

# $q$ -Polinomios y $q$ -álgebras.

R. Álvarez-Nodarse

## Resumen

Dentro de la gran familia de las funciones especiales, y en particular de los polinomios ortogonales, se encuentran los  $q$ -polinomios. Estos objetos matemáticos tienen un gran interés por sus diversas aplicaciones en diversas áreas de la física-matemática. En particular, en este trabajo mostraremos la interconexión de varias familias de  $q$ -polinomios con la teoría de representación de  $q$ -álgebras y cómo, gracias a esta interrelación, distintas propiedades de una teoría se pueden trasladar a la otra y obtener nuevos resultados. Concretamente revisaremos la conexión de los  $q$ -polinomios de Hahn con los coeficientes de Clebsch-Gordan de las  $q$ -álgebras  $SU_q(2)$  y  $SU_q(1,1)$ , respectivamente.

Sevilla, 21 de diciembre de 1999

## 1 Introducción.

En este trabajo vamos a estudiar la conexión entre algunas de las familias de  $q$ -polinomios y las  $q$ -álgebras  $SU_q(2)$  y  $SU_q(1,1)$ .

Las álgebras cuánticas y grupos cuánticos han sido introducidas en los últimos años al estudiar el problema inverso de dispersión cuántica [19] y las ecuaciones de Yang-Baxter [25]. Dichos objetos son, desde el punto de vista matemático, álgebras de Hopf [17], y tienen una gran importancia en diversos problemas de la física matemática: *sistemas integrables, teoría cuántica de campos conformes, física estadística*, entre otros (ver [39] y las referencias contenidas en el mismo). Sus aplicaciones en física se han incrementado en la última década debido a la introducción de los  $q$ -osciladores cuánticos [9], [26] (ver además [4]-[6],[7]-[8]). También han sido utilizadas para describir el espectro *rotacional y vibracional* de los núcleos atómicos [31], [11]-[12], de las moléculas diatómicas [2],[13],[14], etc.

En este trabajo vamos a estudiar la conexión entre los  $q$ -polinomios de Hahn y los coeficientes de Clebsch-Gordan (3j símbolos) de las  $q$ -álgebras  $SU_q(2)$  y  $SU_q(1,1)$ . Un estudio más detallado de las álgebras  $SU_q(2)$  y  $SU_q(1,1)$  se puede encontrar en [21], [22], [23], [24], [32]-[35], [37], [40], entre otros. Para la conexión entre las diferentes familias de  $q$ -polinomios y las álgebras cuánticas, véase [3], [22], [23], [27]-[28], [36], [40], entre otros.

Finalmente, las características y propiedades más importantes de las familias de  $q$ -polinomios mencionadas en este trabajo se pueden encontrar en [1].

## 2 Preliminares

Por completitud vamos a dar una breve introducción a las  $q$ -álgebras y la teoría básica de los  $q$ -polinomios.

### 2.1 Breve introducción a las $q$ -álgebras.

Un conjunto de elementos  $\mathcal{G}$  es un grupo si a todo par ordenado  $(g_1, g_2)$  de  $\mathcal{G}$  le corresponde un elemento  $g = g_1 * g_2$  y se cumple que:

1.  $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$  para todos  $g_1, g_2, g_3$  de  $\mathcal{G}$ , i.e.,  $*$  es una operación asociativa,
2. existe un elemento  $e$  tal que  $e * g = g * e = g$  para todo  $g$  de  $\mathcal{G}$ ,

3. para todo  $g$  de  $\mathcal{G}$  existe un elemento  $g'$  de  $\mathcal{G}$  que denotaremos por  $g^{-1}$  y llamaremos inverso de  $g$  tal que  $g * g' = g' * g = e$ .

Si la operación  $*$ , denominada comunmente como *multiplicación* es tal que para todos  $g_1$  y  $g_2$  de  $\mathcal{G}$   $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ , diremos que el grupo es conmutativo.

Por ejemplo, el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  es un grupo conmutativo respecto a la adición y a la multiplicación estándares.

Un grupo  $\mathcal{A}$  conmutativo que tiene la “adición” (suma) como operación  $*$  se denomina anillo si en  $\mathcal{A}$  está definida la “multiplicación” y satisface la propiedad distributiva:

$$g_1 * (g_2 + g_3) = g_1 * g_2 + g_1 * g_3, \quad (g_1 + g_2) * g_3 = g_1 * g_3 + g_2 * g_3.$$

Un anillo se dice asociativo (conmutativo) si tiene un elemento unidad respecto a la multiplicación y dicha operación tiene la propiedad asociativa (conmutativa). Un anillo conmutativo se denomina campo. Como ejemplos de campos tenemos el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  y complejos  $\mathbb{C}$ .

Dado un anillo  $\mathcal{A}$  y un campo  $\mathbb{K}$ , se dice que  $\mathcal{A}$  es un álgebra sobre  $\mathbb{K}$  si definida la operación externa  $\cdot$  se cumple que para todos  $a, b$  de  $\mathcal{A}$   $\alpha, 1$  de  $\mathbb{K}$ , los elementos  $\alpha \cdot a, \alpha \cdot b$  pertenecen a  $\mathcal{A}$  y

$$\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b, \quad 1 \cdot a = a, \quad \alpha \cdot (a * b) = (\alpha \cdot a) * b = a * (\alpha \cdot b).$$

Un álgebra compleja asociativa es un álgebra sobre  $\mathbb{C}$  donde la operación multiplicación es asociativa.

### 2.1.1 El álgebra $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ .

En nuestro trabajo nos interesará el álgebra  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Dicha álgebra está constituida por las series finitas o infinitas de los productos de los operadores  $J_+, J_-$  y  $J_0$  tales que

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = [2J_0]_q,$$

donde  $[A, B]$  denota el conmutador  $AB - BA$ , y  $[2J_0]_q$  denota la serie formal correspondiente:

$$[2J_0]_q = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^{-1} \left( J_0 + \frac{\gamma^3 J_0^3}{3!} + \frac{\gamma^5 J_0^5}{5!} + \dots \right), \quad e^\gamma = q.$$

Usualmente se suele “cambiar” el álgebra anterior por el álgebra constituida por los elementos  $J_+, J_-, k = q^{J_0/2}, k^{-1} = q^{-J_0/2}$  tal que

$$kk^{-1} = k^{-1}k = 1, \quad kJ_{\pm} = q^{\pm 1}J_{\pm}k, \quad [J_+, J_-] = \frac{k^2 - k^{-2}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}.$$

Con este cambio el álgebra estará constituida solamente por series finitas de los productos de los elementos  $J_{\pm}, k$  y  $k^{-1}$ . Obviamente una base de esta álgebra la constituyen cualquiera de los sistemas

$$\{J_+^l k^m J_+^n\}, \quad \{J_-^l k^m J_-^n\}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

El álgebra anterior, que denominaremos *q*-álgebra  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ , se puede equipar con la estructura de álgebra de Hopf. Para ello es suficiente introducir la co-multiplicación, la co-unidad y la antipode [23], [40]. Un hecho importante a destacar es que si bien la *q*-álgebra  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  es invariante al cambio  $q \rightarrow q^{-1}$ , la correspondiente álgebra de Hopf, conocida como álgebra cuántica  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ , no lo es. En nuestro trabajo nos vamos a restringir a la *q*-álgebra aunque los resultados aquí presentados son válidos también para el álgebra cuántica.

Normalmente para distinguir las distintas formas reales de un álgebra se introduce la operación  $\dagger$ . Así, si  $q \in \mathbb{R}$ , la secuencia

$$J_0^\dagger = J_0, \quad J_+^\dagger = J_-, \quad J_-^\dagger = J_+,$$

define una  $\dagger$ -estructura que distingue las formas compactas [40] y que denotaremos por  $U_q(\mathfrak{su}_2)$  o simplemente  $SU_q(2)$ . Por el contrario, si

$$J_0^\dagger = J_0, \quad J_+^\dagger = -J_-, \quad J_-^\dagger = -J_+,$$

entonces la  $\dagger$ -operación define una  $\dagger$ -estructura que distingue las formas reales no compactas [40] y que denotaremos por  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  o simplemente  $SU_q(1,1)$ .

Las representaciones de un álgebra  $\mathcal{A}$  no son más que los homomorfismos  $D$  (aplicaciones lineales) de  $\mathcal{A}$  sobre un espacio lineal complejo  $\mathbb{E}$ . Si  $\mathbb{E}$  es de dimensión finita diremos que la representación es finita, en caso contrario diremos que la representación es infinita. Para determinar las representaciones  $D$  de un álgebra es suficiente conocer como actúan sobre los “generadores” de dicha álgebra. Por ejemplo, en el caso del álgebra  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  es suficiente conocer como actúan los operadores  $D(J_\pm)$  y  $D(J_0)$  imponiendo que se cumplan las condiciones

$$(2.1) \quad [D(J_0), D(J_\pm)] = \pm D(J_\pm), \quad [D(J_+), D(J_-)] = [2D(J_0)]_q.$$

En el caso de la forma real  $U_q(\mathfrak{su}_2)$  dichas representaciones finitas se escogen tales que  $D(J_0)^\dagger = D(J_0)$  y tal que  $D(J_- J_+ + [J_0 + \frac{1}{2}]_q^2)$  sea proporcional a la unidad. El operador  $C_2 = J_- J_+ + [J_0 + \frac{1}{2}]_q^2$  conmuta con los generadores  $J_\pm$  y  $J_0$  de  $U_q(\mathfrak{su}_2)$  y se conoce como el operador de Casimir del álgebra  $U_q(\mathfrak{su}_2)$ .

Por simplicidad vamos a denotar los operadores  $D(a)$  de la representación finita de  $U_q(\mathfrak{su}_2)$  por  $a$ , con  $a \in U_q(\mathfrak{su}_2)$ .<sup>1</sup> Sea  $\{|JM\rangle\}_{M=-J}^{M=J}$  una base del espacio lineal  $\mathbb{E}$  sobre el cual está definida nuestra representación finita  $D$  (se puede demostrar [40] que la dimensión de esta representación que es de dimensión  $2J + 1$ , con  $J = n/2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). Si ahora definimos

$$(2.2) \quad \begin{aligned} D(J_\pm)|JM\rangle &\equiv J_\pm|JM\rangle = \sqrt{[J \mp M]_q [J \pm M + 1]_q} |JM \pm 1\rangle, \\ D(J_0)|JM\rangle &= J_0|JM\rangle = M|JM\rangle, \end{aligned}$$

es fácil comprobar que las ecuaciones (2.1) tienen lugar. Además, la condición  $D(J_0)^\dagger = D(J_0)$  indica que el operador  $J_0$  es autoadjunto en cualquier representación finita de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Más aún, puesto que para  $U_q(\mathfrak{su}_2)$   $D(J_\pm)^\dagger = D(J_\mp)$ , las representaciones finitas de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  restringidas a espacios lineales de dimensión finita son las representaciones de  $U_q(\mathfrak{su}_2)$ .

Para terminar con esta pequeña introducción a las  $q$ -álgebras mostraremos una construcción explícita de una representación para el álgebra  $U_q(\mathfrak{su}_2)$ .

Vamos a suponer que  $\mathbb{E}^J$  es el espacio lineal de los polinomios homogéneos de grado  $2J$   $\mathbb{P}_{s,t}^{2J}$  en las variables  $s$  y  $t$ . Sea  $\delta_x$  el operador definido por:

$$\delta_x f(x) = f(q^{\frac{1}{2}}x) - f(q^{-\frac{1}{2}}x).$$

Sean los operadores

$$(2.3) \quad D(J_+) = s \frac{\delta_t}{\delta_t t}, \quad D(J_-) = t \frac{\delta_s}{\delta_s s}, \quad 2D(J_0) = s \frac{\partial}{\partial s} - t \frac{\partial}{\partial t},$$

<sup>1</sup>La razón de ello es que tanto los elementos del álgebra como los de su representación satisfacen las mismas relaciones de conmutación.

entonces como  $\frac{\delta_t}{\delta_i t} t^n = [n] t^{n-1}$  y  $\frac{\partial}{\partial t} t^n = n t^{n-1}$ , es fácil comprobar que las funciones

$$|JM\rangle = \frac{s^{J+M} t^{J-M}}{\sqrt{[J+M]_q! [J-M]_q!}}, \quad M = 0, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm J,$$

son una base ortonormal de  $\mathbb{P}_{s,t}^{2J}$  definiendo como producto escalar en  $\mathbb{P}_{s,t}^{2J}$  la forma bilineal

$$(f, g) = f\left(\frac{\delta_s}{\delta_s s}, \frac{\delta_t}{\delta_t t}\right) \left(g(s, t)\right) \Big|_{s=t=0}.$$

Además, la acción de  $J_{\pm}$  y  $J_0$  en  $\mathbb{P}_{s,t}^{2J}$  definidos por (2.3) coinciden con (2.2).

Un estudio semejante se puede realizar para la particularización  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  [40].

## 2.2 Introducción a los $q$ -polinomios.

Los  $q$ -polinomios son las soluciones polinómicas de la ecuación

$$(2.4) \quad \tilde{\sigma}(x(s)) \frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})} \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \frac{1}{2} \tilde{\tau}(x(s)) \left[ \frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] + \lambda y(s) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$(2.5) \quad \sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})} \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \tau(s) \frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0,$$

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}(x(s)) - \frac{1}{2} \tilde{\tau}(x(s)) \Delta x(s - \frac{1}{2}), \quad \tau(s) = \tilde{\tau}(x(s)),$$

donde  $\tilde{\sigma}(x(s))$  es un polinomio de grado, a lo sumo, 2 en  $x(s)$ ;  $\tilde{\tau}(x(s))$ , de grado 1,  $\lambda$  es una constante y

$$(2.6) \quad x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3(q), \quad q \in \mathbb{C}$$

siendo  $c_1, c_2, c_3$  constantes que pueden depender de  $q$ , pero son independientes de  $s$ .

Los  $q$ -polinomios satisfacen las siguientes propiedades:

1. Las soluciones polinómicas de (2.5) se expresan mediante el  $q$ -análogo de la fórmula de Rodrigues para los polinomios de variable discreta en redes no uniformes:

$$(2.7) \quad P_n(s)_q = \frac{B_n}{\rho(s)} \nabla^{(n)} [\rho_n(s)], \quad \nabla^{(n)} \equiv \frac{\nabla}{\nabla x_1(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_2(s)} \cdots \frac{\nabla}{\nabla x_n(s)},$$

donde

$$(2.8) \quad \rho_k(s) = \rho(s+k) \prod_{m=1}^k \sigma(s+m),$$

y  $\rho(s)$  es la solución de la ecuación en diferencias de tipo Pearson en una red no uniforme:

$$(2.9) \quad \frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})} [\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s).$$

2. Las soluciones polinómicas (2.7) son ortogonales respecto a la función peso  $\rho(s)$ , concretamente se tiene que, si existen dos valores  $a$  y  $b$  tales que  $x^k(s - \frac{1}{2})\sigma(s)\rho(s)|_{s=a,b} = 0$ , para todo  $k \geq 0$ , entonces las soluciones polinómicas  $P_n(s)_q$  de la ecuación (2.5) son ortogonales dos a dos respecto a la función peso  $\rho(s)$  definida por la ecuación (2.9), o sea, se cumple que:

$$(2.10) \quad \sum_{s_i=a}^{b-1} P_n(s_i)_q P_m(s_i)_q \rho(s_i) \Delta x(s_i - \frac{1}{2}) = \delta_{nm} d_n^2, \quad s_{i+1} + s_i + 1,$$

donde, como antes,  $\delta_{nm}$  es el símbolo de Kronecker y  $d_n$  denota la norma de los polinomios  $P_n$ . Análogamente, si

$$(2.11) \quad \int_{\Gamma} \Delta[\rho(z)\sigma(z)x^k(z - \frac{1}{2})] dz = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, .$$

para cierto contorno del plano complejo, entonces tendremos en vez de (2.10), la propiedad

$$(2.12) \quad \int_{\Gamma} P_n(z)_q P_m(z)_q \rho(z) \Delta x(z - \frac{1}{2}) dz = 0, \quad n \neq m.$$

Generalmente los valores de  $a$  y  $b$  se suelen escoger de tal forma que  $\rho(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})$  sea positiva en el intervalo  $[a, b - 1]$ . Para ello se pueden elegir  $a$  y  $b$  como las soluciones de  $\sigma(a) = 0$  y  $\sigma(b - 1) + \tau(b - 1) \Delta x(b - 1 - \frac{1}{2}) = 0$  [16, 29, 30]. Obviamente de las relaciones (2.10) y (2.12) se deduce que los polinomios (2.7) satisfacen una relación de recurrencia a tres términos de la forma

$$(2.13) \quad \begin{aligned} x(s)P_n(x(s)) &= \alpha_n P_{n+1}(x(s)) + \beta_n P_n(x(s)) + \gamma_n P_{n-1}(x(s)), \\ P_{-1}(x(s)) &= 0, \quad P_0(x(s)) = 1. \end{aligned}$$

3. Como consecuencias de la fórmula de Rodrigues se tiene que

1.  $\tau(x)$  es un polinomio de grado exactamente uno.
2.  $\frac{\Delta P_n(s - \frac{1}{2})_q}{\Delta x(s - \frac{1}{2})}$  es ortogonal respecto a  $\tilde{\rho}(s) = \rho_1(s - \frac{1}{2})$ .
3. Son válidas las fórmulas diferencias-recurrente

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \sigma(s) \frac{\nabla P_n(s)_q}{\nabla x(s)} &= (A_n x + B_n) P_n(s)_q + C_n P_{n+1}(x)_q \\ [\sigma(s) + \tau(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})] \frac{\Delta P_n(s)_q}{\Delta x(s)} &= (\tilde{A}_n x + \tilde{B}_n) P_n(x)_q + \tilde{C}_n P_{n+1}(x)_q. \end{aligned}$$

Es importante notar que la ecuación (2.5) se puede reescribir de la forma

$$(2.15) \quad [\sigma(s) + \tau(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})] \frac{\Delta P_n(s)_q}{\Delta x(s)} - \sigma(s) \frac{\nabla P_n(s)_q}{\nabla x(s)} + \lambda_n \Delta x(s - \frac{1}{2}) P_n(s)_q = 0,$$

o, equivalentemente,

$$(2.16) \quad A_s y(s + 1) + B_s y(s) + C_s y(s - 1) + \lambda y(s) = 0$$

con

$$A_s = \frac{\sigma(s) + \tau(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})}{\Delta x(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})},$$

$$C_s = \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})},$$

$$B_s = -(A_s + C_s).$$

y la ecuación de tipo Pearson (2.9) en la forma

$$(2.17) \quad \frac{\rho(s + 1)}{\rho(s)} = \frac{\sigma(s) + \tau(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})}{\sigma(s + 1)} = \frac{\sigma(-s - \mu)}{\sigma(s + 1)},$$

donde,  $q^\mu = \frac{c_1(q)}{c_2(q)}$ . Además, la función  $x(s)$  se puede reescribir de la siguiente forma:

$$(2.18) \quad x(s) = c_1(q)[q^s + q^{-s-\mu}] + c_3(q), \quad \Delta x(s - \frac{1}{2}) = c_1(q)q^{\frac{-\mu}{2}} \kappa_q^2 [2s + \mu]_q,$$

siendo  $\kappa_q = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})$ . En la expresión anterior hemos utilizado el símbolo  $[n]_q$  para denotar a los  $q$ -números

$$(2.19) \quad [n]_q = \frac{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \quad n \in \mathbb{C}.$$

Utilizando la propiedad de simetría:

$$(2.20) \quad x(s) = x(-s - \mu), \quad \Delta x(s - \frac{1}{2}) = - \Delta x(t - \frac{1}{2})|_{t=-s-\mu},$$

obtenemos de (2.15) que:

$$(2.21) \quad \tilde{\sigma}(x(s)) = \frac{1}{2}[\sigma(-s - \mu) + \sigma(s)], \quad \tilde{\tau}(x(s)) = \frac{\sigma(-s - \mu) - \sigma(s)}{\Delta x(s - \frac{1}{2})}.$$

Igualando las potencias de mayor orden en  $q^s$  en (2.15) se deduce que

$$(2.22) \quad \lambda_n = - \frac{Aq^\mu}{c_1^2(q)\kappa_q^4} [n]_q \left[ 2\mu + n - 1 + \sum_{i=1}^4 s_i \right]_q,$$

siendo  $s_i$  los ceros de la función  $\sigma(s)$ .

Las soluciones polinómicas  $P_n(s)_q$  de (2.5) se pueden expresar mediante las  $q$ -series hipergeométricas  ${}_p\varphi_q$ , definidas por:

$$(2.23) \quad {}_r\varphi_p \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix} ; q, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_k \cdots (a_r; q)_k}{(b_1; q)_k \cdots (b_p; q)_k} \frac{z^k}{(q; q)_k} \left[ (-1)^k q^{\frac{k}{2}(k-1)} \right]^{p-r+1},$$

donde

$$(2.24) \quad (a; q)_k = \prod_{m=0}^{k-1} (1 - aq^m),$$

o, como mediante la  $q$ -función hipergeométrica definida  ${}_pF_q$  definida por

$$(2.25) \quad {}_rF_p \left( \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{matrix} ; q, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1|q)_k \cdots (a_r|q)_k}{(b_1|q)_k \cdots (b_p|q)_k} \frac{z^k}{(1|q)_k} \left[ \kappa_q^k q^{\frac{1}{4}k(k-1)} \right]^{p-r+1},$$

siendo  $(a|q)_k$  los  $q$ -análogos del símbolo de Pochhammer

$$(2.26) \quad (a|q)_k = \prod_{m=0}^{k-1} [a + m]_q = \prod_{m=0}^{k-1} \left( \frac{q^{\frac{a+m}{2}} - q^{-\frac{a+m}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right).$$

Nótese que ambas expresiones para  $r = p + 1$ , en el límite  $q \rightarrow 1$  se transforman en la función hipergeométrica clásica.

Antes de pasar a describir las propiedades de los polinomios de Hahn vamos a introducir sendos  $q$ -análogos de la función  $\Gamma$  de Euler. La función  $\tilde{\Gamma}_q(x)$  [29] y la  $\Gamma_q(x)$  [20] definidas mediante las relaciones funcionales

$$\tilde{\Gamma}_q(x+1) = [x]_q \tilde{\Gamma}_q(x), \quad \Gamma_q(x+1) = q^{\frac{1}{2}(x-1)} [x]_q \Gamma_q(x), \quad x \in \mathbb{C}$$

para las cuales se cumple que

$$(1|q)_k = \tilde{\Gamma}_q(k+1) = [k]_q!, \quad (q; q)_n = \Gamma_q(k+1)(1-q)^n \quad k \in \mathbb{N},$$

además,

$$(2.27) \quad \Gamma_q(s) = \begin{cases} \frac{(1-q)^{1-s} \prod_{k=0}^{\infty} (1-q^{k+1})}{\prod_{k=0}^{\infty} (1-q^{s+k})}, & 0 < q < 1 \\ q^{\frac{(s-1)(s-2)}{2}} \Gamma_{q^{-1}}(s), & q > 1 \end{cases}, \quad \tilde{\Gamma}_q(s) = q^{-\frac{(s-1)(s-2)}{4}} \Gamma_q(s).$$

### 2.3 Los $q$ -polinomios de Hahn.

En este apartado vamos a incluir las principales características de los  $q$ -polinomios de Hahn. Dichos polinomios fueron introducidos en [29], [36], [3] (ver además [1]). subsection Los  $q$ -polinomios de Hahn  $h_n^{\alpha\beta}(s, N; q)$ .

#### 2.3.1 Fórmula explícita.

$$h_n^{\alpha\beta}(s, N; q) = (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(2\alpha+\beta+N+\frac{1}{2}(n-1))} \frac{[N-s-1]_q! [s]_q!}{\tilde{\Gamma}_q[\alpha+N-s] \tilde{\Gamma}_q[\beta+s+1]} \times \\ \times \sum_{m=0}^n (-1)^m q^{-\frac{1}{2}m(\alpha+\beta+n+1)} \frac{\tilde{\Gamma}_q[\alpha+N-s+m] \tilde{\Gamma}_q[\beta+s+n-m+1]}{[m]_q! [n-m]_q! [s-m]_q! [N-s-n-1+m]_q!}.$$

#### 2.3.2 Valores en los extremos.

$$h_n^{\alpha\beta}(0, N; q) = (-1)^n \frac{[N-1]_q! \tilde{\Gamma}_q[\beta+n+1]}{[n]_q! \tilde{\Gamma}_q[\beta+1] [N-n-1]_q!} q^{\frac{1}{2}n(2\alpha+\beta+N+\frac{1}{2}(n+1))}, \\ h_n^{\alpha\beta}(N-1, N; q) = \frac{[N-1]_q! \tilde{\Gamma}_q[\alpha+n+1]}{[n]_q! [N-n-1]_q! \tilde{\Gamma}_q[\alpha+1]} q^{\frac{1}{2}n(\alpha+N-\frac{1}{2}(n+1))}.$$

#### 2.3.3 Fórmulas de diferenciación.

$$[n+1]_q h_{n+1}^{\alpha-1, \beta+1}(s, N+1; q) = -q^{\frac{1}{2}(2\alpha+\beta+N-1-n)} [N-s]_q [\beta+s]_q h_n^{\alpha\beta}(s, N; q) \\ + q^{\frac{1}{2}(\alpha+N-1-n)} [\alpha+N-s]_q [s]_q h_n^{\alpha\beta}(s-1, N; q), \\ h_{n+1}^{\alpha-1, \beta-1}(s+1, N; q) - h_{n+1}^{\alpha-1, \beta-1}(s) = q^{\frac{1}{2}(2s+\alpha+\beta-n)} [\alpha+\beta+n]_q h_n^{\alpha, \beta}(s, N; q).$$

#### 2.3.4 Simetría.

$$(-1)^n q^{n(\alpha+\beta+N)} h_n^{\beta\alpha}(N-s-1, N, q^{-1}) = h_n^{\alpha\beta}(s, N, q).$$

#### 2.3.5 Representación hipergeométrica.

$$h_n^{\alpha, \beta}(s, N; q) = \frac{(\beta+1|q)_n (1-N|q)_n}{q^{-\frac{n}{2}(2\alpha+\beta+N+\frac{n+1}{2})} [n]_q!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -n, -s, n+\alpha+\beta+1 \\ \beta+1, 1-N \end{matrix}; q, q^{\frac{1}{2}(s-N-\alpha)} \right) = \\ = \frac{(\beta+1|q)_n (N+\alpha+\beta+1|q)_n}{q^{\frac{n}{2}(N+\alpha+\frac{n(n+1)}{2})} [n]_q!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -n, s+\beta+1, n+\alpha+\beta+1 \\ \beta+1, N+\alpha+\beta+1 \end{matrix}; q, q^{\frac{1}{2}(s+1-N)} \right),$$

Tabla 1: Principales características de los  $q$ -polinomios de Hahn  $h_n^{\alpha\beta}(s, N; q)$  [1], [36]

$P_n(s)$	$h_n^{\alpha\beta}(s, N; q), \quad x(s) = q^s$
$(a, b)$	$[0, N-1]$
$\rho(s)$	$q^{\frac{\alpha}{4}(\alpha+2N+2s-3) + \frac{\beta}{4}(\beta+2s-1)} \frac{\tilde{\Gamma}_q(\alpha+N-s)\tilde{\Gamma}_q(\beta+s+1)}{[N-s-1]_q! [s]_q!}$ $\alpha, \beta \geq -1, \quad n \leq N-1$
$\sigma(s)$	$q^{\frac{1}{2}(\alpha+N+2s)} \kappa_q^2 [s]_q [\alpha+N-s]_q$
$\tau(s)$	$\kappa_q q^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)} \left\{ q^{\frac{1}{2}(\alpha+N)} [\beta+1]_q [N-1]_q - q^{\frac{\alpha}{2}} [s]_q [\alpha+\beta+2]_q \right\}$
$\lambda_n$	$q^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)} [n]_q [n+\alpha+\beta+1]_q$
$B_n$	$\frac{(-1)^n}{q^n \kappa_q^2 [n]_q!}$
$d_n^2$	$\frac{q^{\frac{1}{2}N(N-1) + \frac{1}{2}(N-1)(2\alpha+\beta+N)} \kappa_q \tilde{\Gamma}_q(\alpha+n+1) \tilde{\Gamma}_q(\beta+n+1) \tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+N+n+1)}{q^{-\alpha-N-\frac{1}{4}\beta(\beta+1) - \frac{1}{2}n(\alpha+\beta-2)} [n]_q! [N-n-1]_q! \tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+n+1) \tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+2n+2)}$
$\rho_n(s)$	$\frac{q^{\frac{\alpha}{4}(\alpha+2N+2s-3) + \frac{\beta}{4}(\beta+2s-1)} \kappa_q^{2n} \tilde{\Gamma}_q(\alpha+N-s) \tilde{\Gamma}_q(\beta+s+n+1)}{q^{-\frac{\beta}{2}(\alpha+\beta+N+n+1+2s)} [N-s-n-1]_q! [s]_q!}$
$a_n$	$q^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)n} \frac{\tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+2n+1)}{[n]_q! \tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+n+1) \kappa_q^n}$
$\alpha_n$	$\frac{\kappa_q q^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)} [n+1]_q [\alpha+\beta+n+1]_q}{[\alpha+\beta+2n+2]_q [\alpha+\beta+2n+1]_q}$
$\beta_n$	$\frac{q^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)}}{[\alpha+\beta+2n]_q [\alpha+\beta+2n+2]_q} \left\{ q^{\alpha+\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}} \times \right.$ $\left. \left( [N-n]_q [n]_q [\alpha+\beta+2n+2] - [N-n-1]_q [n+1]_q [\alpha+\beta+2n]_q \right) + q^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+N+1)} \times \right.$ $\left. \left( [\alpha+\beta+N+n+1]_q [n+1]_q [\alpha+\beta+2n]_q - [\alpha+\beta+N+n]_q [n]_q [\alpha+\beta+2n+2]_q \right) \right\}$
$\gamma_n$	$\frac{\kappa_q q^{\alpha+N-\frac{1}{2}} [\alpha+n]_q [\beta+n]_q [\alpha+\beta+N+n]_q [N-n]_q}{[\alpha+\beta+2n]_q [\alpha+\beta+2n+1]_q}$

o, en términos de las series hipergeométricas básicas,

$$h_n^{\alpha\beta}(s, N; q) = \frac{(-1)^n q^{n(\alpha+N)} (q^{\beta+1}; q)_n (q^{1-N}; q)_n}{\kappa_q^n (q; q)_n} {}_3\varphi_2 \left( \begin{matrix} q^{-n}, q^{-s}, q^{n+\alpha+\beta+1} \\ q^{\beta+1}, q^{1-N} \end{matrix}; q, q^{s-N-\alpha+1} \right) =$$

$$= \frac{q^{-\frac{n}{2}(2\beta+n+1)} (q^{\beta+1}; q)_n (q^{N+\alpha+\beta+1}; q)_n}{\kappa_q^n (q; q)_n} {}_3\varphi_2 \left( \begin{matrix} q^{-n}, q^{s+\beta+1}, q^{n+\alpha+\beta+1} \\ q^{\beta+1}, q^{N+\alpha+\beta+1} \end{matrix}; q, q \right).$$

Existe otra familia de polinomios de Hahn, los  $\tilde{h}_n^{\mu\nu}(s, N; q)$ , que se obtienen como la prolongación analítica de los  $h_n^{\alpha\beta}(s, N; q)$  respecto a los parámetros  $\alpha, \beta$  en el dominio  $\alpha > -1, \beta > -1$  en el  $\alpha < 1-N, \beta < 1-N$ , mediante la expresión [29]:

$$\tilde{h}_n^{-N-\alpha, -N-\beta}(s, N; q) = h_n^{\alpha\beta}(s, N; q).$$

Los parámetros de dichos polinomios se obtienen a partir de los  $h_n^{\alpha\beta}(s, N, q)$  si hacemos el cambio  $\alpha = -\mu - N, \beta = -\nu - N$  y utilizamos las propiedades de las funciones  $\tilde{\Gamma}_q(s)$  y los símbolos  $(a|q)_n$ .



Tabla 2: Principales características de los  $q$ -polinomios duales de Hahn  $W_n^c(x(s), a, b)_q$  [3]

$P_n(s)$	$W_n^c(x(s), a, b)_q, \quad x(s) = [s]_q[s+1]_q$
$(a, b)$	$[a, b-1]$
$\rho(s)$	$\frac{q^{-\frac{1}{2}s(s+1)}\tilde{\Gamma}_q[s+a+1]\tilde{\Gamma}_q[s+c+1]}{\tilde{\Gamma}_q[s-a+1]\tilde{\Gamma}_q[s-c+1]\tilde{\Gamma}_q[s+b+1]\tilde{\Gamma}_q[b-s]}$ $-\frac{1}{2} \leq a \leq b-1, \quad  c  < a+1$
$\sigma(s)$	$q^{\frac{1}{2}(s+c+a-b+2)}[s-a]_q[s+b]_q[s-c]_q$
$\tau(s)$	$-x(s) + q^{\frac{1}{2}(a-b+c+1)}[a+1]_q[b-c-1]_q + q^{\frac{1}{2}(c-b+1)}[b]_q[c]_q$
$\lambda_n$	$q^{-\frac{1}{2}(n-1)}[n]_q$
$B_n$	$\frac{(-1)^n}{[n]_q!}$
$d_n^2$	$q^{\frac{1}{2}(ac-ab-bc+a+c-b+1+2n(a+c-b)-n^2+5n)} \frac{\tilde{\Gamma}_q[a+c+n+1]_q!}{[n]_q!\tilde{\Gamma}_q[b-c-n]_q!\tilde{\Gamma}_q[b-a-n]_q!}$
$\rho_n(s)$	$\frac{q^{-\frac{1}{2}s(s+1+n)-\frac{n^2}{4}+\frac{3}{2}(a+c-b+\frac{3}{2})}\tilde{\Gamma}_q[s+a+n+1]\tilde{\Gamma}_q[s+c+n+1]}{\tilde{\Gamma}_q[s-a+1]\tilde{\Gamma}_q[s-c+1]\tilde{\Gamma}_q[s+b+1]\tilde{\Gamma}_q[b-s-n]}$
$a_n$	$\frac{q^{-\frac{3}{4}n(n-1)}}{[n]_q!}$
$\alpha_n$	$q^{\frac{3}{2}n}[n+1]_q$
$\beta_n$	$q^{\frac{1}{2}(2n-b+c+1)}[b-a-n+1]_q[a+c+n+1]_q +$ $+q^{\frac{1}{2}(2n+2a+c-b+1)}[n]_q[b-c-n]_q + [a]_q[a+1]_q$
$\gamma_n$	$q^{\frac{1}{2}(n+3+2(c+a-b))}[n+a+c]_q[b-a-n]_q[b-c-n]_q$

## 2.4 Los $q$ -polinomios duales de Hahn $W_n^c(x(s), a, b)_q$ .

### 2.4.1 Fórmula explícita.

$$\begin{aligned}
W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q &= \frac{\tilde{\Gamma}_q[s-a+1]\tilde{\Gamma}_q[s+b+1]\tilde{\Gamma}_q[s-c+1]\tilde{\Gamma}_q[b-s]}{q^{\frac{1}{2}(\frac{n^2}{2}-sn-n(a+c-b+\frac{5}{2}))}\tilde{\Gamma}_q[s+a+1]\tilde{\Gamma}_q[s+c+1]} \times \\
&\times \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m [2s-n+2m+1]_q q^{\frac{1}{2}(-m^2-2sm+nm-m)} [2s+m-n]_q!}{[m]_q! [n-m]_q! [2s+m+1]_q! \tilde{\Gamma}_q[s-a-n+m+1]} \times \\
&\times \frac{\tilde{\Gamma}_q[s+a+m+1]\tilde{\Gamma}_q[s+c+m+1]}{\tilde{\Gamma}_q[s+b-n+m+1]\tilde{\Gamma}_q[s-c-n+m+1]\tilde{\Gamma}_q[b-s-m]}.
\end{aligned}$$

### 2.4.2 Valores en los extremos.

$$W_n^{(c)}(x(a), a, b)_q = \frac{(-1)^n q^{-\frac{n^2}{4}+\frac{1}{2}n(c-b+\frac{3}{2})}\tilde{\Gamma}_q[b-a]\tilde{\Gamma}_q[a+c+n+1]}{[n]_q!\tilde{\Gamma}_q[a+c+1]\tilde{\Gamma}_q[b-a-n]},$$

$$W_n^{(c)}(x(b-1), a, b)_q = \frac{q^{-\frac{n^2}{4}+\frac{1}{2}n(c+a+\frac{3}{2})}\tilde{\Gamma}_q[b-a]\tilde{\Gamma}_q[b-c]}{[n]_q!\tilde{\Gamma}_q[b-c-n]\tilde{\Gamma}_q[b-a-n]}.$$

### 2.4.3 Fórmulas de diferenciación.

$$\begin{aligned} W_n^{(c)}(x(s + \frac{1}{2}), a, b)_q - W_n^{(c)}(x(s - \frac{1}{2}), a, b)_q &= q^{-\frac{3}{2}n + \frac{3}{2}} [2s + 1]_q W_{n-1}^{(c+\frac{1}{2})}(x(s), a + \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2})_q. \\ q^{\frac{1}{2}(2n-a-c+b+s)} [n+1]_q [2s]_q W_{n+1}^{(c-\frac{1}{2})}(x(s - \frac{1}{2}), a - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2})_q &= \\ = q^s [s-a]_q [s-c]_q [s+b]_q W_n^{(c)}(x(s-1), a, b)_q - [s+a]_q [s+c]_q [b-s]_q W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q. \end{aligned}$$

### 2.4.4 Representación hipergeométrica.

$$\begin{aligned} W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q &= \frac{(a-b+1|q)_n (a+c+1|q)_n}{q^{\frac{n}{2}(b-c-1+\frac{1}{2}(n-1))} [n]_q!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -n, a-s, a+s+1 \\ a-b+1, a+c+1 \end{matrix}; q, q^{\frac{1}{2}(b-c-n)} \right), \\ W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q &= \frac{(-1)^n (q^{a-b+1}; q)_n (q^{a+c+1}; q)_n}{q^{\frac{n}{2}(3a-b+c+1+n)} \kappa_q^n (q; q)_n} {}_3\phi_2 \left( \begin{matrix} q^{-n}, q^{a-s}, q^{a+s+1} \\ q^{a-b+1}, q^{a+c+1} \end{matrix}; q, q \right). \end{aligned}$$

## 3 El álgebra cuántica $SU_q(2)$ y los $q$ -coeficientes de Clebsch-Gordan.

Como ya hemos visto (ver además [32]-[35], [21]) el álgebra  $SU_q(2)$  está generada por los operadores  $J_+, J_-, J_0$  que satisfacen las ecuaciones:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} [J_0, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = [2J_0]_q = \frac{sh(2J_0\gamma)}{sh\gamma}, \quad q = e^\gamma, \\ (J_{\pm})^\dagger &= J_{\mp}, \quad (J_0)^\dagger = J_0, \end{aligned}$$

donde  $[A, B] = AB - BA$  denota el conmutador de  $A$  y  $B$ ,  $[n]_q$  los  $q$ -números (2.19) y  $[2J_0]_q$  es el correspondiente desarrollo formal en serie de potencias. Las representaciones irreducibles (RI) unitarias y de dimensión finita  $D^J$ , con  $J = 0, 1/2, 1, \dots$ , están determinadas por el vector de *máximo peso*  $|JJ\rangle$  definido por las expresiones:

$$(3.2) \quad J_+ |JJ\rangle_q = 0, \quad J_0 |JJ\rangle_q = J |JJ\rangle_q, \quad \langle JJ | JJ \rangle_q = 1.$$

Los vectores de la base de la RI están determinados por el vector de máximo peso  $|JJ\rangle$  mediante la fórmula:

$$(3.3) \quad |JM\rangle_q = \sqrt{\frac{[J+M]_q!}{[2J]_q! [J-M]_q!}} (J_-)^{J-M} |JJ\rangle_q, \quad -J \leq M \leq J.$$

La RI de dimensión  $(2J+1)$ , se expresa explícitamente por las fórmulas:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \langle JM' | J_0 | JM \rangle_q &= M \delta_{MM'}, \\ \langle JM' | J_{\pm} | JM \rangle_q &= \sqrt{[J \mp M]_q [J \pm M + 1]_q} \delta_{M', M \pm 1}. \end{aligned}$$

El operador de Casimir (que es un invariante de dicha álgebra) se define mediante las expresiones:

$$(3.5) \quad C_2 = J_- J_+ + [J_0 + 1/2]_q^2, \quad C_2 |JM\rangle_q = [J + \frac{1}{2}]_q^2 |JM\rangle_q.$$

El producto tensorial de dos RI  $D^{J_1} \otimes D^{J_2}$  se puede descomponer en la suma directa de sus componentes RI  $D^J$ :

$$D^{J_1} \otimes D^{J_2} = \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} \oplus D^J,$$

donde los generadores (coproductos) de la nueva representación  $D^{J_1} \otimes D^{J_2}$  son:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} J_0(1, 2) &= J_0(1) + J_0(2), \\ J_{\pm}(1, 2) &= J_{\pm}(1)q^{\frac{1}{2}J_0(2)} + q^{-\frac{1}{2}J_0(1)}J_{\pm}(2). \end{aligned}$$

Nótese la no conmutatividad de la operación  $D^{J_1} \otimes D^{J_2}$ . La definición de los coeficientes de Clebsch-Gordan (CCG) es similar a la de los CCG clásicos [10], [18], [38] ( $q = 1$ ):

$$(3.7) \quad |J_1 J_2, JM \rangle_q = \sum_{M_1, M_2} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q |J_1 M_1 \rangle_q |J_2 M_2 \rangle_q,$$

$$(3.8) \quad C_2(12)|J_1 J_2, JM \rangle_q = [J + \frac{1}{2}]_q^2 |J_1 J_2 : JM \rangle_q,$$

donde  $\langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q$  denota los coeficientes de Clebsch-Gordan (CGC) para la  $q$ -álgebra  $SU_q(2)$  y  $|J_1 J_2, JM \rangle_q$ ,  $|J_1 M_1 \rangle_q$  y  $|J_2 M_2 \rangle_q$  son los vectores de la base de las representaciones  $D^J$ ,  $D^{J_1}$  y  $D^{J_2}$ , respectivamente. Los CCG satisfacen las propiedades de ortogonalidad:

$$(3.9) \quad \sum_{M_1, M_2} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | J' M' \rangle_q = \delta_{JJ'} \delta_{MM'},$$

y

$$(3.10) \quad \sum_{J, M} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q \langle J_1 M'_1 J_2 M'_2 | JM \rangle_q = \delta_{M_1 M'_1} \delta_{M_2 M'_2},$$

así como las propiedades de simetría:

$$(3.11) \quad (-1)^{J_1+J_2-J} \langle J_1 - M_1 J_2 - M_2 | J - M \rangle_{q^{-1}} = \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q,$$

y

$$(3.12) \quad (-1)^{J_1+J_2-J} \langle J_2 M_2 J_1 M_1 | JM \rangle_{q^{-1}} = \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q.$$

Si calculamos el elemento matricial  $\langle J_1 M_1 J_2 M_2 | C_2(1, 2) | J_1 J_2, JM \rangle_q$  del operador de Casimir directamente y luego utilizando (3.8) obtenemos la siguiente relación de recurrencia (RR) en  $M_1$ ,  $M_2$  para los CCG [32]:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} & q^{-1} \sqrt{[J_2 - M_2 + 1]_q [J_2 + M_2]_q [J_1 + M_1 + 1]_q [J_1 - M_1]_q} \langle J_1 M_1 + 1 J_2 M_2 - 1 | JM \rangle_q + \\ & \sqrt{[J_2 + M_2 + 1]_q [J_2 - M_2]_q [J_1 + M_1]_q [J_1 - M_1 + 1]_q} \langle J_1 M_1 - 1 J_2 M_2 + 1 | JM \rangle_q + \\ & \left( q^{-M_1} [J_2 + M_2 + 1]_q [J_2 - M_2]_q + q^{M_2} [J_1 + M_1 + 1]_q [J_1 - M_1]_q + \right. \\ & \left. + [M + \frac{1}{2}]_q^2 - [J + \frac{1}{2}]_q^2 \right) q^{-\frac{1}{2}(M_2 - M_1 + 1)} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q = 0. \end{aligned}$$

Nótese que la expresión anterior es invariante respecto al cambio  $J_1$  y  $J_2$   $q$  y  $q^{-1}$ , gracias a la propiedad de simetría (3.11) válida para los  $q$ -CCG.

Repitiendo la misma estrategia pero para el elemento matricial  $\langle J_1 M_1 J_2 M_2 | J_0(1) | J_1 J_2, JM \rangle_q$  obtenemos otra RR, pero en  $J$ :

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{[J-M]_q [J+M]_q [J_1+J_2+J+1]_q [J_2-J_1+J]_q [J-J_2+J_1]_q [J_1+J_2-J+1]_q}{[2J+1]_q [2J-1]_q [2J]_q^2}} < J_1 M_1 J_2 M_2 | J - 1M >_q - \\
& - \frac{(q^{\frac{1}{2}J} [J+M+1]_q - q^{-\frac{1}{2}J} [J-M+1]_q) ([2J]_q [2J_2+2]_q - [2]_q [J_2+J_1-J+1]_q [J+J_1-J_2]_q)}{[2J+2]_q [2J]_q [2]_q} < J_1 M_1 J_2 M_2 | JM >_q + \\
& + \sqrt{\frac{[J-M+1]_q [J+M+1]_q [J_1+J_2+J+2]_q [J_2-J_1+J+1]_q [J-J_2+J_1+1]_q [J_1+J_2-J]_q}{[2J+3]_q [2J]_q [2J+2]_q^2}} < J_1 M_1 J_2 M_2 | J + 1M >_q + \\
& + \frac{(q^{\frac{1}{2}(J_2+M_1)} [J_2+M_2+1]_q - q^{\frac{1}{2}(M_1-J_2)} [J_2-M_2+1]_q)}{[2]_q} < J_1 M_1 J_2 M_2 | JM >_q = 0.
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

Esta RR coincide con la obtenida en [35] si intercambiamos  $J_1$  y  $J_2$  y utilizamos la propiedad de simetría (3.11).

Finalmente, de (3.4) deducimos:

$$(3.15) \quad < J_1 M_1, J_2 M_2 | J_{\pm}(1, 2) | J_1 J_2 : JM > = \sqrt{[J \mp M][J \pm M + 1]} < J_1 M_1 J_2 M_2 | JM >_q,$$

de donde se sigue la relación:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(J_1 \pm M_1)(J_1 \mp M_1 + 1)} q^{M_2/2} < J_1 M_1 \mp 1 J_2 M_2 | JM >_q + \\
(3.16) \quad & \sqrt{(J_2 \pm M_2)(J_2 \mp M_2 + 1)} q^{-M_1/2} < J_1 M_1 J_2 M_2 \mp 1 | JM >_q = \\
& = \sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)} < J_1 M_1 J_2 M_2 | JM + 1 >_q
\end{aligned}$$

### 3.1 Los coeficientes de Clebsch-Gordan y los $q$ -polinomios de Hahn.

Comparando la RR (3.13) con la ecuación en diferencias de segundo orden (2.5) que satisfacen los  $q$ -polinomios de Hahn se concluye [36] que los  $q$ -CCG y los  $q$ -polinomios de Hahn están relacionados mediante una expresión [36] completamente análoga a la relación clásica ( $q = 1$ ) [29]:

$$(3.17) \quad < J_1 M_1 J_2 M_2 | JM >_q = (-1)^{s+n} \sqrt{\frac{\rho(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})}{d_n^2}} h_n^{\alpha\beta}(s, N)_{q^{-1}},$$

donde  $s = J_1 - M_1$ ,  $N = J_1 + J_2 - M + 1$ ,  $\alpha = M + J_1 - J_2$ ,  $\beta = M - J_1 + J_2$ ,  $n = J - M$ , y  $\rho(x)$ ,  $d_n$  denotan las funciones peso y la norma de los  $q$ -polinomios  $h_n^{(\alpha, \beta)}(s, N)_{q^{-1}}$ .<sup>2</sup>

Utilizando la expresión anterior podemos obtener el valor  $< J_1 M_1 J_2 M_2 | JJ >_q$  para los CCG:

$$\begin{aligned}
(3.18) \quad & < J_1 M_1 J_2 M_2 | JJ >_q = (-1)^s \sqrt{\frac{\rho(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})}{d_0^2}} = \\
& = (-1)^{J_1 - M_1} q^{-\frac{1}{2}(J+1)(J_1 - M_1) + \frac{1}{4}(J_1 + J_2 - J)(j - J_1 + J_2 + 1)} \times \\
& \times \sqrt{\frac{[J_1 + M_1]_q! [J_2 + M_2]_q! [2J + 1]_q! [J_1 + J_2 - J]_q!}{[J_1 - M_1]_q! [J_2 - M_2]_q! [J_1 - J_2 + J]_q! [J - J_1 + J_2]_q! [J_1 + J_2 + J + 1]_q!}},
\end{aligned}$$

que coincide con el valor obtenido en [32].

<sup>2</sup>Nótese que los  $q$ -polinomios de Hahn están definidos para  $q \rightarrow q^{-1}$ .

Sustituyendo la fórmula explícita para los  $q$ -polinomios de Hahn, (ver apartado 2.3.1), en (3.17) obtenemos el  $q$ -análogo de la fórmula de Racah para los CCG del álgebra  $SU_q(2)$  [33]:

$$\begin{aligned}
 & \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | J M \rangle_q = \\
 & = (-1)^{J_1 - M_1} q^{\frac{1}{2} M_1 (m+1) - \frac{1}{4} (J(J+1) + J_1(J_1+1) - J_2(J_2+1))} \times \\
 (3.19) \quad & \times \sqrt{\frac{[2J+1]_q [J-M]_q! [J+M]_q! [J_1-M_1]_q! [J_2-M_2]_q! [J_1+J_2-J]_q!}{[J_1+J_2+J+1]_q! [J_1-J_2+J]_q! [-J_1+J_2+J]_q! [J_1+M_1]_q! [J_2+M_2]_q!}} \times \\
 & \times \sum_z (-1)^z \frac{[J_1-M_1+z]_q! [J+J_2-M_1-z]_q! q^{\frac{1}{2}z(J+M+1)}}{[z]_q! [J-M-z]_q! [J_1-M_1-z]_q! [J_2-J+M_1+z]_q!}.
 \end{aligned}$$

La suma anterior recorre los valores de  $z$  para los cuales todos los  $q$ -factoriales tienen argumentos positivos. Utilizando la fórmula para los polinomios evaluados en  $s = 0$ , la expresión anterior nos conduce a la fórmula [33]:

$$\begin{aligned}
 & \langle J_1 J_1 J_2 M_2 | J M \rangle_q = q^{-\frac{1}{2} J_1 (J-M) + \frac{1}{4} (J_1+J_2-J)(J-J_1+J_2-1)} \times \\
 (3.20) \quad & \times \sqrt{\frac{[2J+1]_q [J+M]_q! [2J_1]_q! [J_2-M_2]_q! [j+J_2-J_1]_q!}{[J-M]_q! [J_2+M_2]_q! [J_1-J_2+J]_q! [J_1+J_2-J]_q! [J_1+J_2+J+1]_q!}}.
 \end{aligned}$$

Otra consecuencia inmediata de la relación (3.17) es que la relación de ortogonalidad para los  $q$ -polinomios de Hahn es equivalente a la condición de ortogonalidad de los CCG (3.9). La segunda condición de ortogonalidad (3.10) de los CCG se transforma a su vez en la condición de *familia completa* para los  $q$ -polinomios de Hahn:

$$(3.21) \quad \sum_n h_n^{\alpha\beta}(s, N, q) h_n^{\alpha\beta}(s', N, q) / d_n^2 = \delta_{ss'} \{ \rho(s) \Delta x(s - \frac{1}{2}) \}^{-1}.$$

La propiedad de simetría de los CCG (3.11) es una consecuencia directa de la propiedad de simetría de los  $q$ -polinomios de Hahn:

$$(3.22) \quad (-1)^n q^{n(\alpha+\beta+N)} h_n^{\beta\alpha}(N-s-1, N, q^{-1}) = h_n^{\alpha\beta}(s, N, q).$$

La relación de recurrencia en  $J$  para los CCG (3.14) se transforma en la RRTT de los  $q$ -polinomios de Hahn. Las fórmulas de diferenciación para los  $q$ -polinomios de Hahn (ver apartado 2.3.3) se transforman en las RR de los CCG (3.16).

Antes de pasar a ver la relación de los CCG y los polinomios duales de Hahn es fácil comprobar que también tienen lugar la siguiente representación en función de los polinomios de Hahn  $h_n^{\alpha\beta}$  y los  $\tilde{h}_n^{\mu\nu}$ .

$$(3.23) \quad \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | J M \rangle_q = (-1)^{N-s-1} \sqrt{\frac{\rho(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})}{d_n^2}} h_n^{\alpha\beta}(s, N)_q,$$

donde  $s = J_2 - M_2$ ,  $N = J_1 + J_2 - M + 1$ ,  $\alpha = M - J_1 + J_2$ ,  $\beta = M + J_1 - J_2$ ,  $n = J - M$ , y  $\rho(x)$ ,  $d_n$  denotan las funciones peso y la norma de los  $q$ -polinomios  $h_n^{(\alpha,\beta)}(s, N)_q$ . Para asegurarse de la veracidad de esta fórmula es suficiente comprobar que la ecuación en diferencias (2.16) para los polinomios de Hahn se transforma nuevamente en la relación (3.13) para los CCG.

### 3.2 Los coeficientes de Clebsch-Gordan y los $q$ -polinomios duales de Hahn.

Veamos ahora la relación de los CCG y los  $q$ -polinomios duales de Hahn.

Comparando la RR (3.14) con la ecuación en diferencias de segundo orden que satisfacen los  $q$ -polinomios duales de Hahn (2.5) se concluye [3] que los  $q$ -CCG y los  $q$ -polinomios duales de Hahn están relacionados mediante una expresión [3] completamente análoga a la relación clásica ( $q = 1$ ) [29]:

$$(3.24) \quad (-1)^{J_1+J_2-J} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q = \sqrt{\frac{\rho(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})}{d_n^2}} W_n^{(c)}(s, a, b)_{q^{-1}}.$$

$$|J_1 - J_2| < M, \quad n = J_2 - M_2, \quad s = J, \quad a = M, \quad c = J_1 - J_2, \quad b = J_1 + J_2 + 1.$$

donde  $\rho(x)$  y  $d_n$  denotan las funciones peso y la norma de los  $q$ -polinomios duales de Hahn  $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_{q^{-1}}$ .<sup>3</sup> Debemos destacar que el *factor de fase*  $(-1)^{J_1+J_2-J}$  en (3.24) se obtiene al comparar los valores de  $W_n^{(c)}(s, a, b)$  en los extremos de del intervalo de ortogonalidad con los correspondientes valores de los CCG en  $J = M$  y  $J = J_1 + J_2 + 1$ , respectivamente.

Utilizando (3.24) y la expresión explícita para los  $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_{q^2}$  obtenemos una fórmula análoga a la de Racah (3.19):

$$(3.25) \quad \begin{aligned} & \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q q^{-\frac{1}{4}\{J(J+1) - J_1(J_1+1) + J_2(J_2+1)\} + \frac{1}{2}(M+1)J_2 + \frac{1}{2}J(J_2 - M_2)} = \\ & = (-1)^{J_1+J_2-J} \sqrt{\frac{[J_2 - M_2]_q! [J_1 - M_1]_q! [J - M]_q! [J_2 + M_2]_q!}{[J + M]_q!}} \times \\ & \times \sqrt{\frac{[J + J_1 + J_2 + 1]_q! [J_2 - J_1 + J]_q! [J_2 + J_1 - J]_q! [2J + 1]_q!}{[J_1 + M_1]_q! [J_1 - J_2 + J]_q!}} \times \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\frac{1}{2}(k^2 + 2Jk - (J_2 - M_2 - 1)k)} [J + J_1 - J_2 + k]_q! [J + M + k]_q!}{[k]_q! [2J + 1 + k]_q! [J - M_1 - J_2 + k]_q! [J - J_1 + M_2 + k]_q!} \times \\ & \times \frac{[2J - J_2 + M_2 + k]_q! [2J - J_2 + M_2 + 2k + 1]_q}{[J_2 - M - 2 - k]_q! [J + J_1 + M_2 + k + 1]_q! [J_1 + J_2 - J - k]_q!}. \end{aligned}$$

De la expresión (3.24) vemos que todas las propiedades de los  $q$ -polinomios se pueden interpretar en términos de las  $q$ -CCG y viceversa. Por ejemplo, la relación de ortogonalidad para los los  $q$ -polinomios duales de Hahn se transforma en la relación de ortogonalidad de los CCG (3.10), mientras que la otra (3.9) se convierte en la condición de *familia completa* para los  $q$ -polinomios duales de Hahn

$$(3.26) \quad \sum_n W_n^{(c)}(s, a, b)_q W_n^{(c)}(s', a, b)_q / d_n^2 = \delta_{ss'} \{\rho(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})\}^{-1}.$$

La RRTT para los  $q$ -polinomios  $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_{q^{-1}}$  es equivalente a la relación de recurrencia de los CCG en  $M_1$  y  $M_2$  (3.13).

Utilizando (3.24) y las fórmulas de diferenciación para los  $q$ -polinomios duales de Hahn obtenemos las siguientes relaciones para los CCG:

$$(3.27) \quad \begin{aligned} & \sqrt{\frac{[J - M + 1]_q [J_1 + J_2 + J + 2]_q [J_2 - J_1 + J + 1]_q [2J + 2]_q}{[2J + 3]_q [J_2 - M_2]_q}} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | J + 1 M \rangle_q + \\ & + q^{\frac{1}{2}(J+1)} \sqrt{\frac{[J + M + 1]_q [J_1 + J_2 - J]_q [J - J_2 + J_1 + 1]_q [2J + 2]_q}{[2J + 1]_q [J_2 - M_2]_q}} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q = \\ & = q^{\frac{1}{2}(-J_2 - M_2 + M + \frac{1}{2})} [2J + 2]_q \langle J_1 M_1 J_2 - \frac{1}{2} M_2 + \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} \rangle_q, \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Nótese que los  $q$ -polinomios duales de Hahn están definidos para  $q \rightarrow q^{-1}$ .  $W_n^{(c)}(s, a, b)_q \equiv W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$ .

y

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{[J-M]_q [J_1+J_2+J+1]_q [J_2-J_1+J]_q [2J]_q}{[2J-1]_q [J_2-M_2+1]_q}} < J_1 M_1 J_2 M_2 | J-1 M \rangle_q + \\
 (3.28) \quad & + q^{\frac{1}{2}J} \sqrt{\frac{[J+M]_q [J_1+J_2-J+1]_q [J-J_2+J_1]_q [2J]_q}{[2J+1]_q [J_2-M_2+1]_q}} < J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q = \\
 & = q^{\frac{1}{2}(-J_2-M_2+M-\frac{1}{2})} [2J]_q < J_1 M_1 J_2 + \frac{1}{2} M_2 - \frac{1}{2} | J - \frac{1}{2} M - \frac{1}{2} \rangle_q .
 \end{aligned}$$

Ambas fórmulas (3.27) y (3.28) pueden obtenerse utilizando el  $q$ -análogo de la teoría cuántica del momento angular ([32],[33],[34] y [35]). Para ello es necesario calcular el elemento matricial  $\langle J_1 M_1 J_2 M_2 | T_{\mu}^{\frac{1}{2}}(2) | J'_1 J'_2; J' M' \rangle_q$ ; utilizando, por una parte el Teorema de Wigner-Eckart para el álgebra  $SU_q(2)$  [32]<sup>4</sup> y, por otra, calculándolo directamente (para más detalles ver [3]).

De la ecuación (3.24) también podemos ver que al polinomio  $W_n^{(c)}(s, a, b)$  con  $n = 0$  le corresponde el CGC con el máximo valor de la *proyección del momento angular*  $J_2$ , o sea,  $M_2 = J_2$ . Por tanto, denominaremos la relación (3.24) *la relación hacia atrás (backward)* (ya que para  $n = 0$  obtenemos el CGC en  $M_2 = J_2$ , para  $n = 1$ , el CCG en  $M_2 = J_2 - 1$ , y así sucesivamente). Sin embargo, existe otra posibilidad correspondiente al caso contrario, o sea, cuando el polinomio de grado  $n = 0$  es proporcional al CGC con el mínimo valor de la *proyección del momento angular*  $J_2$ ,  $M_2 = -J_2$ . Esta relación la denominaremos *la relación hacia delante (forward)* (ya que para  $n = 0$  obtenemos el CGC en  $M_2 = -J_2$ , para  $n = 1$  el CCG en  $M_2 = -J_2 + 1$ , y así sucesivamente).

Si comparamos la RR (3.14) con la ecuación en diferencias de segundo orden que satisfacen los  $q$ -polinomios duales de Hahn (2.5) obtenemos que los  $q$ -CCG se pueden expresar mediante los  $q$ -polinomios duales de Hahn por la fórmula [3]:

$$(3.29) \quad \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q = \sqrt{\frac{\rho(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})}{d_n^2}} W_n^{(c)}(s, a, b)_q ,$$

$$|J_1 - J_2| < -M, n = J_2 + M_2, s = J, a = -M, c = J_1 - J_2, b = J_1 + J_2 + 1.$$

Como antes,  $\rho(x)$  y  $d_n$  denotan las funciones peso y la norma de los  $q$ -polinomios  $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$ , respectivamente.

Nótese que, si en la relación anterior, realizamos el cambio de parámetros:  $M_1 = -M_1$ ,  $M_2 = -M_2$ ,  $M = -M$  y  $q = q^{-1}$ , el segundo miembro de (3.29) coincide con el segundo miembro de (3.24). Ésto nos conduce a la relación de simetría de los CCG (3.12).

Para concluir este apartado vamos a escribir unas tablas donde las correspondientes propiedades de los  $q$ -polinomios de Hahn  $h_n^{(\alpha, \beta)}(s, N)_q$ , definidos en la red  $q^s$  [36] y los  $q$ -polinomios duales de Hahn  $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$ , definidos en la red  $x(s) = [s]_q [s+1]_q$  [3] se comparan con las de los CCG de la  $q$ -álgebra  $SU_q(2)$ . Ésto, además, nos permitirá descubrir la interrelación entre ambas familias de  $q$ -polinomios.

Comparando (3.17) y (3.24) encontramos la siguiente interrelación entre los  $q$ -polinomios de Hahn  $h_n^{(\alpha, \beta)}(s, N)_q$  en la red exponencial  $x(s) = q^s$  y los  $q$ -polinomios duales de Hahn  $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$

---

<sup>4</sup>El operador  $T_{\mu}^{\frac{1}{2}}(2)$  es un operador tensorial de rango  $\frac{1}{2}$  que opera en las variables  $J_2, M_2$ .

Tabla 1: Los CCG y los *q*-análogos de los polinomios de Hahn.

$W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$ ó $h_n^{(\alpha, \beta)}(s, N)_q$	$\langle J_1 M_1 J_2 M_2   JM \rangle_q$
Ecuación en diferencias de los $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$ y RRTT para los $h_n^{(\alpha, \beta)}(s, N)_q$	RR (3.14) de los CCG
Ecuación en diferencias de los $h_n^{\alpha, \beta}(s, N)_q$ y RRTT para los $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$	RR (3.13) de los CCG
Fórmulas de diferenciación de los $h_n^{\alpha, \beta}(s, N)_q$	RR (3.16) para los CCG
Fórmulas de diferenciación de los $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$	RR (3.27) y (3.28) de los CCG
Equivalencia de (3.24) y (3.29) para los $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$	Simetría (3.12) de los CCG
Simetría (3.22) de los $h_n^{\alpha, \beta}(s, N)_q$	Simetría (3.11) de los CCG
Ortogonalidad y Completitud	Ortogonalidad (3.10) y (3.9)

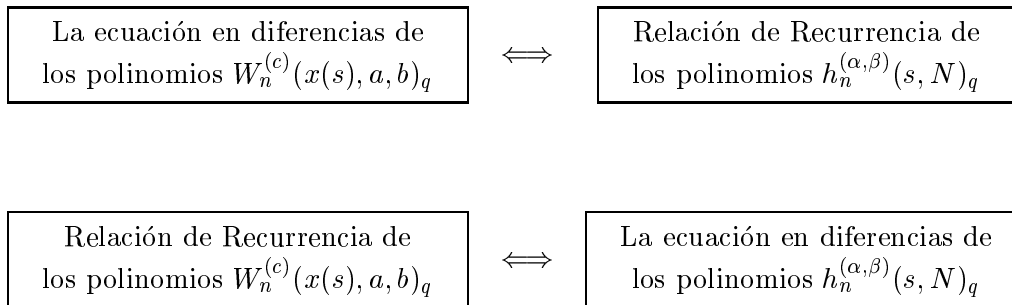
en la red  $x(s) = [s]_q[s+1]_q$ :

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{s+n} q^{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha}{2}(1+2n-N) - \frac{\beta}{4}(7+4n+4s) - \frac{1}{2}(3-n+n^2-3N+2N^2+7s-2Ns-s^2)} h_n^{(\alpha, \beta)}(s, N)_q = \\
 (3.30) \quad & = \frac{q^n [s]_q! [N-s-1]_q! [n+\beta]_q!}{[n]_q! [N-n-1]_q! [s+\beta]_q!} W_s^{(\frac{\beta-\alpha}{2})} \left( t_n, \frac{\beta+\alpha}{2}, \frac{\beta+\alpha}{2} + N \right)_{q^{-1}} \\
 & \left( t_n = s_n(s_n+1), s_n = \frac{\beta+\alpha}{2} + n, s, n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \right).
 \end{aligned}$$

Si tomamos el límite  $q \rightarrow 1$ , la relación anterior se transforma en la relación clásica entre los polinomios clásicos de Hahn  $h_n^{(\alpha, \beta)}(s, N)$  y los polinomios clásicos duales de Hahn  $W_n^{(c)}(x(s), a, b)$  [29] (pág. 76, (3.5.14)). Debemos destacar que la relación anterior se puede deducir directamente de la comparación de las relaciones de ortogonalidad para ambas familias de polinomios en el mismo sentido al expuesto en [29, pág. 38].

Asimismo, comparando las ecuaciones en diferencias y las RRTT que ambas familias de polinomios  $h_n^{\alpha, \beta}(s, N)_q$  y  $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$  satisfacen se deduce las siguientes relaciones de dualidad:

Esquema 1: Dualidad de los polinomios de Hahn.





### 3.3 Representación como serie hipergeométrica.

Vamos a utilizar la expresión (3.23)<sup>5</sup> y la representación como  $q$ -serie hipergeométrica de los  $q$ -polinomios de Hahn obtenemos:

$$\begin{aligned}
 (3.31) \quad & (-1)^{J_1-M_1} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q = \\
 & = \sqrt{\frac{\rho(s)q^s \kappa_q}{d_n^2} \frac{(\beta+1|q)_n (1-N|q)_n}{q^{\frac{n}{2}(2\alpha+\beta+N+\frac{n-1}{2})} [n]_q!}} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -n, -s, n+\alpha+\beta+1 \\ \beta+1, 1-N \end{matrix} ; q, q^{\frac{1}{2}(s-N-\alpha)} \right) = \\
 & = \sqrt{\frac{\rho(s)q^s \kappa_q}{d_n^2} \frac{(\beta+1|q)_n (N+\alpha+\beta+1|q)_n}{q^{\frac{n}{2}(N+\alpha+\frac{n(n+1)}{2})} [n]_q!}} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -n, s+\beta+1, n+\alpha+\beta+1 \\ \beta+1, N+\alpha+\beta+1 \end{matrix} ; q, q^{\frac{1}{2}(s+1-N)} \right),
 \end{aligned}$$

o, en función de las series básicas,

$$\begin{aligned}
 (3.32) \quad & (-1)^{J_2-M_2} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_q = \sqrt{\frac{\rho(s)q^s \kappa_q}{d_n^2}} \times \\
 & \times \frac{(-1)^n q^{-\frac{n}{2}(\alpha+N)} (q^{\beta+1}; q)_n (q^{1-N}; q)_n}{\kappa_q^n(q; q)_n} {}_3\varphi_2 \left( \begin{matrix} q^{-n}, q^{-s}, q^{n+\alpha+\beta+1} \\ q^{\beta+1}, q^{1-N} \end{matrix} ; q, q \right) = \\
 & = \sqrt{\frac{\rho(s)q^s \kappa_q}{d_n^2} \frac{(-1)^n q^{\frac{n}{2}(\alpha+N)} (q^{\beta+1}; q)_n (q^{1-N}; q)_n}{\kappa_q^n(q; q)_n}} {}_3\varphi_2 \left( \begin{matrix} q^{-n}, q^{-s}, q^{n+\alpha+\beta+1} \\ q^{\beta+1}, q^{1-N} \end{matrix} ; q, q^{s-N-\alpha+1} \right),
 \end{aligned}$$

donde  $s = J_2 - M_2$ ,  $N = J_1 + J_2 - M + 1$ ,  $\alpha = M - J_1 + J_2$ ,  $\beta = M + J_1 - J_2$ ,  $n = J - M$ , y  $\rho(x)$ ,  $d_n$  denotan las funciones peso y la norma de los polinomios  $h_n^{(\alpha, \beta)}(s, N)_q$ .

Utilizando (3.24) y la representación como  $q$ -serie hipergeométrica de los polinomios duales de Hahn obtenemos otra representación equivalente:

$$\begin{aligned}
 (3.33) \quad & (-1)^{J_1+J_2-J} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_{q^{-1}} = \sqrt{\frac{\rho(s)[2s+1]_q}{d_n^2}} (a-b+1|q)_n \times \\
 & \times \frac{(a+c+1|q)_n}{q^{-n(b-c-1+\frac{1}{2}(n-1))} [n]_q!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -n, a-s, a+s+1 \\ a-b+1, a+c+1 \end{matrix} ; q, q^{\frac{1}{2}(b-c-n)} \right),
 \end{aligned}$$

o, en función de las series básicas,

$$\begin{aligned}
 (3.34) \quad & (-1)^{J_1+J_2-J} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_{q^{-1}} = \sqrt{\frac{\rho(s)[2s+1]_q}{d_n^2}} q^{\frac{n}{2}(3a-b+c+1+n)} \times \\
 & \times \frac{(q^{a-b+1}; q)_n (q^{a+c}; q)_n}{\kappa_q^n(q; q)_n} {}_3\varphi_2 \left( \begin{matrix} q^{-n}, q^{a-s}, q^{a+s+1} \\ q^{a-b+1}, q^{a+c+1} \end{matrix} ; q, q \right),
 \end{aligned}$$

donde  $|J_1 - J_2| < M$ ,  $n = J_2 - M_2$ ,  $s = J$ ,  $a = M$ ,  $c = J_1 - J_2$ ,  $b = J_1 + J_2 + 1$  y  $\rho(x)$ ,  $d_n$  denotan las funciones peso y la norma de los polinomios  $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$ .

## 4 El álgebra cuántica $SU_q(1, 1)$ y los $q$ -coeficientes de Clebsch-Gordan.

En este apartado consideraremos el álgebra  $SU_q(1, 1)$  (para más detalle ver [21] y [40]).

---

<sup>5</sup>Obviamente la expresión (3.17) nos conduce a una representación equivalente.

Es conocido ([40] y [21]) que el álgebra cuántica  $SU_q(1, 1)$  se genera por los operadores  $K_0$ ,  $K_+$  y  $K_-$  con las siguientes propiedades [21]:

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_+, K_-] = -[2K_0]_q,$$

$$K_0^\dagger = K_0, \quad K_{\pm}^\dagger = K_{\mp}.$$

Además, el álgebra  $SU_q(1, 1)$  es un álgebra no compacta y, por tanto, sus Representaciones Irreducibles (RI) unitarias no son de dimensión finita. Las RI se pueden clasificar en dos series: las series continuas y las discretas. En este apartado vamos a considerar solamente las series discretas y, en particular, las *series discretas positivas*  $D^{j+}$ . Los vectores base  $|jm\rangle_q$ ,  $m = j+1, j+2, \dots$ , de las RI  $D^{j+}$  se obtienen a partir del *vector mínimo*  $|jj+1\rangle$ , definido por:

$$K_-|jj+1\rangle = 0, \quad K_0|jj+1\rangle = (j+1)|jj+1\rangle, \quad \langle jj+1|jj+1\rangle = 1,$$

mediante la fórmula:

$$|jm\rangle = \sqrt{\frac{[2j+1]_q!}{[j+m]_q![m-j-1]_q!}} K_+^{m-j-1}|jj+1\rangle.$$

La forma explícita de la RI es:

$$\langle jm'|K_0|jm\rangle_q = m\delta_{m'm}, \quad \langle jm'|K_{\pm}|jm\rangle_q = \sqrt{[m \mp j]_q[m \pm j \pm 1]_q} \delta_{m'm \pm 1}.$$

El operador de Casimir (que es un invariante de dicha álgebra) se define mediante las expresiones:

$$(4.1) \quad C_2 = -K_+J_- + [K_0]_q[K_0 - 1]_q, \quad C_2|jm\rangle = [j]_q[j+1]_q|jm\rangle.$$

El producto tensorial  $D^{j_1+} \otimes D^{j_2+}$  de dos RI  $D^{j_1+}$  y  $D^{j_2+}$  se puede descomponer en la suma directa de sus componentes RI  $D^{j+}$ :

$$D^{j_1+} \otimes D^{j_2+} = \sum_{j=j_1+j_2+1}^{\infty} \oplus D^{j+}.$$

donde los generadores (coproductos) de la nueva representación  $D^{j_1+} \otimes D^{j_2+}$  son:

$$(4.2) \quad K_0(1, 2) = K_0(1) + K_0(2), \quad K_{\pm}(1, 2) = J_{\pm}(1)q^{\frac{1}{2}K_0(2)} + K_{\pm}(2)q^{-\frac{1}{2}K_0(1)}.$$

La definición de los coeficientes de Clebsch-Gordan (CCG) es similar a la de los CCG clásicos [10] ( $q = 1$ ):

$$(4.3) \quad |j_1j_2, jm\rangle_q = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle_q |j_1m_1\rangle_q |j_2m_2\rangle_q,$$

$$(4.4) \quad C_2(12)|j_1j_2, jm\rangle_q = [j]_q[j+1]_q|j_1j_2, jm\rangle_q,$$

donde  $\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle_q$  denota los coeficientes de Clebsch-Gordan (CGC) para la  $q$ -álgebra  $SU_q(1, 1)$  y  $|j_1j_2, jm\rangle_q$ ,  $|j_1m_1\rangle_q$  y  $|j_2m_2\rangle_q$  son los vectores de la base de las representaciones  $D^j$ ,  $D^{j_1}$  y  $D^{j_2}$ , respectivamente. Si calculamos el elemento matricial  $\langle j_1m_1j_2m_2|C(1, 2)|j_1j_2, jm\rangle$  directamente, y luego, utilizando (4.4), obtenemos para los CCG del álgebra  $SU_q(1, 1)$  la siguiente relación de recurrencia a tres términos (RRTT) en  $m_1, m_2$  [37]:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} & \sqrt{[m_2 - j_2 - 1]_q[j_2 + m_2]_q[m_1 - j_1]_q[j_1 + m_1 + 1]_q} \\ & \quad \langle j_1m_1 + 1j_2m_2 - 1|jm\rangle_q + \\ & q\sqrt{[m_2 - j_2]_q[j_2 + m_2 + 1]_q[j_1 + m_1]_q[m_1 - j_1 - 1]_q} \\ & \quad \langle j_1m_1 - 1j_2m_2 + 1|jm\rangle_q + \\ & \left( q^{-m_1}[j_2 + m_2 + 1]_q[m_2 - j_2]_q + q^{m_2}[j_1 + m_1 + 1]_q[m_1 - j_1]_q + \right. \\ & \left. + [j + \frac{1}{2}]_q^2 - [m + \frac{1}{2}]_q^2 \right) q^{\frac{1}{2}(m_1 - m_2 + 1)} \langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle_q = 0. \end{aligned}$$

Comparando, por ejemplo, la RR (4.5) con la RRTT que satisfacen los  $q$ -polinomios duales de Hahn (2.5) concluimos [3] que los  $q$ -CCG para el álgebra  $SU_q(1, 1)$  y los  $q$ -polinomios duales de Hahn están relacionados mediante una expresión completamente análoga a la relación clásica ( $q = 1$ ):

$$(4.6) \quad (-1)^{m-j-1} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle_q = \frac{\sqrt{\rho(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})}}{d_n} W_n^{(c)}(x(s), a, b)_{q^{-1}},$$

$$n = m_1 - j_1 - 1, s = j, a = j_1 + j_2 + 1, c = j_1 - j_2, b = m.$$

El factor  $(-1)^{m-j-1}$  se obtiene al comparar los valores de  $W_n^{(c)}(s, a, b)$  en los extremos del intervalo de ortogonalidad ( $s = a$ ) con los correspondientes valores de los CCG. Nótese que si realizamos el cambio de variables:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} J_1 &= \frac{m+j_1-j_2-1}{2}, & M_1 &= \frac{m_1-m_2+j_1+j_2+1}{2}, & J &= j, \\ J_2 &= \frac{m-j_1+j_2-1}{2}, & M_2 &= \frac{m_2-m_1+j_1+j_2+1}{2}, & M &= j_1 + j_2 + 1, \end{aligned}$$

la RRTT (4.5) se transforma en la RRTT (3.13). Además, si comparamos los valores de los CCG para ambas  $q$ -álgebras expresados mediante las fórmulas (3.24) y (4.6), observamos que los segundos miembros de las mismas son idénticos. Luego, para los CCG de las  $q$ -álgebras  $SU_q(2)$  y  $SU_q(1, 1)$  tiene lugar la siguiente identidad:

$$(4.8) \quad \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle_{su_q(2)} = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle_{su_q(1,1)}.$$

Dicha relación fué obtenida en [37] mediante la simple comparación de las RRTT (4.5) y (3.13). La identidad anterior junto a (4.7) nos permiten obtener una gran cantidad de propiedades y relaciones de recurrencia de los CCG para el álgebra  $SU_q(1, 1)$  a partir de las propiedades y relaciones de recurrencia de los CCG del álgebra  $SU_q(2)$ . Nosotros nos limitaremos a escribir alguna de ellas.

#### 4.1 Una fórmula explícita para los CCG del álgebra $SU_q(1, 1)$ .

Utilizando la fórmula explícita para los  $q$ -polinomios duales de Hahn y la relación (4.6) obtenemos:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} &(-1)^{m-j-1} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle_q q^{-\frac{1}{2}(j(j+1)+j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1))} = \\ &= q^{\frac{1}{2}(m-1)(j_1+1)-\frac{1}{2}j(m_1-j_1-1)} \sqrt{\frac{[j+m]_q! [m-j-1]_q! [m_2+j_2]_q!}{[j_1+m_1]_q!}} \\ &\sqrt{\frac{[j-j_1-j_2-1]_q! [j_2-j_1+j]_q! [m_1-j_1-1]_q! [m_2-j_2-1]_q! [2j+1]_q!}{[j+j_1+j_2+1]_q! [j_1-j_2+j]_q!}} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2j+j_1+1-m+k]_q! [j-1+j_2+j+k+1]_q!}{[k]_q! [2J+1+k]_q! [m_1-j_1-1-k]_q! [j-m_1-j_2+k]_q!} \times \\ &\times \frac{[j+j_1-j_2+k]_q! [2j+j_1-m_1+2k+2]_q q^{\frac{1}{2}(k^2+2jk-(m_1-j_1-2)k)}}{[m-j-1-k]_q! [j-m_1+j_2+k]_q! [j+j_1+m_2+k+1]_q!}. \end{aligned}$$

De (4.6) podemos obtener la representación de los CCG del álgebra  $SU_q(1, 1)$  como  $q$ -funciones

hipergeométricas:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} & (-1)^{m-j-1} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle_{q^{-1}} = \frac{\sqrt{\rho(s)[2s+1]_q}}{d_n} \times \\ & \times \frac{(a-b+1|q)_n (a+c+1|q)_n}{q^{n(s+\frac{1}{2}(n-1))-\frac{1}{2}(c+a-b+1)} [n]_q!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -n, a-s, a+s+1 \\ a-b+1, a+c+1 \end{matrix} ; q, q^{(b-c-n)} \right) = \\ & = \frac{\sqrt{\rho(s)[2s+1]_q} q^{\frac{n}{2}(3a-b+c+1+n)} (q^{a-b+1}; q)_n (q^{a+c}; q)_n}{d_n \kappa_q^n(q; q)_n} {}_3\varphi_2 \left( \begin{matrix} q^{-n}, q^{a-s}, q^{a+s+1} \\ q^{a-b+1}, q^{a+c+1} \end{matrix} ; q, q \right), \end{aligned}$$

donde  $n = m_1 - j_1 - 1$ ,  $s = j$ ,  $a = j_1 + j_2 + 1$ ,  $b = m$ ,  $c = j_1 - j_2$  y  $\rho(x)$ ,  $d_n$  denotan las funciones peso y la norma de los  $q$ -polinomios duales de Hahn  $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$ .

Para finalizar este apartado debemos destacar que los resultados aquí obtenidos se pueden generalizar cuando se consideran las series negativas de RI  $D^{j-}$ . Además, todas las fórmulas de recurrencia, las diferentes fórmulas explícitas, representaciones hipergeométricas, etc, conocidas para los CCG del álgebra cuántica  $SU_q(2)$  se pueden escribir, gracias a la identidad (4.8), para el  $q$ -álgebra  $SU_q(1, 1)$ , obteniendo así una gran cantidad de nuevas relaciones para la misma. Por ejemplo, echando mano de la expresión (3.30) y la relación (4.6) se obtiene una expresión de los CCG del álgebra  $SU_q(1, 1)$  en términos de los polinomios de Hahn:

$$(4.11) \quad \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle_q = (-1)^{N-s-1} \sqrt{\frac{\rho(s)\Delta x(s-\frac{1}{2})}{d_n^2}} h_n^{\alpha\beta}(s, N)_q,$$

donde  $s = m_1 - j_1 - 1$ ,  $N = m - j_1 - j_2 - 1$ ,  $\alpha = 2j_2 + 1$ ,  $\beta = 2j_1 + 1$ ,  $n = j - j_1 - j_2 - 1$ , y  $\rho(x)$ ,  $d_n$  denotan las funciones peso y la norma de los  $q$ -polinomios  $h_n^{(\alpha,\beta)}(s, N)_q$ . Para asegurarse de la veracidad de esta fórmula basta comprobar que la ecuación en diferencias (2.16) para los polinomios de Hahn se transforma nuevamente en la relación (4.5) para los CCG.

## Referencias

- [1] R. Álvarez-Nodarse, *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios*. Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza (en prensa).
- [2] R. N. Álvarez, D. Bonatsos and Yu.F. Smirnov,  $q$ -Deformed vibron model for diatomic molecules. *Physical Review A*. **50** (1994) 1088-1095.
- [3] R. Álvarez-Nodarse and Yu.F. Smirnov,  $q$ -Dual Hahn polynomials on the non-uniform lattice  $x(s) = [s]_q [s+1]_q$  and the  $q$ -algebras  $SU_q(1, 1)$  and  $SU_q(2)$ . *J. Phys. A: Math. and Gen.* **29** (1996) 1435-1451.
- [4] R. Askey and S. K. Suslov, The  $q$ -harmonic oscillator and an analogue of the Charlier polynomials. *J. Phys. A: Math. and Gen.* **26**, (1993), L693-L698.
- [5] R. Askey y S. K. Suslov: The  $q$ -harmonic oscillator and the Al-Salam and Carlitz polynomials. *Lett. Math. Phys.* **29** (1993), 123-132.
- [6] R. Askey, N. M. Atakishiyev y S. K. Suslov, An analog of the Fourier transformation for a  $q$ -harmonic oscillator. *Symmetries in science, VI* (Bregenz, 1992), Plenum, Nueva York, 1993, 57-63.
- [7] N. M. Atakishiyev and S. K. Suslov, Difference analogs of the harmonic oscillator. *Theoretical and Mathematical Physics* **85**, (1991), 442-444.
- [8] N. M. Atakishiyev and S. K. Suslov, A realization of the  $q$ -harmonic oscillator. *Theoretical and Mathematical Physics* **87**, (1991), 1055-1062.
- [9] L. C. Biedenharn, The quantum group  $SU_q(2)$  and a  $q$ -analogue of the boson operators. *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, (1989), L873-L878.

- [10] L. C. Biedenharn and J. D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Addison Wesley, Reading Mass. (1981).
- [11] D. Bonatsos, E. N. Argyres, S. B. Drenska, Raychev, R. P. Roussev and Yu. F. Smirnov, The  $SU_q(2)$  description of rotational Spectra and its relation to the variable moment of the inertia model. *Phys. Lett.* **251B**, 477-482 (1990).
- [12] D. Bonatsos, S. B. Drenska, P. P. Raychev, R. P. Roussev and Yu. F. Smirnov, Description of superdeformed bands by the quantum algebra  $SU_q(2)$ . *J.Phys. G: Nucl. Part Phys.* **17**, (1991), L67-L74.
- [13] D. Bonatsos, P. P. Raychev, R. P. Roussev and Yu. F. Smirnov, Description of rotational molecular spectra by the quantum algebra  $SU_q(2)$ . *Chem. Phys. Lett.* **175**, (1990), 300-306.
- [14] D. Bonatsos, E. N. Argyres and P. P. Raychev,  $SU_q(1,1)$  description of vibrational molecular spectra. *J.Phys. A: Math. Gen.* **24**, (1991), L403-L408.
- [15] M. C. Boscá and J. S. Dehesa, Rational Jacobi matrices and certain quantum mechanical problems. *J.Phys. A: Math. and Gen.* **17**, (1984), 3487-3491.
- [16] J. S. Dehesa y A.F. Nikiforov, The orthogonality properties of  $q$ -polynomials. *Integral Transform. Spec. Funct.* **4** (1996), 343-354.
- [17] V. G. Drinfel'd, Quantum Groups. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Berkeley 1986, 798-820. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island 1987.
- [18] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princenton Univ. Press. 1960.
- [19] L. D. Faddeev, Integrable Models in (1+1)-dimensional quantum field theory. *Les Houches Lectures*. Amsterdam, Elsevier, (1982), 563-573.
- [20] G. Gasper y M. Rahman: *Basic Hypergeometric Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [21] A. U. Klimyk, Yu. F. Smirnov and B. Gruber, Representations of the quantum algebras  $U_q(su(2))$  and  $U_q(su(1,1))$  *Symmetries in Science V*, Edited by B.Gruber et al. Plenum Press, New York, 1991.
- [22] H. T. Koelink, Askey-Wilson polynomials and the quantum  $SU(2)$  group: Survey and Applications. *Acta Appl. Math.* **44** (1996), 295-352.
- [23] T. H. Koornwinder: Orthogonal polynomials in connection with quantum groups. En *Orthogonal Polynomials. Theory and Practice*. P.Nevai ed. **Vol. 294**. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990, 257-292.
- [24] T. H. Koornwinder, Compact quantum groups and  $q$ -special functions. En: *Representations of Lie groups and quantum groups*. V. Baldoni & M.A. Picardello (Eds.) Pitman Research Notes in Mathematics series 311, Longman Scientific & Technical, (1994), 46-128.
- [25] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, *Lecture Notes in Physics*. **151** Springer-Verlag, Berlin, 1981, 61-71.
- [26] A.J. Macfarlane, On  $q$ -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group  $SU_q(2)$ . *J.Phys. A: Math. Gen.* **22**, (1989), 4581-4588.
- [27] A. A. Malashin and Yu. F. Smirnov, Irreducible representations of the  $SU_q(3)$  quantum algebra: the connection between  $U$  and  $T$  bases. En *Quantum Symmetries* H.D.Doebner and V.K.Dobrev Ed. World Scientific, Singapore, 1993, 223-228.
- [28] A. A. Malashin and Yu.F.Smirnov,  $q$ -Ánálogo de los polinomios de Racah polynomials en la red  $x(s) = [s]_q[s+1]_q$  y su conexión con los símbolos 6-j de las álgebras cuánticas  $SU_q(2)$  y  $SU_q(1,1)$ . A.A. Malashin. Tesis de Master en Física y Matemáticas. Universidad Estatal de Moscú. *M.V. Lomonosov*. Moscú, Enero 1992. (En Ruso).
- [29] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov and V. B. Uvarov: *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*. *Springer Series in Computational Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [30] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov, Polynomial Solutions of hypergeometric type difference Equations and their classification. *Integral Transform. Spec. Funct.* **1** (1993), 223-249.

- [31] P. P. Raychev, R. P. Roussev and Yu. F. Smirnov: The quantum algebra  $SU_q(2)$  and rotational spectra of deformed nuclei. *J.Phys. G: Nucl. Part Phys.* **16**, (1990), L137-L142.
- [32] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy and Yu. I. Kharitonov, Method of projection operators and the  $q$  analog of the quantum theory of angular momentum. Clebsch-Gordan Coefficients and irreducible tensor operators. *Sov. J. Nucl.Phys.* **53** , (1991), 593-605.
- [33] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy and Yu. I. Kharitonov, Projection-operator Method and the  $q$  analog of the quantum theory of angular momentum. Racah coefficients,  $3j$  and  $6j$  symbols, and their symmetry properties. *Sov. J. Nucl.Phys.* **53** , (1991), 1069-1086.
- [34] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy and Yu. I. Kharitonov, Tree technique and irreducible tensor operators for the  $SU_q(2)$  quantum algebra.  $9j$  symbols. *Sov. J. Nucl.Phys.* **55**, (1992), 1599-1604.
- [35] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy and Yu. I. Kharitonov, The tree technique and irreducible tensor operators for the  $SU_q(2)$  quantum algebra. The algebra of irreducible tensor operators. *Physics Atom. Nucl.* **56** , (1993), 690-700.
- [36] Yu. F. Smirnov and A. Del Sol Mesa, Orthogonal polynomials of the discrete variable associated with  $SU_q(2)$  and  $SU_q(1,1)$  quantum algebras. En *International Workshop Symmetry Methods in Physics in Memory of Professor Ya.A.Smorodinsky*. A.N.Sissakian, G.S.Pogosyan and S.I.Vinitsky Eds. JINR, E2-94-447, **Vol.2**, Dubna 1994, 479-486.
- [37] A. del Sol Mesa, Yu. F.Smirnov, Clebsch-Gordan and Racah Coefficients for  $U_q(1,1)$  quantum algebra (Discrete series). En *Scattering, Reactions, Transitions in Quantum Systems and Symmetry Methods*. (R.M.Asherova and Yu.F.Smirnov Eds.), Obninsk 1991, 43.
- [38] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev and V. K. Khersonsky: *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific, Singapore, 1989.
- [39] H. J. de Vega, Yang-Baxter Algebras, Integrable Theories and Quantum Groups. *Int.J.of Mod. Phys.*, (1989), 2371-2463.
- [40] N. Ja. Vilenkin and A.U. Klimyk, *Representations of Lie Groups and Special Functions*. **Vol. I,II,III**. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1992.