Sesión 15: Perspectivas y Aplicaciones de la Teoría de Funciones Especiales y Polinomios Ortogonales

Días 1, 2 y 3 de febrero

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

Perspectivas y aplicaciones de la teoría de Funciones Especiales y Polinomios Ortogonales

Breve descripción y motivación: Las funciones especiales de la Física Matemática, y dentro de ellas los polinomios ortogonales, han sido y son un área fascinante dentro de las matemáticas tanto puras como aplicadas. La primera familia de polinomios ortogonales se remonta a los trabajos de Legendre sobre gravitación a finales del siglo XVIII y ya Euler en 1769 había considerado la hoy conocida función hipergeométrica de Gauss. Sus aplicaciones van desde las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, análisis numérico, mecánica cuántica, teoría de números, predicción lineal en series temporales, teoría de filtros y procesado de señales etc.

En España la investigación matemática en polinomios ortogonales se articulo en sus comienzos en la Universidad de Zaragoza a comienzos de los años 1970 bajo la dirección de Luis Vigil Vazquez, siendo hoy día un área muy activa de investigación en España como pone de manifiesto la gran cantidad de contribuciones de matemáticos españoles y su participación en los distintos encuentros tanto nacionales como internacionales. Todo ello viene además avalado por la gran difusión y proyección internacional del área y la participación activa de muchos investigadores del tema tal y como se comentará más adelante.

Coincidiendo con el Centenario de la RSME hemos considerado oportuno presentar una visión actualizada de la investigación que se lleva a cabo a nivel internacional en este campo tanto desde el punto de vista teórico como de sus aplicaciones, así como ofrecer y discutir perspectivas de trabajo futuro.

Programa

Martes 1
Chairman F. Marcellán.
15:30 Apertura de la sesión.
15:40 Dehesa (50 min)
16:40 Castillo (15 min)
17:00 Café

Chairman Lagomasino
17:30 López (50 min)
18:30 Velázquez (50 min)
19:30 Martínez Finkelshtein (50 min)

Miércoles 2
Chairman Durán
18:00 Sinusía (15 min)
18:20 Domínguez (15 min)
18:40 Godoy (50 min)
19:40 Lagomasino (50 min)

Jueves 3
Chairman Dehesa
15:30 Segura (50 min)
16:30 Durán (50 min)

Sesión 15: Perspectivas y Aplicaciones de la Teoría de Funciones Especiales y Polinomios Ortogonales

Días 1, 2 y 3 de febrero

Charlas invitadas (50 min.)

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

Rodrigues formula for Orthogonal matrix polynomials satisfying differential equations

Antonio J. Durán

The theory of matrix valued orthogonal polynomials was started by M. G. Krein in 1949. But more than 50 years have been necessary to see the first examples of orthogonal matrix polynomials $(P_n)_n$ satisfying second order differential equations of the form

$$P_n''(t)F_2(t) + P_n'(t)F_1(t) + P_n(t)F_0 = \Gamma_n P_n(t). \tag{1}$$

Here F_2, F_1 and F_0 are matrix polynomials (which do not depend on n) of degrees less than or equal to 2, 1 and 0, respectively. These families of orthogonal matrix polynomials are among those that are likely to play in the case of matrix orthogonality the role of the classical families of Hermite, Laguerre and Jacobi in the case of scalar orthogonality.

This talk is devoted to the question of the existence of Rodrigues' formulas for these families of orthogonal matrix polynomials, that is, assuming that the sequence of orthogonal matrix polynomials $(P_n)_n$ with respect to W satisfies the set of differential equations (1), $n \geq 0$, is there any efficient and canonical way to produce the sequence of polynomials $(P_n)_n$ from W and the differential coefficients F_2, F_1 and F_0? (Say in an analogous way as to the formula

$$p_n = (f_2^n w)^{(n)}/w,$$

produces the orthogonal polynomials with respect to a classical scalar weight w).

Keywords: General theory of orthogonal functions and polynomials, matrix orthogonal polynomials

Mathematics Subject Classification 2000: 42C05

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Sevilla, Sevilla
duran@us.es

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

Polinomios ortogonales en varias variables

Eduardo Godoy Malvar

Mientras que la teoría de polinomios ortogonales en una variable es bien conocida debido a sus relaciones con otras áreas de matemáticas y a sus aplicaciones en física e ingeniería, el caso multivariable no ha tenido el alcance deseado por las dificultades intrínsecas del mismo. Planteado el problema por S. Bochner, en 1929, de identificar aquellas familias de polinomios multivariables que son autofunciones de operadores lineales en derivadas parciales de segundo orden, H.L. Krall y L.M. Sheffer, en 1967, inician el estudio de autofunciones que son ortogonales sobre un dominio, presentando condiciones de admisibilidad. En 1997, A.S. Lyskova caracteriza las ecuaciones en derivadas parciales lineales de tipo hipergeométrico. En esta charla presentaremos recientes avances en el estudio de las propiedades algebraicas y analíticas de las soluciones ortogonales de las ecuaciones en derivadas (y en diferencias) parciales admisibles y de tipo hipergeométrico.

Keywords: General theory of orthogonal functions and polynomials, polynomials in several variables

Mathematics Subject Classification 2000: 42C05

Departamento de Matemática Aplicada II
ETSET, Universidade de Vigo.
egodoy@dma.uvigo.es

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

Approximation of special functions by means of Green functions, fixed point theorems and boundary value problems

José Luis López García

One of the most studied problems in applied mathematics is the boundary value problem for a linear or non-linear differential equation of any order (we consider initial value problems as a particular case). An important example is, of course, the case of second order linear differential equations with a regular singular point at one end point of the interval, accompanied with a Dirichlet condition at the singular point: most of the classical special functions are solutions of this kind of problems. The theory of the Green's functions for linear equations let us the inversion of the differential operator and gives the solution of the boundary value problem in terms the Green's function associated to the problem. Unfortunately, in most of the examples, the exact computation of that Green's function is an impossible mission. Then, we must resign to solve the problem exactly and look for an approximation. We explore here the following procedure for that approximation: divide the differential operator L in the sum of two operators L_1 and L_2 in such a way that you may exactly compute the inverse of the operator L_1 (we may exactly compute its Green's function). Immediately we may transform the boundary value problem into an integral equation (linear or non-linear). From this point we may explore the possibility of design an iterative algorithm to approximate the solution of the integral equation based on a fixed point theorem, that is, an iterative algorithm to approximate the solution of the boundary value problem. Intuitively, one may guess that the "smaller" the operator L_2 is, compared with the operator L_1, the more chance we have to design a convergent algorithm. In this way, we consider the operator L_2 as a perturbation of the operator L_1. On the other hand, in general, the "closer" the operator L_1 is to the operator L, the more difficult is the computation of its Green's function. Then, the key point is to choose L_1 as "close" to L as possible and, at the same time, as simple as possible in order to be able to compute its Green's function.

In this talk we introduce what we consider the original idea given in [Bailey, Shampine and Waltman, 1968]. These authors exploited this idea for one-dimensional boundary value problems for second order linear or non-linear differential equations with L_1 = Laplacian. They also restricted their analysis to two types of boundary value problems: Dirichlet and mixed Dirichlet-Neumann. We also mention [Lopez, 2009], where the idea is used for initial value problems defined by means of a linear differential equation of the second order with a regular singular point and L_1 = Laplacian.

We explore several possible generalizations of these ideas. On the one hand, we consider general boundary conditions for a second order differential equation and L_1 = Laplacian, not only Dirichlet or mixed Dirichlet-Neumann. Moreover, we do not restrict ourselves to regular differential equations, but we consider the presence of regular singular points at one end or both ends of the interval, that is, we consider

L_1 = Laplacian multiplied by a factor vanishing at one or both end points of the interval. On the other hand, for second order equations, we consider other operators L_1 different from the Laplacian that are "closer" to the operator L. Some examples of approximation of special functions are given as illustration. The application of the idea to boundary value problems defined by means of higher order differential equations and partial differential equations is in progress.

[Bailey, Shampine and Waltman, 1968] B. B. Bailey, L. F. Shampine and P. E. Waltman. Nonlinear Two Point Bundary Value Problems. Academic Press. New York. 1968.

[Lopez, 2009] J.L. López. The Liouville-Neumann expansion at a regular singular point. J. Diff. Equat. Appl. **15** (2) (2009) 119-132.

Keywords: Analytical theory: series, transformations, transforms, operational calculus, etc.; Volterra integral equations

Mathematics Subject Classification 2000: 34A25, 45D05

Departamento de Matemática e Informática
Universidad Pública de Navarra.
`jl.lopez@unavarra.es`

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

Hermite Padé approximation and asymptotics of multiple orthogonal polynomials

Guillermo López Lagomasino

We will present recent advances in the theory of multiple orthogonal polynomials and its applications in vector rational approximation of systems of analytic functions and simultaneous quadrature rules.

Keywords: General theory of orthogonal functions and polynomials, multiple orthogonal polynomials

Mathematics Subject Classification 2000: 42C05

Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid, Leganés, Madrid.
lago@math.uc3m.es

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

Orthogonal polynomials, random matrix models, non-intersecting paths, and the Riemann-Hilbert analysis

Andrei Martínez Finkelshtein

Random matrix theory (RMT) is a great source of exciting and challenging problems for specialists in orthogonal polynomials. The analysis of the eigenvalue distribution of a random matrix ensemble leads naturally to concepts of determinantal point processes and to their particular case, biorthogonal ensembles, when the correlation kernel can be written explicitly in terms of two sequences of mutually orthogonal functions. In many situations we can reduce this further to the standard orthogonality. For instance, it is well known that the eigenvalue distribution of the Gaussian Unitary Ensemble (GUE) can be described in terms of the Hermite polynomials.

Another source of determinantal point processes is a group of stochastic models related with particles following non-intersecting paths (NIP). In fact, the connection of these models with the RMT is very tight: the eigenvalues of the GUE and the distribution of random particles performing a Brownian motion, departing and ending at the origin under condition that their paths never collide are, roughly speaking, statistically identical.

We will describe briefly the appearance of orthogonal and multiple orthogonal polynomials in a variety of RMT and NIP models. Their asymptotic analysis (when the number of particles or the size of the matrix grows to infinity) can be performed using the non-commutative steepest descent analysis of Deift and Zhou based on the Riemann-Hilbert characterization of the orthogonal polynomials. Without going into technical details, some ideas behind this technique will be illustrated in the case of a model of squared Bessel nonintersecting paths.

Keywords: General theory of orthogonal functions and polynomials, Riemann-Hilbert analysis

Mathematics Subject Classification 2000: 42C05

Departamento de Estadística y Matemética Aplicada
Universidad de Almería.
andrei@ual.es

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

Orthogonal Polynomials, Quantum Mechanics and Information Theory

Jesús Sánchez-Dehesa Moreno-Cid

The orthogonal polynomials, and in general the special functions of Applied Mathematics and Mathematical Physics, are naturally encountered in the wavefunctions or physical solutions of the solvable non-relativistic (Schrödinger) and relativistic (Dirac) equations of motion of quantum systems. This is basically the reason of the relevant role that they play in the quantum interpretation of the microscopic systems. In this talk we first explicitly explain this fact by use various simple realistic quantum systems, showing that their quantum-mechanical probability density is essentially given by the Rakhmanov density of the involved orthogonal polynomials. Then, we quantify the spread of this mathematical function all over the orthogonality interval by means of various complementary (but qualitatively different) measures: the Shannon, Renyi and Fisher information-theoretic lengths which have been recently introduced. These spreading measures and other related ones are not only important by their own, but also they are closely connected with physical quantities of the quantum sytems. The calculation of these mathematical lengths will be shown by use of the known algebraic properties (particularly, the linearization relations) of the orthogonal polynomials and the multivariate Bell polynomials.

Keywords: General theory of orthogonal functions and polynomials, Measures of information, entropy

Mathematics Subject Classification 2000: 42C05, 94A17

Departamento de Física Moderna e
Instituto “Carlos I” de Física Teórica y Computacional
Facultad de Ciencias, Universidad de Granada.
dehesa@ugr.es

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

Los teoremas de Sturm como herramienta numérica para la solución de ecuaciones no lineales

Javier Segura Sala

Los teoremas de separación y comparación de Sturm proporcionan información sobre propiedades de entrelazado y separación de ceros de soluciones de EDOs lineales y homogéneas de segundo orden. Además de repasar algunos resultados recientes de este tipo, se mostrará como estos teoremas son una poderosa herramienta numérica que permite la construcción de métodos de cálculo de ceros de soluciones de EDOs. Tales métodos tienen la rara propiedad de ser muy rápidos (con orden de convergencia igual a 4) y a la vez globalmente convergentes. Esto permite desarrollar algoritmos muy eficientes para calcular reglas de cuadratura gaussiana con gran precisión, así como para evaluar los ceros y los extremos de un gran número de funciones especiales.

Keywords: Special functions, Numerical analysis of ODE

Mathematics Subject Classification 2000: 33C47, 65Lxx

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria.
segurajj@unican.es

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

Polinomios ortogonales matriciales y caminos aleatorios cuánticos

Luis Velázquez Campoy

Desde su origen a principios de los años 90 los caminos aleatorios cuánticos o "Quantum Random Walks" (QRW) se han convertido en una candente línea de investigación. El principal motivo es que constituyen la implementación dinámica más sencilla de los sistemas cuánticos, lo que los convierte en un laboratorio ideal para profundizar en las peculiaridades de la evolución cuántica, bajo el convencimiento de que estas peculiaridades no dependen de la complejidad del sistema sino simplemente de su carácter cuántico. En particular, uno de los descubrimientos más llamativos y prometedores derivados del estudio de QRW es el hecho de que los procesos cuánticos pueden evolucionar con una velocidad de difusión mucho mayor que los procesos clásicos.

Su simplicidad ha convertido además a los QRW en los ingredientes básicos para la construcción de algoritmos cuánticos de computación. Estos pretenden aprovechar la difusión extraordinariamente rápida de ciertos procesos cuánticos para la creación de algoritmos superveloces que alcancen sus objetivos en mucho menor tiempo que los algoritmos clásicos. Asimismo, la excepcional eficiencia que pueden presentar los procesos cuánticos está detrás de una de las más novedosas y sugerentes aplicaciones de los QRW, en este caso a los sistemas biológicos: desde 2007 se han acumulado fuertes indicios de que el extremo rendimiento energético de los procesos de fotosíntesis, difícilmente explicable por métodos clásicos, tiene su origen en los QRW que describen los procesos de transmisión de energía subyacentes.

El éxito de los QRW se basa en que las diferencias cualitativas entre procesos aleatorios clásicos y cuánticos emergen de una forma clara en la implementación más elemental de ambos: los "Random Walks" clásicos y cuánticos, que surgen tras una discretización de la evolución aleatoria clásica o la evolución cuántica respectivamente. Algunos de los métodos tradicionalmente utilizados para el estudio de "Random Walks" clásicos, como el contaje de caminos o la transformada de Fourier, han sido trasladados con éxito al caso cuántico y, de hecho, constituyen las técnicas habituales de análisis. Sin embargo estas técnicas presentan dificultades cuando se pretende ir más allá de modelos con invariancia traslacional.

En el caso de "Random Walks" clásicos en una dimensión existe una opción que permite abordar situaciones más complejas: la utilización de polinomios ortogonales matriciales en la recta real. Bajo ciertas hipótesis bastante generales, a cada "Random Walk" clásico le corresponde una tal sucesión de polinomios ortogonales. Lo interesante es que algunas propiedades probabilísticas del sistema, especialmente las de carácter asintótico, quedan codificadas de forma especialmente simple en términos de objetos típicos de la teoría de polinomios ortogonales, como la medida de ortogonalidad o su transformada de Stieltjes. La matriz de Jacobi asociada a la relación de recurrencia a 3 términos de los polinomios ortogonales juega un relevante papel en este contexto ya que resulta ser esencialmente la matriz de transición del "Random Walk".

Aunque la utilización de polinomios ortogonales para el estudio de "Random Walks" clásicos se remonta a mediados del siglo pasado, por el contrario el análogo de este método para QRW, objetivo de esta charla, data de 2010. En el contexto cuántico los polinomios ortogonales en la recta real son sustituidos por sus homólogos de Laurent en la circunferencia unidad, mientras que el papel de las matrices de Jacobi han de jugarlo las matrices CMV que reflejan la recurrencia de dichos polinomios de Laurent. De forma similar al caso clásico, las características asintóticas de un QRW quedan codificadas en objetos tales como la medida de ortogonalidad o su función de Carathéodory. La eficacia de la representación polinómica de QRW queda patente al observar como permite identificar de forma eficaz propiedades tales como recurrencia o localización, incluso en sistemas sin invariancia traslacional.

La teoría de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad no solo actúa como una técnica eficiente de cálculo, sino que además proporciona una guía en la investigación de modelos de interés en QRW: la búsqueda de un modelo con un determinado comportamiento asintótico nos dirige hacia medidas de ortogonalidad con ciertas características, y los coeficientes de Verblunsky de los correspondientes polinomios ortogonales conforman la matriz CMV que actúa como matriz de transición que define el QRW. Es de esperar que el avance en el estudio de la conexión entre QRW y la teoría de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad permita en el futuro anticipar nuevos fenómenos cuánticos de interés.

Trabajo en colaboración con M. J. Cantero, L. Moral y F. A. Grünbaum (ver Comm. Pure Appl. Math., Vol. LXIII, 0464-0507 (2010) y arXiv:0901.2244v1 [quant-ph]).

Keywords: General theory of orthogonal functions and polynomials, matrix orthogonal polynomials

Mathematics Subject Classification 2000: 42C05

Departamento de Matemática Aplicada
C.P.S. Universidad de Zaragoza.
velazque@unizar.es

Sesión 15: Perspectivas y Aplicaciones de la Teoría de Funciones Especiales y Polinomios Ortogonales

Días 1, 2 y 3 de febrero

Charlas cortas (15min.)

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

Perturbations of moment matrices

Kenier Castillo Rodríguez

In this talk I will present some perturbations that preserve the basic structure of moments matrices associated with positive Borel measures supported on the real line and the unit circle (Hankel and Hermitian Toeplitz matrices, respectively). That is, perturbations on the anti-diagonals and sub-diagonals of such matrices. I will use the relationship between these structures and the families of polynomials orthogonal with respect to such measures (or their corresponding positive definite functional) to define the functional response to the perturbation, analyze the regularity conditions for the new linear functional, and give the explicit relationship between the corresponding families of orthogonal polynomials.

Keywords: Hankel matrices, Toeplitz matrices, orthogonal polynomials

Mathematics Subject Classification 2000: 42C05, 15A23, 47B35

Departamento de Matemáticas,
Universidad Carlos III de Madrid, Leganés
kcastill@math.uc3m.es

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

Some examples of matrix-valued orthogonal functions having a differential and an integral operator as eigenfunctions

Manuel Domínguez de la Iglesia

It is very well known that the Hermite or wave functions are simultaneously eigenfunctions of the Schrödinger operator with quadratic potential and the Fourier transform. In this talk we will give two examples of matrix-valued functions which are simultaneously eigenfunctions of a second-order differential operator of Schrödinger type with matrix-valued quadratic potential and an integral operator of Fourier type.

Keywords: Matrix-valued Schrödinger operators, matrix-valued orthogonal polynomials, Fourier analysis

Mathematics Subject Classification 2000: 42C05, 34L40

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Sevilla, Sevilla
`mdi29@us.es`

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Ávila, Febrero 1–5, 2011

New Liouville-Neumann algorithms for the approximation of initial value problems with examples in special functions

Ester Pérez Sinusía

The factorization of a linear differential equation is a theoretical tool used to solve the equation exactly. The Liouville-Neumann algorithm is a practical tool that approximates a solution of the equation, and it is based on a certain integral equation equivalent to the differential equation. In this work, we use the ideas of the factorization to find families of integral equations equivalent to the differential equation. From those families of integral equations we propose new Liouville-Neumann algorithms that approximate the solutions of the equation. The method is valid for either, regular equations and regular singular equations. We discuss the convergence properties of the algorithms and illustrate them with examples of special functions. We also show that those families of integral equations are parametrized by certain functions: a special choice of those functions corresponds with a factorization of the differential equation while other choices of those functions may be considered as quasi-factorizations of the differential equation. This is a joint work with Esther García, Lance Littlejohn, and José L. López.

Keywords: Factorization of differential equations, Liouville-Neuman expansions, Approximation of special functions

Mathematics Subject Classification 2000: 34A05, 33C10

Departamento de Matemática Aplicada,
IUMA, Universidad de Zaragoza, Zaragoza
`ester.perez@unizar.es`