz de Hessenberg*

    Introducción a la Teoría de Szegö
  - ○ *Matriz CMV*
- ☆ *Algunas aplicaciones*