Polinomios ortogonales

Renato Álvarez Nodarse y Antonio J. Duran

26 de noviembre de 2000

Abstract

El objetivo de este trabajo es presentar una breve introdución a los polinomios ortogonales. En particular, discutiremos brevemente la evolución de la teoría de dichos objetos matemáticos desde su aparición a finales del siglo XVIII hasta la fecha, incluyendo algunas de sus principales aplicaciones, conexión con la teoría de aproximación, problema de momentos, física cuántica, etc. Finalmente discutiremos brevemente algunas de las principales tendencias actuales incluyendo los temas en los que estamos trabajamos en el marco de la unidad especializada de la Junta de Andalucía –formada por los grupos FQM 207, FQM 262, FQM 229– y otros proyectos nacionales y europeos.

Palabras clave: POLINOMIOS ORTOGONALES, POLINOMIOS MATRICIALES, $q-$POLINOMIOS.
AMS SCI 2000: 42C05, 33C45, 33D45

1 Introducción

En este breve trabajo pretendemos dar una visión de lo que han sido y aún siguen siendo los polinomios ortogonales, entes matemáticos de gran sencillez y con un sinnúmero de aplicaciones tanto en Matemáticas (ecuaciones diferenciales, combinatoria, teoría de números, álgebra computacional, funciones Theta, aproximación racional, teoría de grupos, etc) como en Física o Ingeniería (física cuántica, ecuaciones de Schrödinger, entropías de Shannon, osciladores, compresión de la información, etc). De entre las múltiples formas que existen para definir una familia de polinomios ortogonales optaremos por una de las más sencillas.

Definición 1 *Dada una sucesión de polinomios $(P_n)_n$ con grado $P_n = n$, diremos que $(P_n)_n$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a una medida μ si se cumple que: $\int_{\mathbb{R}} P_n(x)P_m(x)d\mu(x) = \delta_{n,m}d_n$, n, $m = 0, 1, 2, \ldots$, donde $\delta_{n,m}$ es el símbolo de Kronecker ($\delta_{n,m} = 1$ si $n = m$ y 0 si $n \neq m$).*

Cuando la medida μ es positiva entonces, $d_n > 0$ para todo n, en cuyo caso se dice que la familia de polinomios es definida positiva. Ejemplos de dichas familias son los conocidos polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite que introduciremos en el próximo apartado. Un caso de especial interés es cuando la medida es absolutamente continua, es decir cuando existe una función continua ρ (no necesariamente positiva) tal que $d\mu(x) = \rho(x)dx$. En este caso la función ρ se denomina función peso.

2 Breve introducción histórica

La aparición de la primera familia de polinomios ortogonales se remonta al finales del siglo XVIII en relación con el estudio de las trayectorias planetarias. Concretamente intentando resolver el problema de la atracción de un cuerpo por una esfera Adrien–Marie Legendre (1752–1833) introdujo en 1782 los polinomios hoy conocidos como polinomios de Legendre. En su artículo *Sur l'attraction des sphéroïdes* (Mèm. des sav. étrangers, **10**, 411-434) de 1785 (aunque escrito en 1782), Legendre encontró que el integrando de la ecuación para calcular la componente radial de la fuerza de atracción se podía expresar mediante una serie de potencias de r'/r de la forma: $r^{-2}\left\{1+3P_2(\cos\gamma)(r'/r)^2\ +5P_4(\cos\gamma)(r'/r)^4+\dots\right\}$. Las funciones $P_2, P_4, \dots$ son funciones racionales enteras de $\cos\gamma$, que hoy se conocen como polinomios de Legendre. En dicho trabajo Legendre obtuvo una fórmula general para los polinomios P_n de grado arbitrario. En un segundo artículo escrito en 1784 (publicado en 1787), Legendre dedujo algunas de las propiedades de las funciones $P_{2n}(x)$ como la ortogonalidad:

$$\int_0^1 P_{2n}(x)P_{2m}(x)dx = \frac{1}{4m+1}\delta_{n,m}.$$

Además, Legendre demostró que estos polinomios satisfacían una ecuación diferencial lineal: $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$. En este punto cabe destacar también los trabajos de Pierre–Simon Laplace (1749–1827) quien en 1782 introdujo las funciones esféricas (directamente relacionadas con los polinomios de Legendre) y demostró varios resultados relativos a ellas. Otro resultado importante relativo a los polinomios de Legendre es el de Olinde Rodrigues (1794–1851) quien demostró en 1816 que los P_n podían representarse mediante la hoy denominada *fórmula de Rodrigues*: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$. Esta fórmula luego se generalizó a todas las familias clásicas.

La siguiente familia en orden de aparición fue la de los polinomios de Hermite H_n llamados así en honor a Charles Hermite (1822–1901) quien los estudió junto con el caso de varias variables en su ensayo *Sur un nouveau développement en série des fonctions* (C. R. Acad. Sci. Paris, I) en 1864 (ver Oeuvres, Gauthier-Villars, 1908, Tome II, 293–308) aunque el primero en considerarlos fue Laplace en 1810 en su *Mécanique céleste* quien los utilizó en problemas de teoría de las probabilidades. Luego Pafnuti Lvovich Chebyshev (1821–1894) realizó un estudio detallado de los mismos en 1859 (*Sur le développement des fonctions á une seule varieble*, Oeuvres, Tom I, 501-508, Chelsea Pub. Co.). En este caso la ortogonalidad se expresa respecto a la función e^{-x^2} soportada en la recta real.

La próxima familia fue la de los polinomios de Laguerre L_n^α que deben su nombre a Edmond Nicolás Laguerre (1834–1886). Estos polinomios ($\alpha = 0$) ya eran parcialmente conocidos por Niels Henrik Abel (1802–1829) y Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) aunque es nuevamente Chebyshev quien realizó un estudio detallado de los mismos en 1859 en el mismo trabajo antes citado que continuó el matemático ruso Konstantin Aleksandrovich Posse (1847–1928) en 1873. El caso general para $\alpha > -1$ fue estudiado por Yulian Vasilevich Sojotkin (1842–1927) en 1873, y no es hasta 1879 que Laguerre los introduce (caso particular $\alpha = 0$) cuando estudiaba la integral $\int_x^\infty e^{-t}t^{-1}dt$, mediante su desarrollo en fracciones continuas. En su memoria *Sur l'intégrale* $\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$ (Bull. Soc. Math. France, VII, 1879), (ver Oevres, Gauthier-Villars, 1898, 428–437) Laguerre prueba, entre otras cosas, que los polinomios $L_n(x)$ son las soluciones polinómicas de la ecuación diferencial $xy'' + (x+1)y' -$

$ny = 0$, $n \geq 0$, así como la propiedad de ortogonalidad de dichos polinomios:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = (n!)^2 \delta_{n,m}.$$

Años más tarde en 1880 otro estudiante de Chebyshev, Nikolai Yakovlevich Sonin (1849–1915) continúa el estudio comenzado por Sojotkin sobre los polinomios con $\alpha > -1$. Esta es la posible razón por la cual en algunos sitios a los polinomios $L_n^{\alpha}(x)$ se les denomina polinomios de Laguerre–Sonin.

Como hemos visto al inicio de esta sección, determinados problemas físicos están estrechamente ligados con la teoría de polinomios ortogonales. La forma más común de modelizar estos problemas es a través de ecuaciones diferenciales. En la mayoría de los casos las ecuaciones diferenciales obtenidas no son resolubles explícitamente y es preciso recurrir a soluciones en series infinitas, o sea, las funciones especiales. El estudio de las funciones especiales que surgen como soluciones en serie de ecuaciones diferenciales ordinarias fue desarrollado por Carl Friederich Gauss (1777–1855) en su famoso ensayo *Disquisitiones generales circa seriem infinitam ...,* (Werke, II (1876), 207-229 y 123-162) sobre funciones hipergeométricas de 1813. Gauss introdujo la ecuación diferencial: $x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$, cuya solución es

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta; \gamma | x) \equiv {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right) = 1 + \tfrac{\alpha\, \beta}{1\, \gamma} x + \tfrac{\alpha(\alpha+1)\, \beta(\beta+1)}{2\, \gamma(\gamma+1)} x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\, \beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\, \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \cdots .$$

Fue precisamente utilizando la función hipergeométrica como fue introducida la siguiente familia clásica de polinomios ortogonales: los polinomios de Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}$ por Karl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) en su artículo *Untersunshungen über die Diffentialgleichung de hypergeometrischen Reihe* (J. Reine Angew. Math. **56** 149–165), publicado póstumamente en 1859. Estos polinomios, que generalizan a los polinomios de Legendre (de hecho $P_n = P_n^{0,0}$), se expresan a través de la función hipergeométrica de Gauss mediante la fórmula:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!} {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right),$$

siendo Γ la función Gamma de Euler y son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ con respecto a la función peso $\rho(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ (distribución Beta). Es fácil comprobar que tanto los polinomios de Laguerre como los de Hermite también se pueden escribir como una función hipergeométrica, aunque no de Gauss, sino de las funciones hipergeométricas generalizadas ${}_p\mathrm{F}_q$ (ver e.g. [29]).

Además de las familias anteriores, conocidas como familias clásicas continuas (ya que satisfacen una ecuación diferencial), existen otras denominadas comúnmente familias "discretas" ya que o su ortogonalidad viene dada mediante sumas, o bien, son solución de una ecuación en diferencias. El caso más sencillo lo constituyen los polinomios de Chebyshev discretos introducidos por Chebyshev en 1858 en un breve trabajo titulado *Sur une nouvelle série,* (Oeuvres, Tom I, 381–384, Chelsea Pub. Co.) y que luego amplió en su ensayo *Sur l'interpolation des valeurs équidistantes* (Oeuvres, Tom II, 219–242, Chelsea Pub. Co.) de 1875 cuyo principal objetivo era construir buenas tablas de fuego para la artillería rusa. Siguiendo las ideas expuestas por Chebyshev, M. P. Kravchuk en 1929 introdujo una nueva familia: los polinomios de Kravchuk. La idea es la siguiente: interpolar una función cuando a los valores dados de la función se les asignan unos *pesos* de acuerdo con cierta ley (densidad ρ) de probabilidad. En el caso $\rho(x) = 1$ (distribución uniforme), este problema conduce a los polinomios discretos de Chebyshev, mientras que el caso $\rho(x) = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-x)}{1\cdot 2\cdots x} p^x q^{n-1-x}$,

$x = 1, 2, \ldots, N-1$ (distribución binomial) conduce a los polinomios de Kravchuk. Otros casos corresponden a las distribuciones de Poisson (polinomios de Charlier), de Pascal (polinomios de Meixner) y de Polyá o hipergeométrica (polinomios de Hahn, de los cuales los de Chebyshev son un caso particular). Estas cuatro familias constituyen lo que hoy conocemos como polinomios clásicos discretos. Una magnífica introducción a los polinomios clásicos (tanto continuos como discretos) y sus aplicaciones es [29].

Regresemos nuevamente a los trabajos pioneros de Gauss. En su *Methodus nova integrali um valores per approximationen inveniendi*, (Werke III, 163–196) Gauss demuestra una fórmula de cuadraturas para el cálculo aproximado (y eficiente) de integrales, constituyendo ésta una de las aplicaciones más importantes de los polinomios ortogonales. En concreto, Gauss "recuperó" los ceros de los polinomios de Legendre cuando buscaba donde deberían estar los del polinomio de interpolación (de Lagrange) para obtener la mayor precisión posible al integrar entre 0 y 1, aunque no utilizó la ortogonalidad de los polinomios (hecho que probablemente desconocía) sino la función hipergeométrica ${}_2F_1$. La construcción de la fórmula de cuadraturas tal y como la conocemos hoy usando la ortogonalidad se debe a Jacobi (*Uever Gauss' neve Methode die werthe der Integrale näherungsweise zu finden*, Werke, **6** 6-11).

3 Teoría general. Stieltjes y Chebyshev.

Como hemos visto en la sección anterior los polinomios ortogonales están estrechamente relacionados con las ecuaciones diferenciales y la teoría de aproximación (en particular por su relación con las fracciones continuas). Esta conexión, y en especial la segunda, conducen al nacimiento de la teoría general sobre polinomios ortogonales.

Veamos, en primer lugar, la relación entre los polinomios ortogonales y la teoría de las fracciones continuas. Aquí cabe destacar los trabajos de Thomas Jan Stieltjes Jr. (1856–1894), quien consideró las fracciones continuas:

$$\cfrac{1}{c_1 x + \cfrac{1}{c_2 x + \cfrac{1}{c_3 x + \cfrac{1}{c_4 x + \ddots}}}}, \quad \text{y} \quad \cfrac{a_0^2}{x - b_0 - \cfrac{a_1^2}{x - b_1 - \cfrac{a_2^2}{x - b_2 - \cfrac{a_3^2}{x - b_3 - \ddots}}}},$$

obteniéndose la segunda (o S-fracción) a partir de la primera (J-fracción) al hacer el cambio $a_0^2 = 1/c_1$, $b_0 = -1/(c_1 c_2)$ y $a_n^2 = 1/(c_{2n-1} c_{2n}^2 c_{2n+1})$, $b_n = -1/(c_{2n} c_{2n+1}) - 1/(c_{2n+1} c_{2n+2})$, $n = 1, 2, \ldots$. Si suponemos que $a_k = 0$, para todo $k \geq n+1$ entonces tendremos una función racional $f_n(x)$ de la forma:

$$f_n(x) = \frac{1}{a_1} \frac{p_{n-1}^{(1)}(x)}{p_n(x)} ,$$

donde los polinomios denominadores $p_n(x)$ y los numeradores $p_{n-1}^{(1)}(x)$ son soluciones de la relación de recurrencia a tres términos:

$$x r_n(x) = a_{n+1} r_{n+1}(x) + b_n r_n(x) + a_n r_{n-1}(x), \quad n \geq 0 ,$$

con las condiciones iniciales $r_{-1}(x) = 0$, $r_0(x) = 1$ y $r_{-1}(x) = 1$, $r_0(x) = 0$, respectivamente.

Stieltjes en su famoso ensayo *Recherches sur les fractions continues* (Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, **8** (1894) 1-122, **9** (1895) 1-47), publicado pústumamente en dos partes en 1894 y 1895, desarrolló la teoría general de las S-fracciones cuando $c_k > 0$ para todo k. Uno de los aspectos fundamentales de dicha teoría es que los denominadores $p_n(x)$ formaban una sucesión de polinomios ortonormales (una familia se dice ortonormal si las constantes d_n en la definición 1 son iguales a 1 para todo n) con respecto a una medida positiva μ soportada en $[0, \infty)$. Stieltjes demostró que tales polinomios tenían ceros con unas propiedades muy interesantes: todos eran reales y simples, y los ceros de p_n entrelazaban con los ceros de $p_{n-1}^{(1)}$ y con los de p_{n-1}. A partir de la relación de recurrencia y para el caso de las J-fracciones, Stieltjes demostró que existía un funcional $\mathcal{L}$ lineal y positivo tal que, $\mathcal{L}[p_n p_m] = 0$ para $n \neq m$, lo cual se puede interpretar como una versión preliminar del famoso teorema de Favard en 1935 (atribuido a Favard aunque demostrado también por O. Perron (1929), A. Wintner (1929) y M. H. Stone (1932), J. Sherman (1935) y I. P. Natanson (1935) indistintamente) que constituye una de las principales caracterizaciones de los polinomios ortogonales y que asegura lo siguiente:

Teorema 2 *Supongamos que una sucesión de polinomios $(p_n)_n$ satisface una relación de recurrencia a tres términos de la forma:*

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \ ,$$

con $a_{k+1} > 0$ y $b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ y las condiciones iniciales $p_{-1}(x) = 0$ y $p_0(x) = 1$. Entonces, dichos polinomios p_n son ortonormales para cierta medida positiva sobre la recta real, o sea,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)p_m(x)d\mu(x) = \delta_{n,m}.$$

El *Recherches* de Stieltjes no sólo constituyó un trabajo esencial en la teoría de fracciones continuas sino que representó el primer trabajo dedicado a la naciente teoría general de polinomios ortogonales. En él, además, introduce Stieltjes lo que se conoce actualmente como problema de momentos (dada una sucesión $(\mu_n)_n$, encontrar una medida $\mu(x)$ tal que $\mu_k = \int x^n d\mu(x)$) así como una extensión de la integral de Riemann (la integral de Riemann-Stieltjes) que le permitió un tratamiento más general de la ortogonalidad.

Junto a los trabajos de Stieltjes debemos destacar también los del matemático ruso Pafnuti Lvovich Chebyshev. Chebyshev estudió un ingente número de problemas relacionados con los polinomios ortogonales, llegando a ellos al tratar de resolver problemas aplicados. Por ejemplo, sus investigaciones en 1854 sobre algunos mecanismos que transformaban la energía de rotación en energía de traslación le llevaron al problema de mejor aproximación. Así, en su memoria *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* (Oeuvres, Tomo I, Chelsea Pub. Co. 111-145) Chebyshev planteó el problema de encontrar la mejor aproximación polinómica uniforme de una función continua f, o sea, dada la función continua f definida en cierto intervalo (a, b), encontrar dentro del conjunto $\mathbb{P}_n$ de todos los polinomios de grado a lo sumo n el polinomio p_n de grado n tal que el máximo de $|f(x) - p_n(x)|$ sea mínimo en dicho intervalo. De esa manera introdujo los hoy conocidos *polinomios de Chebyshev de primera especie* $T_n(x)$ que son la solución al problema extremal de encontrar los polinomios mónicos $p_n(x) = x^n + \cdots$ tales que $\max |p_n(x)|$ en el intervalo $[-1, 1]$ sea mínimo, encontrando la solución:

$$\min_{p_n \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [-1,1]} |p_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Estos polinomios forman un sistema ortogonal con respecto a la función peso $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ y coinciden con los polinomios de Jacobi $P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$. Chebyshev también estudió el problema de momentos y fórmulas de cuadratura e introdujo la primera familia de polinomios *discretos*: los ya mencionados polinomios discretos de Chebyshev.

Por estas razones tanto a Stieltjes como a Chebyshev se les consideran los padres de la teoría de polinomios ortogonales que estaba por llegar a principios del siglo XX, quedando consolidada en 1939 con la aparición de la monografía *Orthogonal Polynomials* de Gabor Szegő [31]. En esta excelente monografía, aparte de presentar una teoría general sobre polinomios ortogonales, se incluyen gran cantidad de resultados sobre las familias clásicas y se inicia la teoría de Szegő de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad.

4 Aplicaciones

La ecuación diferencial que las familias clásicas (y otras) satisfacen da pie a una de las principales aplicaciones de los polinomios ortogonales: su aparición para describir los más importantes modelos cuánticos tanto relativistas como no relativistas. Por citar algunos mencionaremos el oscilador cuántico (polinomios de Hermite o Laguerre y Jacobi), el átomo de hidrógeno y la interación entre los piones y el núcleo atómico (polinomios de Laguerre y Jacobi), etc.

Como ejemplo veamos las ecuaciones estacionarias de Schrödinger para el átomo de hidrógeno (caso no relativista) y de Klein-Gordon para un pión (caso relativista) en un potencial de Coulomb, i.e.,

$$\Delta\psi_S + 2\left(E_S + \frac{1}{r}\right)\psi_S = 0, \qquad \Delta\psi_{KG} + \left[\left(E_{KG} + \frac{\mu}{r}\right)^2 - 1\right]\psi_{KG} = 0,$$

respectivamente, donde Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^3$, E representa la energía del sistema y ψ es la función de onda que caracteriza por completo al sistema. Utilizando que el potencial es central, y por tanto tiene simetría esférica, podemos separar variables en coordenadas esféricas obteniendo las siguientes soluciones

$$\psi_S(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{n!}{(n+l+1)^2(n+2l+1)!}}e^{-\frac{2r}{n+l+1}}\left(\frac{2r}{n+l+1}\right)^{l+1} L_n^{2l+1}\left(\frac{2r}{n+l+1}\right) Y_{l,m}(\theta,\phi),$$

para la primera, y para la segunda

$$\psi_{KG} = \sqrt{\frac{an!}{(n+\nu+1)(n+2\nu+1)!}}e^{-2ar}\,(2ar)^{\nu+1}\,L_n^{2\nu+1}\,(2ar)\,Y_{l,m}(\theta,\phi),$$

con $\nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 - \mu^2}$ y $a = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}\right)^2}$. En ambos casos $n = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, $m = -l, -l+1, \ldots, l$ y $Y_{l,m}$ representa a los armónicos esféricos que son proporcionales a los polinomios de Jacobi $P_{l-m}^{m,m}(\cos\theta)$. Finalmente, para ambos sistemas se obtienen los siguientes valores de la energía E:

$$E_S = -\frac{1}{2(n+l+1)^2}, \qquad E_{KG} = 1 - \frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}.$$

En ambos casos se tiene un espectro discreto de energía que concuerda muy bien con los hechos experimentales. Destaquemos que en el caso del átomo de hidrógeno estos valores explicaron perfectamente la llamada serie de Balmer, físico suizo que en 1885 descubrió que las frecuencias ω de las líneas del espectro de rayas del átomo de hidrógeno se expresaba por la formula $\omega = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2}\right)$, $k = 3, 4, \ldots$ y R cierta constante. Precisamente los intentos de explicar este fenómeno dieron un impulso definitivo a la aparición de la teoría cuántica.

Otra aplicación importante de los polinomios ortogonales relacionada con lo anterior es en el cálculo de las entropías de sistemas cuánticos, en particular para los osciladores y átomos de hidrógeno. Esta cantidad viene definida por integrales de la forma

$$E_\beta(p_n) = -\int x^\beta p_n^2(x) \ln\left(p_n^2(x)\right) \rho(x) dx \ ,$$

donde p_n son polinomios ortogonales respecto a la función peso ρ ($d\mu(x) = \rho(x)dx$), y $\beta \in \mathbb{R}$. En general, el valor para la entropía no se conoce para casi ninguna familia de polinomios (exceptuando los polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie [10, 33]) y muchos de los resultados son resultados asintóticos [5]. Gran parte de esta teoría está siendo desarrollada por J. S. Dehesa y sus colaboradores (para más detalles consultar [11]).

5 Caracterizaciones de los polinomios clásicos.

Pasemos ahora a describir uno de los problemas más importantes en la teoría de los polinomios ortogonales: los teoremas que nos indican cuáles son las principales propiedades que los caracterizan. Una caracterización es, como ya vimos, el Teorema de Favard. Veamos aquí las correspondientes a los polinomios clásicos.

Comenzaremos por la caracterización obtenida por S. Bochner en 1929 quien probó que los únicos polinomios ortogonales que satisfacían una ecuación diferencial del tipo:

$$\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda_n y(x) = 0 \,, \tag{1}$$

donde σ y τ son polinomios de grado a lo sumo 2 y exactamente 1, respectivamente, y λ_n es una constante, eran los polinomios clásicos, o sea, los polinomios de Jacobi ($\sigma(x) = (1 - x^2)$), Laguerre ($\sigma(x) = x$) y Hermite ($\sigma(x) = 1$) y aparentemente una nueva familia cuando $\sigma(x) = x^2$. Estos últimos, denominados polinomios de Bessel, a diferencia de las tres familias anteriores no corresponden a un caso definido positivo, es decir la medida de ortogonalidad no es positiva. Aunque estos polinomios habían sido considerados por muchos matemáticos fueron H. L. Krall y O. Frink quienes lo presentaron formalmente en 1949 en su artículo *A new class of orthogonal polynomials* (Trans. Amer. Math. Soc. **65**) y les dieron el nombre por su relación con las funciones de Bessel. En ese magnífico trabajo estudiaron un sinnúmero de propiedades y probaron la ortogonalidad respecto a una función peso en la circunferencia unidad. Sin embargo no encontraron ninguna función peso (necesariamente signada) sobre la recta real. El problema, uno de los más importantes de la teoría, fue finalmente resuelto por el segundo firmante de este artículo en 1990 en [12], donde se desarrolla un método general para encontrar explícitamente funciones muy regulares con momentos dados; como aplicación encontró las primeras medidas signadas sobre $\mathbb{R}$ y $(0, +\infty)$ respecto a las cuales los polinomios de Bessel eran ortogonales.

Otra caracterización (la más antigua) se debe a Sonin quien, en 1887, probó que los únicos polinomios ortogonales que satisfacían la propiedad de que sus derivadas P_n' también eran ortogonales eran los polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite. Esta propiedad fue redescubierta por W. Hahn en 1935 quien también recuperó los polinomios de Bessel no considerados por Sonin. Dos años más tarde, el mismo Hahn probó un resultado más general que contenía al anterior: si la sucesión de polinomios ortogonales $(P_n)_n$ era tal que la sucesión de sus $k-$ésimas derivadas $(P_n^{(k)})_n$, para cierto $k \in \mathbb{N}$, también era ortogonal entonces $(P_n)_n$ era alguna de las sucesiones de polinomios ortogonales clásicos.

La tercera caracterización fue propuesta por F. Tricomi en 1955 quien conjeturó y parcialmente demostró que sólo los polinomios ortogonales clásicos se podían expresar en términos de una fórmula tipo Rodrigues: $P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\rho(x)\sigma^n(x)]$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, donde ρ es una función no negativa en cierto intervalo y σ es un polinomio independiente de n. La demostración rigurosa de este resultado fue dada por C. W. Cryer en 1969 aunque ya E. H. Hildebrandt en 1931 tenía varios resultados en esa dirección. Otra caracterización consiste en que los únicos polinomios ortogonales respecto a una función peso ρ solución de la ecuación diferencial de Pearson: $[\rho(x)\sigma(x)]' = \tau(x)\rho(x)$, con grados de σ y τ, menores o iguales que dos y exactamente uno, respectivamente. Precisamente esta caracterización traducida al espacio dual de los funcionales permitió a F. Marcellán y sus colaboradores obtener una forma unificada de probar todas las caracterizaciones conocidas, asi como varias completamente nuevas, no sólo para los polinomios clásicos, sino para el caso "discreto" (Hahn, Meixner, etc.).

Una extensión de los polinomios clásicos se debe a H.L. Krall quien en 1938 estudió el problema de la determinación de soluciones polinómicas de una ecuación diferencial de orden $2n$ ($n = 1$ conduce a los polinomios clásicos como ya vimos), encontrando condiciones necesarias y suficientes. En 1940 clasificó todas las ecuaciones de cuarto orden con soluciones polinómicas recuperando las familias clásicas y tres nuevas familias de polinomios. En 1978, su hijo, A. M. Krall estudió estas nuevas familias (no clásicas) y las denominó polinomios tipo-Legendre, tipo-Laguerre y tipo-Jacobi. Es importante destacar que estos nuevos polinomios eran ortogonales respecto a medidas clásicas (funciones peso) que contenían deltas de Dirac, a saber: $\rho(x) = e^{-x}\, dx + M\delta(x)$ soportada en $[0, \infty)$ para los polinomios tipo-Laguerre, $\frac{\alpha}{2}\, dx + \frac{\delta(x-1)}{2} + \frac{\delta(x+1)}{2}$ en $[-1, 1]$ para los tipo-Legendre y $(1-x)^\alpha\, dx + M\delta(x)$ en $[0, 1]$ para los tipo-Jacobi. La generalización de este problema al caso de los polinomios "discretos" desembocó en una conjetura propuesta por R. Askey en 1990 y resuelta por H. Bavinck and H. van Haeringen en 1994 e independientemente por R. Alvarez-Nodarse y F. Marcellán en un trabajo aparecido un año más tarde [2]. Un estudio más general de este tipo de polinomios así como las relaciones límites entre los distintos polinomios de tipo Krall (tanto continuos como discretos) fue hecho en [3]. Otra generalización de los polinomios ortogonales clásicos son los polinomios ortogonales respecto a un producto escalar de tipo Sobolev introducidos por D. C. Lewis en 1947.

En otra dirección, W. Hahn en 1949 propuso el siguiente problema: Sea L el operador lineal $\mathrm{L}f(x) = \frac{f(qx+w)-f(x)}{(q-1)x+w}$: Encontrar todas las sucesiones de polinomios ortogonales tales que:

1. $(\mathrm{L}P_n(x))_n$ sea también una sucesión de polinomios ortogonales;

2. $(P_n(x))_n$ satisfaga una ecuación de la forma: $\sigma(x)\mathrm{L}^2P_n(x) + \tau(x)\mathrm{L}P_n(x) + \lambda P_n(x) = 0$, donde grado $\sigma \leq 2$ y grado $\tau = 1$;

3. Exista un polinomio X_0, $X_{i+1}(x) = X_i(qx+w)$ y una función ρ independientes de n tal que $\rho(x)P_n(x) = (\mathrm{L})^n[X_0(x)\cdot X_1(x)\cdots X_n(x)\rho(x)]$;

4. Los momentos μ_n asociados a la sucesión $(P_n)_n$, definidos por: $\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\mu(x)$, satisfacen una relación de recurrencia de la forma: $\mu_n = \frac{a+bq^n}{c+dq^n}\mu_{n-1}, \quad ad - bc \neq 0$.

En ese mismo trabajo Hahn da la respuesta para el funcional $\mathrm{L} = \Theta_q$ correspondiente al caso $q \in (0,1)$ y $w = 0$. El caso $q = 1$ y $w = 1$ conduce directamente a los polinomios discretos antes mencionados y fue resuelto por P. Lesky en 1962. El caso $w = 0$ y $q \to 1$ se transforma en el caso clásico estudiado por el mismo Hahn en 1935-1939. Aunque su artículo de 1949 es obscuro y prácticamente no contiene ninguna demostración, en él Hahn encuentra la familia más general de polinomios que pertenecían a la clase antes mencionada ($w = 0$), que son los hoy conocidos q-polinomios grandes de Jacobi y en particular los $q-$polinomios que llevan su nombre: $q-$polinomios de Hahn y que constituyen una familia finita. Un hecho sorprendente fue que aparte de las tres caracterizaciones anteriores de Hanh no se conocía ninguna otra caracterización de estas familias. Este lapso fue cubierto recientemente por J.C. Medem, R. Alvarez-Nodarse y F. Marcellán [28], donde además se prueban las siguientes:

Teorema 3 *Sea $\mathcal{L}$ un funcional regular y $(P_n)_n$ la sucesión de polinomis ortogonales asociada y sea $q \in \mathbb{C}\backslash\{q : |q| = 1\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{L}$ satisface la ecuación distribucional $\Theta_q(\phi\mathcal{L}) = \psi\mathcal{L}$, con grado($\phi$) ≤ 2 y grado(ψ) $= 1$.

(b) Existen dos polinomios $\phi^{(k)}$ y $\psi^{(k)}$ de grados a más 2 y exactamente 1, respectivamente, y una sucesión de constantes $\widehat{\lambda}_n^{(k)} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $n \geq 1$ $\widehat{\lambda}_0^{(k)} = 0$, tal que $\phi^{(k)}\Theta_q\Theta_{q^{-1}}Q_n^{(k)} + \psi^{(k)}\Theta_{q^{-1}}Q_n^{(k)} = \widehat{\lambda}_n^{(k)}Q_n^{(k)}$ con $Q_n^{(k)} = C_{nk}\Theta_q^k P_{n+k}$ ($C_{n,k}$ es tal que $Q_n^{(k)} = x^n + \cdots$).

(c) Existe dos polinomios ϕ y ϕ^* de grado a lo más 2, y seis sucesiones $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$, $(a_n^\star)_n$, $(b_n^\star)_n$, $(c_n^\star)_n$, $c_n c_n^\star \neq 0$ tales que $\phi\Theta P_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$ y $\phi^*\Theta_{q^{-1}}P_n = a_n^\star P_{n+1} + b_n^\star P_n + c_n^\star P_{n-1}$.

(d) Existen dos sucesiones $(e_n)_{n\geq 0}, (h_n)_{n\geq 0}$ tales que $P_n = Q_n + e_n Q_{n-1} + h_n Q_{n-2}$ con $Q_n = \frac{q-1}{q^{n+1}-1}\Theta_q P_{n+1}$.

Finalmente, mencionaremos que J.C. Medem en 1996 dió otras caracterizaciones para una clase más general: los polinomios $q-$semiclásicos usando en sus demostraciones el $q-$análogo de la teoría de los funcionales lineales que introdujo el francés P. Maroni en los 80 para el caso “continuo”.

6 Polinomios ortogonales, espacios L^2 y funciones enteras.

Otro de los aspectos importantes que conforman la teoría de los polinomios ortogonales, el relacionado con la unicidad de la medida peso, se desarrolló en los años veinte. Stieltjes ya había puesto de manifiesto al final del siglo XIX, no sin cierta sorpresa, que había familias que eran ortogonales respecto a infinitas medidas positivas: el primer ejemplo que mostró es un caso muy especial de los ahora llamados polinomios de Stieltjes-Wigert (caso especial de $q-$polinomios) que son ortogonales en el semieje positivo con respecto a cualquiera de las siguientes funciones: $t^{-\log t}(1+\lambda \mathrm{sen}\,(2\pi \log t))$ cualquiera sea $-1 \leq \lambda \leq 1$, que se tome. Cuando una medida es la única que ortogonaliza a una sucesión de polinomios ortogonales se llama determinada (en efecto, queda determinada por su sucesión de polinomios ortogonales), en otro caso se le llama indeterminada.

El estudio de las medidas indeterminadas dio origen a una bellísima teoría, que conjuga aspectos geométricos, de análisis real y complejo, y fue desarrollada esencialmente durante los años veinte por Nevalinna y M. Riesz. En concreto se encontraron condiciones para la indeterminación, entre las cuales la siguiente es la más conocida: para algún (y entonces para todo) número complejo no real z la sucesión de polinomios ortonormales $(p_n)_n$ verifica $\sum_n |p_n(z)|^2 < \infty$. También se consiguió dar una parametrización de todas las medidas que ortogonalizaban a una sucesión de polinomios ortogonales (Nevanlinna), a partir de cuatro funciones enteras definidas a partir de la sucesión de polinomios (por ejemplo, una de estas funciones enteras se define como $D(z) = \sum_n p_n(0)p_n(z)$). Otro resultado importante de esta teoría establece cuando el espacio lineal de los polinomios es denso en el espacio de funciones de cuadrado integrable. El principal resultado es de M. Riesz y establece que: (1) si la medida μ es determinada entonces los polinomios son automáticamente densos en $L^2(\mu)$, (2) si μ es indeterminada entonces puede haber densidad o no, siendo el criterio para establecer cuando hay densidad el siguiente: para cada número complejo z se considera el conjunto de números complejos $\{\int \frac{d\nu(t)}{t-z} : \nu$ y μ tienen la misma sucesión de polinomios ortogonales$\}$; resulta que este conjunto es un círculo para todo z y precisamente aquellas medidas ν tales que $\int \frac{d\nu(t)}{t-z}$ caiga justo en la circunferencia de este círculo son las que verifican que el espacio lineal de los polinomios es denso en $L^2(\nu)$. Estas medidas forman una familia uniparamétrica dentro de las que tienen la misma familia de polinomios ortonormales y son extremadamente extrañas e inestables. La caracterización anterior para la indeterminación tiene además como consecuencia inmediata el hecho de que el espacio $L^2(\mu)$ asociado a estas medidas es un espacio de Hilbert de funciones enteras (en el sentido de los estudiados por Louis de Branges en la década de los 60).

Al final de los cuarenta esta teoría de medidas indeterminadas estaba prácticamente completada con excepción de dos problemas abiertos: 1) Quedaba por estudiar para que medidas determinadas el espacio de funciones de cuadrado integrable asociado a ellas era también un espacio de Hilbert de funciones enteras. 2) Desarrollar algunos ejemplos.

Curiosamente esta hermosa teoría era una teoría sin ejemplos; sí se conocían ejemplos de algunas medidas indeterminadas (véase la de Stieltjes más arriba) pero no se habían desarrollado ninguno al completo, esto es, calculando explícitamente expresiones para las funciones enteras asociadas que permiten la parametrización de todas las soluciones, idem para las medidas N-extremales, etc. El desarrollo completo de uno de estos ejemplos es muy complicado y, dado que en aquel momento no había motivación suficiente para hacerlo, este desarrollo no se llevó a cabo.

La teoría se ha retomado con fuerza en esta década, precisamente cuando ha aparecido la motivación suficiente para desarrollar los ejemplos. Esta motivación viene de otra de las aplicaciones estelares de la teoría de polinomios ortogonales: en este caso para modelizar los llamados procesos de vida y muerte (son un caso especial de los procesos estacionarios de Markov cuando el espacio de estados consiste en los números naturales; tiene aplicaciones en una gran variedad de campos, incluyendo física nuclear, reacciones químicas (modelo de Schlögl), dinámica de poblaciones, modelos genéticos (modelo de Moran), etc).

El primer problema, junto con el de caracterizar cuando la evaluación de una perturbación diferencial discreta de la sucesión de polinomios ortonormales está en ℓ^2, ha sido resuelto en la última década por C. Berg y A. J. Durán en una serie de artículos publicados entre 1995 y 1997 [6, 7, 8, 9]. La herramienta esencial ha sido la definición y estudio del *índice de determinación*: $\mathrm{ind}_z(\mu)$ definido por $\mathrm{ind}_z(\mu) = \sup\{k \in \mathbb{N} : |t-z|^{2k}\mu$ sea determinada$\}$; índice que tiene su origen en el índice de determinación de tipo Stieltjes introducido en 1991 por C. Berg y A. Thill (Acta Math. **167**, 207-227). De los resultados de Berg y Durán se deduce que para una medida determinada μ el espacio $L^2(\mu)$ es un espacio de funciones enteras si y sólo si el índice de determinación de μ es finito (esto proporciona nuevos e interesantes ejemplos para la teoría de espacios de Hilbert de funciones enteras desarrollada por de Branges).

7 Polinomios en redes no uniformes

Aunque los $q-$polinomios eran conocidos a finales del siglo XIX –el primer ejemplo de $q-$polinomios se debe A. A. Markov, el famoso estudiante de Chebyshev, en 1884 quien consideró un caso particular de los que se conocen como polinomios de $q-$Hahn obtenidos por W. Hahn en 1949 en su trabajo que ya mencionamos anteriormente– justamente a partir del trabajo de Hahn en 1949 su estudio recobra fuerza fundamentalmente debido a su conexión con la teoría de representación de $q-$álgebras, funciones Theta, teoría de particiones, entre otras.

Más recientemente ya en los años 80 los estadounidenses G. E. Andrews y R. Askey por un lado y los rusos A. F. Nikiforov y A. V. Uvarov, por el otro, descubrieron que todas las familias de polinomios ortogonales clásicos podían obtenerse como casos límites de los polinomios de $q-$Racah o los polinomios de Askey-Wilson, definidos mediante las series hipergeométricas básicas (las correspondientes "q" generalizaciones de la serie de Gauss). En particular, la escuela "americana" se centró en el estudio de estos objetos a partir de las series básicas ${}_4\varphi_3$, definidas en general por

$$ {}_r\phi_p\left(\begin{array}{c} a_1, a_2, ..., a_r \\ b_1, b_2, ..., b_p \end{array} \middle| q\,;\, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_k \cdots (a_r;q)_k}{(b_1;q)_k \cdots (b_p;q)_k} \frac{z^k}{(q;q)_k} \left[(-1)^k q^{\frac{k}{2}(k-1)}\right]^{p-r+1}, \quad 0<q<1, $$

con $(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)$, apareciendo en 1994 [25] la $q-$Tabla de Askey que clasificaba (presuntamente) a todas las familias de $q-$polinomios. Algo más tarde en 1983, Nikiforov y Uvarov proponen una aproximación diferente (y más general) consistente en considerarlos como soluciones polinómicas de una ecuación en diferencias:

$$ \begin{gathered} \tilde{\sigma}(x(s)) \frac{\triangle}{\triangle x(s-\frac{1}{2})} \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \frac{\tilde{\tau}(x(s))}{2} \left[\frac{\triangle y(s)}{\triangle x(s)} + \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] + \lambda y(s) = 0, \\ \nabla f(s) = f(s) - f(s-1), \qquad \triangle f(s) = f(s+1) - f(s)\,, \end{gathered} \tag{2} $$

con $x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3(q)$, donde $q \in \mathbb{C}$, c_1, c_2, c_3 son constantes que pueden depender de q, pero son independientes de s, $\tilde{\sigma}(x(s))$ es un polinomio de grado, a lo sumo, 2 en $x(s)$ y $\tilde{\tau}(x(s))$, de grado 1 y λ es una constante. La ecuación anterior se denomina *ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico* y aproxima a la ecuación (1) en la *red no uniforme* $x(s)$. Una propiedad inmediata de esta aproximación es precisamente que las soluciones de (2) se pueden expresar como series básicas. Los trabajos de estos dos autores culmina con una clasificación diferente de los $q-$polinomios aparecida en 1991 [30].

Aparentemente la clasificación de los $q-$polinomios según la $q-$tabla de Askey contenía todas las familias posibles de $q-$polinomios, no obstante quedaba la cuestión de si realmente la ecuación de tipo de hipergeométrica (2) tenía como solución a todas las familias conocidas de $q-$polinomios. En una continuación del trabajo [28] junto a J. C. Medem [4] descubrimos algo sorprendente: incluso dentro de la clase de Hahn (lo que equivale a trabajar en la red exponencial lineal $x(s) = c_1q^s + c_3$) la clasificación de Nikiforov-Uvarov contiene dos familias completamente nuevas y no contenidas en el $q-$esquema de Askey. Ellas son:

$$j_n(x;a,b) = {}_2\phi_0\left(\begin{array}{c} q^{-n}, aq^n \\ — \end{array} \Big| q;\, \frac{x}{ab} \right), \quad \text{y} \quad l_n(x;a) = {}_2\phi_0\left(\begin{array}{c} q^{-n}, 0 \\ — \end{array} \Big| q;\, -\frac{x}{a} \right).$$

Actualmente continua abierto el problema de caracterización en la red general conociéndose sólo algunos resultados parciales (aunque muy interesantes) debidos a A. Grunbaum y L. Haine usando técnicas biespectrales [24] así como una clasificación completa de todas las familias en la red general $x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3(q)$.

Para concluir este apartado comentaremos otro de los problemas de gran importancia (en particular por sus correspondientes aplicaciones): las propiedades espectrales (distribución asintótica de ceros) de los $q-$polinomios. A ese respecto no existe prácticamente ningún resultado a excepción de un trabajo de J. S. Dehesa en 1979 y otro más reciente en 1997 en colaboración con el primer autor de este artículo [1] donde se estudian, a partir de la relación de recurrencia a tres términos que dichos polinomios satisfacen, los momentos asintóticos $\mu_k^{(n)}$ de las familias de $q-$polinomios definidos por $\mu_k^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} x_{n,j}^k$, siendo $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ los ceros del polinomio P_n. En interés sucitado en los últimos años por los polinomios discretos también ha llevado a los investigadores a preguntarse sobre las densidades asintóticas de ceros de las familias discretas, comenzando por los ya mencionados polinomios discretos de Chebyshev para el estudio de los cuales E.A. Rakhmanov, en 1996, desarrolló una elegante teoría del potencial con campos externos utilizada con éxito para el caso de otras familias discretas. El uso de técnicas de teoría del potencial para el estudio de los ceros de $q-$polinomios puede ser un instrumento de gran utilidad y permanece aún sin explotar.

8 Polinomios matriciales

Finalizamos este trabajo con una breve descripción de una de las extensiones más importantes y de mayor actualidad de la teoría de polinomios ortogonales: los polinomios ortogonales matriciales. Estos objetos matemáticos son polinomios cuyos coeficientes son matrices cuadradas e.g. $N \times N$, o equivalentemente, son matrices cuyas entradas son polinomios, i.e., $P_n(x) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots A_1x + A_0$ con $A_k \in \mathbb{R}^{N,N}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. La ortogonalidad viene dada en este caso por una matriz de medidas $\mu = (\mu_{i,j})_{i,j=1}^N$ definida positiva (es decir tal que para todo conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$ la matriz númerica $\mu(A) = (\mu_{i,j}(A))_{i,j=1}^N$ es semidefinida positiva) con momentos $\int_{\mathbb{R}} t^n dW(t) < +\infty \; \forall\, n \geq 0$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x) d\mu(x) P_m(x) = \delta_{n,m}\Gamma_n, \quad n, m \geq 0, \tag{3}$$

siendo Γ_n una matriz definida positiva. Como en el caso escalar, la sucesión de polinomios matriciales ortogonales $(P_n)_n$ satisfacen una fórmula de recurrencia de tres términos:

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t)+B_n(t)P_n(t)+A_n^*P_{n-1}(t), \;\; n \geq 0, \quad \text{donde} \quad P_{-1}(t) = 0_n,\; P_0(t) = \mathrm{I}_n.$$

La ortogonalidad matricial ha sido estudiada de manera esporádica durante los últimos cincuenta años. Por ejemplo, M. Krein considera el problema de momentos matricial y los correspondientes polinomios matriciales en los años 40. En los 60 se interesan por ellos F. Atkinson (1968) y Yu. M. Berezansky (1965) en sus monografías *Discrete and continuous boundary problems* y *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, respectivamente. En los 80, J.S. Geronimo los usa en la tería de dispersión (scattering theory), S. Basu y N. K. Bose (1983) en Modelos de redes (networks), etc. No obstante faltaba motivación para desarrollar un estudio sistemático de la teoría; esta motivación ha aparecido al principio de esta década cuando el segundo de los firmantes ha mostrado como interpretar matricialmente la ortogonalidad escalar, convirtiendo así a la teoría de polinomios matriciales ortogonales en una herramienta para resolver problemas de la teoría escalar clásica.

Dedicaremos las últimas líneas a explicar esta interpretación no trivial de la ortogonalidad escalar como ortogonalidad matricial, y a ilustrar con algunos ejemplos de su utilidad.

El inicio de la historia tiene lugar a finales de los 80 cuando, en relación con la clasificación de soluciones polinomiales de ecuaciones diferenciales, se empezaron a considerar familias de polinomios ortonormales con respecto a productos escalares del tipo

$$\langle p, q\rangle = \int_{\mathbb{R}} p(t)q(t)d\mu(t) + \sum_{k,m=1}^{n} M_{k,m}p^{(k)}(x_k)q^{(m)}(x_m),$$

donde μ es una medida positiva, $M_{k,m} \geq 0$ y x_k, x_m son reales. Las familias $(p_n)_n$ de polinomios ortonormales con respecto a tales productos escalares (llamados Sobolev discretos) ya no verifican una fórmula de recurrencia de tres términos, pero sí una que se puede reducir al tipo:

$$t^N p_n(t) = c_{n,0}p_n(t) + \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{c}_{n,k}p_{n-k}(t) + c_{n+k,k}p_{n+k}(t)\right),$$

con $c_{n,0}$ real, $c_{n,N} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, y $p_k = 0$ si $k < 0$. Se planteó, entonces, el problema de caracterizar la ortogonalidad canónica para las familias de polinomios verificando tales fórmulas de recurrencia (al igual que el teorema de Favard da la ortogonalidad con respecto a una medida positiva para las familias de polinomios verificando una fórmula de recurrencia de tres términos). La respuesta al problema la dió Antonio J. Duran [13, 14], y establece una equivalencia entre familias de polinomios escalares verificando fórmulas de recurrencia del tipo anterior y polinomios matriciales ortonormales: si definimos los operadores $R_{N,m}$, $m = 0, 1, \cdots, N-1$ actuando sobre cualquier polinomio p en la forma $R_{N,m}(p)(t) = \sum_n \frac{p^{(nN+m)}(0)}{(nN+m)!}t^n$, i.e., $R_{N,m}$ toma de p aquellas potencias de t congruentes con m módulo N, eliminando el factor común t^m y cambiando t^N por t, entonces tenemos:

Teorema 4 *[14] Si $(p_n)_n$ (grado$(p_n) = n$) satisfacen una relación de recurrencia a $(2N+1)$-términos entonces existe una matriz de medidas definida positiva $\mu = (\mu_{m,m'})_{m,m'=0,\cdots,N-1}$ tal que los polinomios $(p_n)_n$ son ortogonales respecto al producto escalar*

$$B(p,q) = \sum_{0\leq m,m'\leq N-1} \int_R R_{N,m}(p)R_{N,m'}(q)d\mu_{m,m'}.$$

En consecuencia, tenemos la siguiente equivalencia: Si los polinomios escalares $p_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ (grado$(p_n) = n$) verifican una relación de recurrencia a $(2N+1)$-términos y definimos la sucesión $(P_n)_n$ de polinomios matriciales como

$$P_n(t) = \begin{pmatrix} R_{N,0}(p_{nN})(t) & \dots & R_{N,N-1}(p_{nN})(t) \\ R_{N,0}(p_{nN+1})(t) & \dots & R_{N,N-1}(p_{nN+1})(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N,0}(p_{nN+N-1})(t) & \dots & R_{N,N-1}(p_{nN+N-1})(t) \end{pmatrix},$$

entonces, $(P_n)_n$ es una familia ortogonal in $\mathbb{R}$ respecto a cierta matriz de medidas definida positiva. El recíproco también es cierto (veáse para más detalle [23]).

Esta relación permite dar la siguiente interpretación no trivial de la ortogonalidad escalar como ortogonalidad matricial (será la puerta que permitirá aplicarla para resolver problemas de la teoría clásica). Partimos de una sucesión de polinomios $(p_n)_n$ ortogonales con respecto a una medida positiva, verifican por tanto una fórmula de recurrencia de tres términos. Iterándola llegamos a una de cinco términos:

$$t^2 p_n(t) = \alpha_{n+2} p_{n+2}(t) + \beta_{n+1} p_{n+1}(t) + \gamma_n p_n(t) + \beta_n p_{n-1}(t) + \alpha_n p_{n-2}(t).$$

Aplicando el resultado anterior para $N = 2$, encontramos que existe una matriz de medidas definida positiva $W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$ tal que $(p_n)_n$ son ortogonales respecto a ella en el sentido del teorema 4:

$$\sum_{i,j=0}^{1} \int_{\mathbb{R}} R_{2,i}(p_n) R_{2,j}(p_m) dw_{i,j} = \delta_{n,m}.$$

En principio es fácil comprobar que cada medida positiva μ verificando $\int p_n p_m d\mu = \delta_{n,m}$ genera una matriz de medidas definida positiva W_μ con respecto a la que $(p_n)_n$ son también ortonormales; esta matriz de medidas se define como sigue:

$$W_\mu = \begin{pmatrix} \psi(\mu) & \psi(t\mu) \\ \psi(t\mu) & \psi(t^2\mu) \end{pmatrix}$$

donde $\psi(\mu)$ es la medida imagen de μ bajo $\psi(t) = t^2$. Pero, la clave de la cuestión es que otras matrices de medidas W pueden existir, y de hecho existen en general (incluso cuando la medida es determinada: véase para una caracterización completa [9]), que no son de la forma W_μ, esto es, no provienen de una medida escalar. Precisamente estas matrices de medidas guardan información sobre los polinomios $(p_n)_n$ que no puede ser proporcionada por las medidas peso.

Por ejemplo, sea $(p_n)_n$ una sucesión escalar de polinomios ortonormales. Es conocido desde principios de siglo que $\frac{1}{\sum_n |p_n(x)|^2} = \sup\{\mu(\{x\}) : \mu \text{ es una medida para } (p_n)_n\}$. Sin embargo, el problema análogo para las derivadas de p_n permanecía abierto. Precisamente porque para darle respuesta es necesario acudir a la ortogonalidad matricial. En particular para el caso de la primera derivada se tiene

$$\frac{1}{\sum_n |p_n'(0)|^2} = \sup\{w_{22}(\{0\}) - \frac{|w_{12}|^2(\{0\})}{w_{1,1}(\{0\})} : W = (w_{i,j})_{i,j=1}^2 \text{medida matricial de } (p_n)_n\}.$$

Este uso de la ortogonalidad matricial para resolver problemas de la ortogonalidad escalar clásica ha generado el interés necesario para llevar a cabo un estudio sistématico de la ortogonalidad matricial, situándola, además, como una de las áreas más prometedoras dentro de la teoría de polinomios ortogonales. Para concluir citaremos, a modo de resumen, algunos de los resultados importantes que han sido obtenidos recientemente: fórmulas de cuadratura y propiedades de los ceros (A. J. Duran, P. López-Rodríguez, A. Sinap, W. Van Asse [15, 18, 32], etc); fórmulas asintóticas (asintótica del cociente y de ceros) (A. J. Duran, E. Danieri, P. López-Rodríguez, E. Saff [16, 17, 22]); problema de momentos matricial: Densidad de los polinomios, Parametrización de Nevalina, matrices de medida $N-$extremales (A. J. Duran, P. López-Rodríguez [19, 20, 21, 26, 27]).

Referencias

[1] R. Álvarez-Nodarse, E. Buendía y J.S. Dehesa, *On the distribution of zeros of the generalized q-orthogonal polynomials.* J. Phys. A.: Math. Gen. **30** (1997) 6743-6768.

[2] R. Álvarez-Nodarse and F. Marcellán, *Difference equation for modifications of Meixner polynomials.* J. Math. Anal. Appl. **194** (1995) 250–258.

[3] R. Álvarez-Nodarse and F. Marcellán, *The limit relations between generalized orthogonal polynomials.* Indag. Mathematicae N.S. **8** (1997) 295-316.

[4] R. Álvarez-Nodarse and J. C. Medem, *$q-$Classical polynomials and the $q-$Askey and Nikiforov-Uvarov Tableaus.* J. Comput. Appl. Math. (2000) (en prensa)

[5] A.I. Aptekarev, V.S. Buyarov, W. Van Assche, J.S. Dehesa, *Asymptotics of entropy integrals for orthogonal polynomials.* Dokl. Math. **53** (1996) 47–49.

[6] C. Berg and A. J. Duran, *The index of determinancy for measures and the l^2-norm of orthogonal polynomials.* Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995) 2795–2811.

[7] C. Berg and A. J. Duran, *When does a discrete perturbation of a sequence of orthogonal polynomials belog to l^2?* J. Funct. Anal. **136** (1996) 127–153.

[8] C. Berg and A. J. Duran, *Orthogonal polynomials, L^2-spaces and entire functions.* Math. Scand. **79** (1996) 209–223.

[9] C. Berg and A. J. Duran, *Measures with finite index of determinacy or a mathematical model for Dr. Jekyll and Mr. Hyde.* Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997) 523–530.

[10] J.S. Dehesa, W. Van Assche, R.J. Yáñez, *Information entropy of classical orthogonal polynomials and their application to the harmonic oscillator and Coulomb potentials.* Meth. Appl. Anal. **4** (1997) 91–110.

[11] J. S. Dehesa, A. Martínez-Finkelshtein and J. Sánchez-Ruiz, *Quantum information entropies and orthogonal polynomials* J. Comput. Appl. Math. (2000) (en prensa)

[12] A. J. Duran, *Functions with given moments and weight functions for orthogonal polynomials.* Rocky Mountain J. Math. **23** (1993) 87–104.

[13] A. J. Duran, *A generalization of Favard's Theorem for polynomials satisfying a recurrence relation.* J. Approx. Th. **74** (1993) 83–109.

[14] A. J. Duran, *On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures.* Can. J. Math. **47** (1995) 88–112.

[15] A. J. Duran, *Markov Theorem for orthogonal matrix polynomials.* Can. J. Math. **48** (1996) 98–118.

[16] A. J. Duran, *Radio asymptotics for orthogonal matrix polynomials.* J. Approx. Th. **100** (1999) 304–344.

[17] A. J. Duran and E. Danieri, *Radio asymptotics for orthogonal matrix polynomials with undounded recurrence coefficients.* J. Approx. Th. (2000) (en prensa)

[18] A. J. Duran and P. López-Rodríguez, *Orthogonal matrix polynomials: Zeros and Blumenthal's theorem.* J. Approx. Th. **84** (1996) 96–118.

[19] A. J. Duran and P. López-Rodríguez, *The L^p space of a positive definite matrix of measures and density of matrix polynomials in $\mathcal{L}^1$.* J. Approx. Th. **90** (1997) 299–318.

[20] A. J. Duran and P. López-Rodríguez, *Density questions for the truncated matrix moment problem.* Can. J. Math. **49** (1997) 708-721.

[21] A. J. Duran and P. López-Rodríguez, *N-Extremal matrices of measures for an indeterminate matrix moment problem.* J. Funct. Anal. **174** (2000) 301-321.

[22] A. J. Duran, P. López-Rodríguez and E. B. Saff, *Zero asymptotic behaviour for orthogonal matrix polynomials.* J. Anal. Math. **78** (1999) 37-60.

[23] A. J. Duran and W. Van Assche, *Orthogonal polynomials and higher order recurrence relations.* Linear Alg. Appl. **219** (1995) 261–280.

[24] A. Grünbaum and L. Haine, *The q-version of a theorem of Bochner.* J. Comput. Appl. Math. **68** (1996) 103–114.

[25] R. Koekoek y R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.* Reports Faculty Tech. Math. Informat. **No. 98-17**. Delft University of Technology, Delft, 1998. (revisión amplida del original de 1995).

[26] P. López-Rodríguez, *Riez's theorem for orthogonal matrix polynomials.* Contr. Approx. **15** (1999) 135–151.

[27] P. López-Rodríguez, *Nevanlinna parametrization for a matrix moment problem.* Math. Scand. (2000) (en prensa)

[28] J. C. Medem, R. Álvarez-Nodarse and F. Marcellán, *On the $q-$polynomials: A distributional study.* J. Comput. Appl. Math. (2000) (en prensa)

[29] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics.* Birkhäuser Verlag, Basilea, 1988.

[30] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov, *Polynomial Solutions of hypergeometric type difference Equations and their classification.* Integral Transform. Spec. Funct. **1** (1993) 223-249.

[31] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials.* Amer. Math. Soc. Coll. Pub. **23** American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1975 (cuarta edición).

[32] A. Sinap and W. Van Assche, *Polynomial interpolation and Gaussian quadrature for matrix-value functions.* Linear Alg. Appl. **207** (1994) 71–114.

[33] R.J. Yáñez, W. Van Assche, J.S. Dehesa, *Position and momentum information entropies of the D-dimensional harmonic oscillator and hydrogen atom.* Phys. Rev. A **50** (1994) 3065–3079.