

# Problemas de Series y Transformadas de Fourier

MMF II: Grupo I, Prof. Renato Álvarez Nodarse

## Índice

<b>1. Generalidades</b>	<b>2</b>
1.1. Problemas . . . . .	3
<b>2. La serie trigonométrica de Fourier</b>	<b>3</b>
2.1. Convergencia puntual de la serie de Fourier . . . . .	4
2.2. Convergencia uniforme de la serie de Fourier . . . . .	4
2.3. Problemas . . . . .	5
<b>3. Aplicaciones a la resolución de EDPs</b>	<b>7</b>
3.1. La ecuación de ondas . . . . .	7
3.1.1. Problemas . . . . .	9
3.2. La ecuación del calor . . . . .	9
3.2.1. Problemas . . . . .	11
3.3. El problema de Dirichlet en dos dimensiones . . . . .	11
3.3.1. El problema de Dirichlet en el cuadrado . . . . .	11
3.3.2. El problema de Dirichlet en el círculo . . . . .	13
3.3.3. Problemas . . . . .	14
3.4. Ecuación del telégrafo . . . . .	15
<b>4. Polinomios ortogonales</b>	<b>16</b>
4.1. Sistemas ortogonales . . . . .	16
4.2. Los polinomios ortogonales . . . . .	17
<b>5. Los polinomios ortogonales clásicos</b>	<b>19</b>
5.1. La ecuación diferencial hipergeométrica. . . . .	19
5.2. Los Polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi. . . . .	21
5.2.1. Parámetros Principales. . . . .	21
5.2.2. Representación hipergeométrica. . . . .	22
5.2.3. Casos particulares. . . . .	23
5.2.4. Otras características. . . . .	24
5.3. Problemas . . . . .	24
5.4. Aplicaciones . . . . .	27
<b>6. Transformadas integrales</b>	<b>30</b>
6.1. La transformada de Fourier . . . . .	30
6.1.1. Propiedades de la Transformada de Fourier . . . . .	31
6.1.2. Problemas . . . . .	32
6.2. La transformada de Laplace . . . . .	33
6.3. Problemas . . . . .	34

<http://euler.us.es/~renato/clases.html>

## 1. Generalidades

**Definición 1.1** Se dice que un espacio vectorial  $\mathbb{E}$  es un espacio euclídeo si dados dos elementos cualesquiera  $x, y \in \mathbb{E}$  existe un número denominado producto escalar y que denotaremos por  $\langle x, y \rangle$  tal que

1. Para todos  $x, y \in \mathbb{E}$ ,  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
2. Para todos  $x, y, z \in \mathbb{E}$ ,  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .
3. Para todos  $x, y \in \mathbb{E}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. Para todo  $x \in \mathbb{E}$ ,  $x \neq 0$ ,  $\langle x, x \rangle > 0$  y si  $\langle x, x \rangle = 0$ , entonces  $x = 0$ .

**Definición 1.2** Un espacio vectorial  $\mathbb{X}$  se denomina espacio normado si para todo  $x \in \mathbb{X}$  existe un número real denominado norma y que denotaremos por  $\|x\|$  que cumple con las condiciones

1. Para todo  $x \in \mathbb{X}$ ,  $\|x\| \geq 0$  y  $\|x\| = 0$  entonces  $x = 0$ .
2. Para todo  $x \in \mathbb{X}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
3. Para todos  $x, y \in \mathbb{X}$  se tiene la desigualdad triangular

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (1)$$

**Definición 1.3** Dado un vector  $x \in \mathbb{X}$  definiremos la serie de Fourier respecto al sistema  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  a la serie

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \quad (2)$$

donde los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$c_n = \frac{\langle x, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|^2}, \quad \forall n \geq 1. \quad (3)$$

**Definición 1.4** Dada  $f \in \mathbb{X}$  se dice y una sucesión  $s_n$ , se dice que  $s_n$  converge en norma a  $f$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|^2 = 0. \quad (4)$$

**Teorema 1.5** Sea  $\mathbb{X}_n$  el subespacio lineal de  $\mathbb{X}$  generado por los vectores  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , i.e.,  $\mathbb{X}_n$  es la envolvente lineal  $\text{Span}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ . Entonces

$$\min_{q \in \mathbb{X}_n} \|x - q\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\phi_k\|^2$$

donde  $c_k$  son los coeficientes definidos en (3) y se alcanza cuando  $q$  es la suma parcial de la serie de Fourier (2)

$$q = s_n := \sum_{k=1}^n c_k \phi_k.$$

## 1.1. Problemas

**Problema 1.1** Demuestra que en el espacio de las funciones continuas definidas en  $[a, b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

define un producto escalar.

**Problema 1.2** Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz  $|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$  y que la igualdad sólo tiene lugar si  $f(x) = \alpha g(x)$ .

Comprueba, utilizando lo anterior, que efectivamente en  $\mathbb{E}$ ,  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$  define una norma.

**Problema 1.3** Demuestra la desigualdad de Bessel  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\phi_k\|^2 \leq \|x\|^2$ , donde  $c_k$  son los coeficientes de Fourier de  $f$ .

Usando lo anterior prueba que la serie de Fourier converge en norma si y sólo si  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|\phi_k\|^2 = \|x\|^2$ . La igualdad anterior se denomina identidad o igualdad de Parseval.

**Problema 1.4** Prueba que si todo  $x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{X}$ ,  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} \phi_k$ , entonces se tiene para todo  $x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{X}$  la igualdad de Parseval.

Prueba que si es cierta la igualdad de Parseval y  $\langle x, \phi_k \rangle = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  entonces  $x = 0$ .

## 2. La serie trigonométrica de Fourier

**Definición 2.1** Dada una función de cuadrado integrable y periódica  $f(x)$  en  $[-\pi, \pi)$  definiremos la serie trigonométrica de Fourier por

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad (5)$$

donde los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad (6)$$

para  $n \geq 0$ . A la suma

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

la denominaremos suma parcial de la serie.

## 2.1. Convergencia puntual de la serie de Fourier

**Definición 2.2** Diremos que una función  $f(x)$  cumple las condiciones de Dirichlet en el intervalo  $(-\pi, \pi)$  si:

1. La función  $f$  está uniformemente acotada en  $(-\pi, \pi)$ ; o sea, si existe una constante positiva  $M$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in (-\pi, \pi)$
2. La función  $f$  sólo tiene un número finito de puntos de discontinuidad y todos ellos de naturaleza evitable, es decir:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x_0 - \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x_0 + \epsilon), \quad \epsilon > 0, \quad \forall x_0 \in (-\pi, \pi)$$

3. La función  $f(x)$  tiene un número finito de extremos estrictos.

**Teorema 2.3** Si una función cumple con las condiciones de Dirichlet en el intervalo  $(-\pi, \pi)$  entonces en cualquier punto de ese intervalo en que  $f(x)$  sea continua ésta se puede desarrollar en la serie de Fourier (5), donde los coeficientes vienen dado por (6). Además, la serie converge en cada punto  $x$  a la semisuma de los límites laterales, o sea para todo  $x \in (-\pi, \pi)$  y para  $\epsilon > 0$  tenemos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x - \epsilon) + f(x + \epsilon)}{2},$$

y en los extremos la serie tiende a  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(-\pi + \epsilon) + f(\pi - \epsilon)}{2}$ .

Un teorema menos general pero de gran utilidad es el siguiente

**Teorema 2.4** Si  $f$  tiene derivada continua en  $[-\pi, \pi]$  y  $f(-\pi) = f(\pi)$ , excepto quizá en un número finito de puntos, entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x_0) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}, \quad \forall x_0 \in [-\pi, \pi].$$

## 2.2. Convergencia uniforme de la serie de Fourier

**Definición 2.5** Diremos que la serie de Fourier converge puntualmente a  $f$  en  $x_0$  si la sucesión de sus sumas parciales  $S_n f(x)$  converge puntualmente a  $f(x)$  en  $x_0 \in [-\pi, \pi]$ , es decir, si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > N$

$$|f(x_0) - S_n f(x_0)| < \epsilon.$$

Si  $S_n f(x)$  converge puntualmente para todo  $x \in (a, b)$  entonces diremos que la serie de Fourier converge puntualmente en  $(a, b)$  y lo denotaremos por  $f_n \rightarrow f$ .

Lo anterior se puede escribir como sigue:  $f_n \rightarrow f$  si para todo  $\epsilon > 0$  y cada  $x \in (a, b)$  existe un  $N \in \mathbb{N}$  (en general dependiente de  $x$  y  $\epsilon$ ) tal que para todo  $n > N$

$$|f(x) - S_n f(x)| < \epsilon.$$

**Definición 2.6** Diremos que la serie de Fourier converge uniformemente a  $f$  en  $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$ , y lo denotaremos por  $f_n \rightrightarrows f$ , si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $N \in \mathbb{N}$  (independiente de  $x$ ) tal que para todo  $n > N$  y todo  $x \in (a, b)$

$$|f(x) - S_n f(x)| < \epsilon.$$

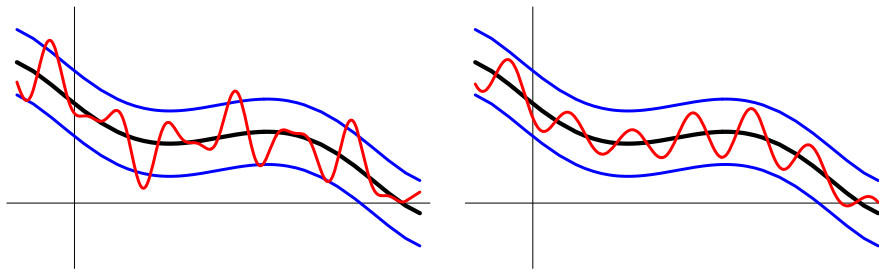


Figura 1: Convergencia no uniforme (izquierda) y uniforme (derecha)

**Teorema 2.7** Sea  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  una función  $2\pi$ -periódica continua y con derivada continua en  $[-\pi, \pi]$ . Entonces

1. La serie de Fourier de  $f'$  se obtiene derivando término a término la serie (5) de  $f$ .
2. 
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < +\infty.$$
3. La serie de Fourier (5) converge uniformemente a  $f$  en  $[-\pi, \pi]$ .
4. La serie de Fourier se puede integrar término a término.

### 2.3. Problemas

**Problema 2.1** Encuentra la serie de Fourier de las siguientes funciones extendiéndolas de forma periódica a todo el eje real:

1.  $f(x) = \begin{cases} A & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$
2.  $f(x) = |x|$  en  $[-\pi, \pi]$
3.  $f(x) = ax$  en  $[-\pi, \pi]$
4.  $f(x) = ax^2$  en  $[-\pi, \pi]$
5.  $f(x) = ax^2$  en  $[0, 2\pi]$
6.  $f(x) = e^{\alpha x}$  en  $[-\pi, \pi]$
7.  $f(x) = |\sin x|$  en  $[-\pi, \pi]$
8.  $f(x) = \cosh x$  en  $[-\pi, \pi]$
9.  $f(x) = \sinh x$  en  $[-\pi, \pi]$

Como aplicación de lo anterior muestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Problema 2.2** Demuestra que si el periodo de la función es  $T$  entonces la serie de Fourier se escribe mediante la fórmula

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{T},$$

donde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi kx}{T} dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi kx}{T} dx.$$

Como aplicación calcula las series de Fourier de las funciones

1.  $f(x) = \begin{cases} A & \text{si } 0 < x < T/2 \\ 0 & \text{si } T/2 < x < T \end{cases}$
2.  $f(x) = ax$  en  $[0, T]$

**Problema 2.3** Supongamos que los coeficientes de Fourier de una función  $f(x)$  vienen dados por las sucesiones  $(a_n)_n$  y  $(b_n)_n$ . ¿Cuáles son los coeficientes de la función trasladada  $f(x+h)$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ?

Como aplicación calcula los coeficientes de Fourier  $f(x) = |\cos x|$  usando el resultado del problema anterior.

Una colección más exhaustiva de problemas se puede encontrar en los libros:

1. I. I. LIASHKÓ, A. K. BOIARCHUK, Iá. G. GAI y G. P. GOLOVACH, *Matemática Superiores. Problemas Resueltos (Anti-Demidovich) Vol III. (Series y Cálculo diferencial para funciones de varias variables)* (URSS, 1999).
2. B. DEMIDOVICH, *5000 problemas de Análisis Matemático* (Paraninfo, 1980).
3. L. D. KUDRIÁTSEV, A. D. KUTÁSOV, V. I. CHEJLOV y M. I. SHABUNIN, *Problemas de Análisis Matemático: Integrales y Series* (Mir-Rubiños, 1992).

### 3. Aplicaciones a la resolución de EDPs

#### 3.1. La ecuación de ondas

En este apartado vamos a usar las series de Fourier para resolver la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t),$$

con las condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (7)$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x, 0) = g(x). \quad (8)$$

Esta ecuación, conocida como ecuación de ondas, modeliza el movimiento de una onda unidimensional (por ejemplo el sonido).

Usualmente para resolver este problema se usa el método de separación de variables:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad X(x) \neq 0, \quad T(t) \neq 0,$$

que al sustituir en la ecuación original nos da

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t), \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , i.e., tenemos las ecuaciones<sup>1</sup>

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad (9)$$

y

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (10)$$

Por sencillez asumiremos  $a = 1$ .

La solución general de (9) depende del valor de  $\lambda$ . Es fácil comprobar que solamente se tienen soluciones no nulas si  $\lambda > 0$ . En este caso la solución general es

$$X(x) = \alpha \cos \sqrt{\lambda}x + \beta \sin \sqrt{\lambda}x,$$

que junto a las condiciones de contorno para  $X$  nos dan las soluciones

$$X_n(x) = \sin nx, \quad \lambda := \lambda_n = n^2.$$

En este caso para  $T$  obtenemos ( $a = 1$ )

$$T''(t) + n^2 T(t) = 0,$$

---

<sup>1</sup> Como  $u(0, t) = 0 = x(0)T(t)$ , se deduce  $X(0) = 0$  pues en caso contrario  $T(t) \equiv 0$ , lo que sera una contradicción.

luego

$$T_n(t) = A_n \cos nt + B_n \sin nt,$$

y por tanto una solución de nuestra ecuación con las condiciones de contorno (7) será

$$u_n(x, t) = (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx.$$

Como la ecuación de ondas es lineal y homogénea entonces su solución general será de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx. \quad (11)$$

Para encontrar los coeficientes indeterminados  $A_n$  y  $B_n$  supondremos que  $f$  y  $g$  son lo suficientemente buenas (por ejemplo casi-continuamente derivables en  $[0, \pi]$ ) y vamos a extenderlas a todo el intervalo  $[-\pi, \pi]$  de forma impar, es decir de forma que  $f$  y  $g$  sean funciones impares. Entonces podemos desarrollar en serie de Fourier ambas funciones y además las correspondientes series son absoluta y uniformemente convergentes. Si ahora usamos las las condiciones iniciales (8) obtenemos<sup>2</sup>

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin nx,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx \, dx. \quad (12)$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que el perfil inicial de una cuerda viene dado por la función

$$f(x) = \alpha x(\pi - x)$$

y que inicialmente está en reposo, es decir,  $g(x) = 0$ . Entonces usando (12) tenemos  $B_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{4\alpha(1 + (-1)^{n+1})}{n^3 \pi},$$

y por tanto la solución es

$$u(x, t) = \frac{8\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \cos(2n-1)nt \sin(2n-1)x.$$

---

<sup>2</sup>Suponiendo que la serie (11) se pueda derivar término a término respecto a  $t$ .



### 3.1.1. Problemas

Usando separación de variables resolver el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

En los siguientes casos:

1. Cuando el perfil inicial de una cuerda viene dado por la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{a} & 0 \leq x \leq a \\ \frac{A(\pi - x)}{\pi - a} & a \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

y que inicialmente está en reposo, es decir,  $g(x) = 0$ .

2. Cuando el perfil inicial de una cuerda viene dado por la función

$$f(x) = \cos \frac{x}{2},$$

y que inicialmente está en reposo, es decir,  $g(x) = 0$ .

3. Cuando el perfil inicial y la velocidad inicial de la cuerda viene dado por las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ \pi - x & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = 0.$$

4. Cuando el perfil inicial y la velocidad inicial de la cuerda viene dado por las funciones  $f(x) = 0$ ,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{v_0 x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ \frac{v_0(\pi - x)}{\pi - a} & a \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

### 3.2. La ecuación del calor

Consideremos ahora la ecuación del calor

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t),$$

con las condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \tag{13}$$

y la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x). \quad (14)$$

Nuevamente usaremos el método de separación de variables:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad X(x) \neq 0, \quad T(t) \neq 0,$$

que al sustituir en la ecuación original nos da

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t), \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , i.e., tenemos las ecuaciones

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad (15)$$

y

$$T'(t) - a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (16)$$

La solución general de (15) depende del valor de  $\lambda$ . Es fácil comprobar que solamente se tienen soluciones no nulas si  $\lambda > 0$ . En este caso la solución general es

$$X(x) = \alpha \cos \sqrt{\lambda}x + \beta \sin \sqrt{\lambda}x,$$

que junto a las condiciones de contorno para  $X$  nos dan las soluciones

$$X_n(x) = \sin nx, \quad \lambda := \lambda_n = n^2.$$

En este caso para  $T$  obtenemos

$$T'(t) + a^2 n^2 T(t) = 0,$$

luego

$$T_n(t) = e^{-a^2 n^2 t}$$

y por tanto una solución de nuestra ecuación con las condiciones de contorno (13) será

$$u_n(x, t) = A_n e^{-a^2 n^2 t} \sin nx.$$

Como la ecuación del calor es lineal y homogénea entonces su solución general será de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 n^2 t} \sin nx. \quad (17)$$

Para encontrar los coeficientes indeterminados  $A_n$  supondremos que  $f$  es lo suficientemente buena (por ejemplo casi-continuamente derivable en  $[0, \pi]$ ) y vamos a extenderlas a todo el intervalo  $[-\pi, \pi]$  de forma impar, es decir de forma que  $f$  y  $g$  sean funciones impares. Entonces desarrollamos en serie de Fourier  $f$  y usamos las las condiciones iniciales (14) obtenemos

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx. \quad (18)$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que la distribución inicial de la temperatura es uniforme, i.e.,  $f(x) = T_0$ . Entonces, usando (18) tenemos  $B_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2T_0(1 + (-1)^{n+1})}{\pi n},$$

así que la solución es

$$u(x, t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-a^2(2n-1)^2 t} \sin(2n-1)x.$$

### 3.2.1. Problemas

Usando separación de variables resolver el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

En los siguientes casos:

1. Cuando  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ ,
2. Cuando  $f(x) = \alpha x(\pi - x)$ ,
3. Cuando  $f(x) = \beta(x - \frac{\pi}{2})$ .

### 3.3. El problema de Dirichlet en dos dimensiones

Vamos ahora a considerar el problema de Dirichlet bidimensional.

#### 3.3.1. El problema de Dirichlet en el cuadrado

Comenzaremos resolviendo problema de Dirichlet en el cuadrado:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) = 0, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, \pi) = g(x), \end{cases}$$

Usando separación de variables tenemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

que se convierte en

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

La condición de contorno  $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$  implica  $X(0) = X(\pi) = 0$ , luego

$$X_n(x) = \sin nx, \quad \lambda := \lambda_n = n^2.$$

Luego para  $Y$  tenemos la EDO

$$Y''(y) - n^2 Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_n(y) = c_n \sinh ny + d_n \cosh ny,$$

y la solución de la EDP es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \sinh(ny) + d_n \cosh(ny)) \sin nx.$$

Para encontrar las sucesiones  $(c_n)_n$  y  $(d_n)_n$  usamos las condiciones de contorno en  $y$

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin nx \quad \Rightarrow \quad d_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

$$u(x, \pi) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \sinh(n\pi) + d_n \cosh(n\pi)) \sin nx \quad \Rightarrow$$

$$c_n \sinh(n\pi) + d_n \cosh(n\pi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx \, dx := b_n,$$

de donde tenemos

$$c_n = \frac{b_n - d_n \cosh(n\pi)}{\sinh(n\pi)} = \frac{2}{\pi \sinh(n\pi)} \int_0^{\pi} [g(x) - f(x) \cosh(n\pi)] \sin nx \, dx.$$

Veamos dos ejemplos: 1)  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = 0$ .

Entonces  $d_1 = 1$  y  $d_n = 0$  para todo  $n \geq 2$ . Además,  $b_n = 0$  y por tanto tenemos  $c_1 = -\coth \pi$ ,  $c_n = 0$  para todo  $n \geq 2$ , luego la solución del problema de Dirichlet es

$$u(x, y) = \frac{\cosh(y + \pi) \sin x}{\sinh \pi}.$$

Como segundo ejemplo consideremos el caso cuando  $f(x) = x(\pi - x)$  y  $g(x) = 0$ , que nos da,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$d_{2n-1} = \frac{8}{(2n-1)^3 \pi}, \quad d_{2n} = 0 \quad c_{2n-1} = -\frac{8 \coth(2n-1)\pi}{(2n-1)^3 \pi}, \quad c_{2n} = 0.$$

Es decir

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cosh(2n-1)y}{(2n-1)^3} - \frac{\sinh(2n-1)y \coth(2n-1)\pi}{(2n-1)^3 \pi} \right) \sin(2n-1)x.$$

### 3.3.2. El problema de Dirichlet en el círculo

Resolvamos ahora el problema de Dirichlet en el círculo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r, \theta) = 0, \\ u(1, \theta) = f(\theta), \end{cases}$$

donde se sobreentiende que  $u(r, \theta)$  es una función continua y acotada para  $r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , y es  $2\pi$ -periódica en  $\theta$ .

Siguiendo el esquema de separación de variables que hemos usado hasta ahora tenemos que si  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  que

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0,$$

por tanto, como  $\Theta$  ha de ser  $2\pi$  periódica deducimos que  $\lambda := \lambda_n = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , y

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} a_0, & n = 0 \\ a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de  $\lambda$  en la ecuación para  $R$  tenemos:

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) = 0, & n = 0 \\ r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

cuya solución es<sup>3</sup>

$$\begin{cases} R(r) = A \log r + B, & n = 0 \\ R(r) = Ar^n + Br^{-n}, & n \in \mathbb{N} \end{cases},$$

pero como  $u$  ha de ser acotada en  $|r| \leq 1$  deducimos que  $B = 0$ , luego la solución en  $r$  es  $R(r) = r^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  que junto con  $\Theta$  nos da

$$u(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

que reescribiremos en la forma

$$u(t, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

Si usamos la condición de contorno en  $r = 1$  tenemos

$$u(1, \theta) = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,$$

es decir los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de la serie de Fourier de  $f$ .

Como ejemplo veamos el problema de Dirichlet en el círculo con las condiciones de contorno  $f(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta < \pi \\ -1 & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$ , y  $f(\theta) = \cos \frac{\theta}{2}$ .

<sup>3</sup>En el primer caso podemos usar el método de reducción de orden. Para el segundo notemos que la ecuación una ecuación de Euler-Cauchy.

En el primer caso, puesto que la serie de Fourier de  $f$  es

$$f(\theta) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \theta + \frac{\sin 3\theta}{3} + \dots + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} + \dots \right),$$

tenemos

$$u(r, \theta) = \frac{4}{\pi} \left( r \sin \theta + r^3 \frac{\sin 3\theta}{3} + \dots + r^{2n+1} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} + \dots \right),$$

En el segundo caso cuando  $f(\theta) = \cos \frac{\theta}{2}$  tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} \sin n\theta d\theta = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} \sin n\theta d\theta = \frac{4(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1},$$

así que

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos n\theta,$$

y por tanto la solución es

$$u(r, \theta) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} r^n}{4n^2 - 1} \cos n\theta \right).$$

### 3.3.3. Problemas

Usando separación de variables resolver el problema de Dirichlet en el cuadrado:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) = 0, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, \pi) = g(x), \end{cases}$$

en los siguientes casos

1.  $f(x) = \sin 3x, g(x) = 0$

2.  $f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \alpha(\frac{\pi}{2} - x), & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \\ \alpha(x - \pi), & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi. \end{cases}, g(x) = 0$

3.  $f(x) = x(\pi - x), g(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \alpha(\pi - x), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Usando separación de variables resolver el problema de Dirichlet en el círculo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r, \theta) = 0, \\ u(1, \theta) = f(\theta) \end{cases}$$

siendo  $u(r, \theta)$  una función continua y acotada en el círculo definido por  $r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , y  $2\pi$ -periódica en  $\theta$  para los siguientes casos

1.  $f(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta < \pi \\ 0 & -\pi < \theta < 0 \end{cases},$
2.  $f(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{3}\theta & 0 \leq \theta < \pi \\ \frac{2}{3}(\pi - \theta) & -\pi < \theta < 0 \end{cases},$
3.  $f(\theta) = \cos \frac{\theta}{3}.$

### 3.4. Ecuación del telégrafo

Usando separación de variables resolver el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) + \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

En los siguientes casos:

1. Cuando  $f(x) = \alpha x(\pi - x),$
2. Cuando  $f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \alpha(\pi - x), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Una colección más exhaustiva de problemas se puede encontrar en los libros:

1. Nagle R.K. y Saff E.B. *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*. Pearson Educación.
2. Budak B.M., Samarski A.A., Tijonov A.N, *Problemas de la física matemática*. En 2 tomos

## 4. Polinomios ortogonales

### 4.1. Sistemas ortogonales

En adelante asumiremos que  $\mathbb{X}$  es un espacio normado con la norma definida por el producto escalar  $\|\phi\| := \langle \phi, \phi \rangle$ .

Un conjunto finito de vectores  $\{\phi_n\}_{n=1}^N$  se denomina linealmente independiente si la ecuación

$$\alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \cdots + \alpha_n \phi_n = 0,$$

tiene como única solución la trivial  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ .

Un conjunto infinito de vectores  $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$  es linealmente independiente si cualquier subsistema finito es linealmente independiente.

Diremos que  $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$  es un sistema ortogonal dos a dos si

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{n,m} \|\phi_n\|^2, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Por ejemplo, el sistema de funciones  $\{1\} \cup \{\sin nx, \cos nx\}_{n=1}^\infty$  es un sistema ortogonal dos a dos respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Asumiremos que el sistema de funciones  $\{\phi_n\}_n^\infty$  es linealmente independiente. Definamos a continuación el sistema de funciones  $\{\psi_n\}_n$  de forma que

$$\psi_1 = \phi_1, \quad \psi_2 = \phi_2 + \alpha_{2,1}\psi_1, \quad \psi_n = \phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k}\psi_k,$$

donde las constantes  $\alpha_{n,k}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$  son tales que  $\psi_k$  es ortogonal a todos los vectores  $\phi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k-1$ , anteriores.

El proceso anterior se denomina proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Mediante un sencillo cálculo podemos comprobar que  $\psi_n$  se puede escribir de la siguiente forma

$$\psi_n = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \phi_1 \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_{n-1} \rangle & \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle & \phi_n \end{vmatrix}, \quad (20)$$

donde  $\Delta_n$  son los determinantes de Gram

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_2, \phi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{vmatrix}.$$



Además, para cada  $n$  tenemos

$$\psi_n = \phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k} \phi_k,$$

De lo anterior deducimos que  $\psi_n$  es ortogonal a  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Más aún, los  $\psi_n$  son un conjunto linealmente independiente de  $\mathbb{X}$  si y sólo si los  $\Delta_n \neq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## 4.2. Los polinomios ortogonales

El ejemplo más sencillo del proceso anterior es cuando tenemos el espacio de las funciones de cuadrado integrable en  $(a, b)$  con peso  $\rho(x) > 0$ , i.e.,

$$\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty.$$

En este espacio el producto escalar de dos funciones  $f$  y  $g$  se define mediante la integral

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, \quad (21)$$

y la norma de  $f$  vendrá dada por  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ .

Definiremos los momentos  $\mu_n$  de  $\rho(x)$  mediante

$$\int_a^b x^k \rho(x) dx = \mu_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

En adelante asumiremos que todos los momentos son finitos.

**Definición 4.1** *Dada una sucesión de polinomios  $(P_n)_n$ , diremos que  $(P_n)_n$  es una sucesión de polinomios ortogonales (SPO) con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si se cumple que:*

1.  $P_n$  es un polinomio de grado  $n$ ,
2.  $\langle P_n, P_m \rangle = 0$ ,  $m \neq n$ , para todo  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ ,
3.  $\langle P_n, P_n \rangle \neq 0$ , para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

El siguiente teorema es una consecuencia directa de la definición anterior

**Teorema 4.2** *Sea  $(P_n)_n$  una sucesión de polinomios tal que  $\text{grado}(P_n) = n$  (sucesión normal). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $(P_n)_n$  es una SPO respecto al producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
2.  $\langle \pi, P_n \rangle = 0$ , para todo polinomio  $\pi$  de grado  $m < n$ ,  $\langle \pi, P_n \rangle \neq 0$ , si  $\pi$  es un polinomio de grado  $n$ .
3.  $\langle x^m, P_n \rangle = K_n \delta_{n,m}$ , donde  $K_n \neq 0$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ .

Como consecuencia del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado a las potencias  $\{x^k\}_{k \geq 0}$  tenemos que

**Teorema 4.3** Sea  $\alpha$  la medida asociada a la sucesión  $(\mu_n)_n$ . Una sucesión de polinomios  $(P_n)_n$  será una SPO si y sólo si

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Además, el coeficiente principal  $a_n$  ( $P_n(x) = a_n x^n + \cdots$ ) viene dado por la fórmula  $a_n = K_n \Delta_{n-1} / \Delta_n$ .

Es fácil comprobar que el proceso de Gram-Schmidt descrito anteriormente nos conduce a la siguiente expresión para los polinomios mónicos  $P_n$

$$P_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad \Delta_{-1} \equiv 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

También es evidente de la fórmula anterior que la sucesión  $(P_n)_n$  es una SPOM y que además está compuesta por polinomios con coeficientes reales.

**Teorema 4.4** Sea  $(P_n)_n$  una sucesión de polinomios ortogonales con respecto al producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Entonces la SPO  $(P_n)_n$  satisface una relación de recurrencia a tres términos de la forma:

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x). \quad (23)$$

donde los coeficientes  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ , y  $\gamma_n$  se expresan mediante las fórmulas:

$$\alpha_n = \frac{\langle xP_n, P_{n+1} \rangle}{\|P_{n+1}\|^2}, \quad \beta_n = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2}, \quad \gamma_n = \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|^2}. \quad (24)$$

Generalmente se suele imponer que  $P_{-1}(x) = 0$  y  $P_0(x) = 1$ , con lo que una SPO queda determinada de forma única conocidas las sucesiones  $(\alpha_n)_n$ ,  $(\beta_n)_n$  y  $(\gamma_n)_n$ .

Otra forma de calcular los coeficientes (24) es mediante las expresiones

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{c_n - \alpha_n c_{n+1}}{a_{n-1}} - \frac{b_n}{a_{n-1}} \beta_n, \quad (25)$$

donde  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$  son los coeficientes del desarrollo

$$P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + c_n x^{n-2} + \cdots$$

De las expresiones anteriores y (24) se deduce que  $\gamma_n = \alpha_{n-1} \|P_n\|^2 / \|P_{n-1}\|^2$ .

Como un corolario de (23) se obtiene la conocida fórmula de Christoffel-Darboux cuya prueba se deja como ejercicio.

**Teorema 4.5** Si  $(P_n)_n$  es una sucesión de polinomios ortogonales que satisface la relación de recurrencia a tres términos (23). Entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} \text{Ker}_n(x, y) &:= \sum_{m=0}^n \frac{P_m(x)P_m(y)}{\|P_m\|^2} \\ &= \frac{\alpha_n}{\|P_n\|^2} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x - y}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Si hacemos tender  $y \rightarrow x$ , obtenemos la fórmula *confluente* de Christoffel-Darboux:

$$\text{Ker}_n(x, x) \equiv \sum_{m=0}^n \frac{P_m^2(x)}{d_m^2} = \frac{\alpha_n}{d_n^2} [P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)] \quad n \geq 1. \quad (27)$$

**Proposición 4.6** Los polinomios núcleos satisfacen la siguiente propiedad reproductora

$$\langle p(x), \text{Ker}_n(x, y) \rangle = p(y), \quad \forall p(x) \in \mathbb{P}_n. \quad (28)$$

## 5. Los polinomios ortogonales clásicos

### 5.1. La ecuación diferencial hipergeométrica.

Nuestro objetivo será estudiar los polinomios ortogonales clásicos definidos sobre el eje real los cuales vamos a definir como las soluciones polinómicas de la siguiente EDO

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \quad (29)$$

donde  $\sigma$  y  $\tau$  son polinomios de grados a lo más 2 y 1, respectivamente. Esta ecuación (29) usualmente se denomina *ecuación diferencial hipergeométrica* y sus soluciones  $y$  cumplen con la propiedad, conocida como *propiedad de hipergeometricidad*: Si  $y$  es una solución de (29) sus  $m$ -ésimas derivadas  $y^{(m)} \equiv y_m$  satisfacen una ecuación del mismo tipo.

**Teorema 5.1** Si  $y$  es una solución de (29) sus  $m$ -ésimas derivadas  $y^{(m)} \equiv y_m$  satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} \sigma(x)y_m'' + \tau_m(x)y_m' + \mu_m y_m &= 0, \\ \tau_m(x) = \tau(x) + m\sigma'(x), \quad \mu_m &= \lambda + \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i'(x) = \lambda + m\tau'(x) + \frac{m(m-1)}{2}\sigma''(x). \end{aligned} \quad (30)$$

La propiedad de hipergeometricidad es es muy importante pues nos permite encontrar una fórmula explícita para los polinomios que satisfacen la ecuación (29). Para ello usualmente se escriben (29) y (30) en su forma *simétrica o auto-conjugada*:

$$[\sigma(x)\rho(x)y']' + \lambda\rho(x)y = 0, \quad [\sigma(x)\rho_m(x)y_m']' + \mu_m\rho_m(x)y_m = 0, \quad (31)$$

donde  $\rho$  y  $\rho_m$  son funciones de simetrización que satisfacen las ecuaciones diferenciales de primer orden (conocidas como ecuaciones de Pearson):

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x), \quad [\sigma(x)\rho_m(x)]' = \tau_m(x)\rho_m(x).$$

Conocida  $\rho$  encontramos, utilizando las ecuaciones anteriores, que

$$\rho_m(x) = \sigma^m(x)\rho(x). \quad (32)$$

**Teorema 5.2** Si para todo  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\tau' + k\sigma''/2 \neq 0$ , entonces para las soluciones polinómicas de la ecuación (30) se tiene la siguiente fórmula de Rodrigues:

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{A_{nm}B_n}{\rho_m(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[\rho_n(x)], \quad B_n = \frac{P_n^{(n)}}{A_{nn}}, \quad (33)$$

$$A_{nm} = A_m(\lambda) |_{\lambda=\lambda_n} = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} [\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma'']. \quad (34)$$

Además, el autovalor  $\lambda_n$  de (29) es

$$\lambda \equiv \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''. \quad (35)$$

Cuando  $m = 0$  la fórmula (33) se convierte en la fórmula de Rodrigues para los polinomios clásicos

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

Si imponemos unas sencillas condiciones adicionales se tiene que las soluciones de (29) son ortogonales dos a dos:

**Teorema 5.3** Supongamos que  $x^k\sigma(x)\rho(x)|_{x=a,b} = 0$ , para todo  $k \geq 0$ . Entonces las soluciones polinómicas  $P_n$  de la ecuación (29) constituyen una SPO respecto a la función peso  $\rho$  definida por la ecuación  $[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x)$ , o sea, se cumple que:

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = \delta_{nm}d_n^2, \quad (37)$$

donde  $\delta_{nm}$  es el símbolo de Kronecker y  $d_n$  la norma de los polinomios  $P_n$ .

**Corolario 5.4** Si  $(P_n)_n$  es una familia de polinomios ortogonales respecto a  $\rho$  entonces para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  se tiene que  $\int_a^b x^k P_n(x)\rho(x)dx = 0$ .

Para calcular  $d_n^2$ , podemos utilizar la fórmula de Rodrigues que, sustituyéndola en (37) e integrando por partes, nos da:

$$d_n^2 = B_n(-1)^n n! a_n \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx. \quad (38)$$

Para calcular los coeficientes principales  $a_n$  y  $b_n$ , necesarios para encontrar los coeficientes de la RRTT (23) podemos usar la fórmula de Rodrigues para la

$n - 1$ -ésima derivada de  $P_n$ :  $P_n^{(n-1)}(x) = A_{nn-1}B_n\tau_{n-1}(x)$ , de donde obtenemos la igualdad:

$$P_n^{(n-1)}(x) = n!a_nx + (n-1)!b_n = A_{nn-1}B_n\tau_{n-1}(x).$$

Luego,

$$a_n = \frac{B_n A_{nn}}{n!} = B_n \prod_{k=0}^{n-1} [\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma''], \quad b_n = \frac{n\tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}} a_n. \quad (39)$$

De la fórmula de Rodrigues se deducen una serie de consecuencias muy interesantes

1.  $\tau$  es un polinomio de grado exactamente uno.
2. Tomando  $m = 1$  en la fórmula (33) se deduce que

$$P'_n(x) = \frac{-\lambda_n B_n}{B_{n-1}} \bar{P}_{n-1}(x), \quad (40)$$

donde  $\bar{P}_{n-1}$  denota al polinomio ortogonal respecto a la función peso  $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$ .

3. Si escribimos la fórmula (33) para el polinomio de grado  $n + 1$  obtenemos una fórmula de diferenciación

$$\sigma(x)P'_n(x) = \frac{\lambda_n}{n\tau'_n} \left[ \tau_n(x)P_n(x) - \frac{B_n}{B_{n+1}}P_{n+1}(x) \right]. \quad (41)$$

de la cual se deduce una relación de estructura

$$\sigma(x)P'_n(x) = \tilde{\alpha}_n P_{n+1}(x) + \tilde{\beta}_n P_n(x) + \tilde{\gamma}_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (42)$$

donde

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{\lambda_n}{n\tau'_n} \left[ \alpha_n \tau'_n - \frac{B_n}{B_{n+1}} \right], \quad \tilde{\beta}_n = \frac{\lambda_n}{n\tau'_n} [\beta_n \tau'_n + \tau_n(0)], \quad \tilde{\gamma}_n = \frac{\lambda_n \gamma_n}{n}. \quad (43)$$

4. Si definimos  $Q_n(x) \equiv \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1}$ , entonces los polinomios ortogonales mónicos  $P_n(x) = x^n + \dots$ , soluciones de la ecuación (29), satisfacen la siguiente relación de estructura:

$$P_n(x) = Q_n + \delta_n Q_{n-1} + \epsilon_n Q_{n-2}. \quad (44)$$

## 5.2. Los Polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi.

### 5.2.1. Parámetros Principales.

Comenzaremos escribiendo los principales parámetros de las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos clásicos, es decir, tales que su coeficiente principal  $a_n = 1$ , i.e.,  $P_n(x) = x^n + b_n x^{n-1} + \dots$ . Éstos se pueden clasificar en tres grandes familias en función del grado del polinomio  $\sigma$  ( $\tau$  siempre es un polinomio de grado 1). Cuando  $\sigma$  es un polinomio de grado cero los polinomios

Cuadro 1: Clasificación de las SPO Clásicas.

$P_n(x)$	$H_n(x)$	$L_n^\alpha(x)$	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$
$\sigma(x)$	1	$x$	$1 - x^2$
$\tau(x)$	$-2x$	$-x + \alpha + 1$	$-(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$
$\lambda_n$	$2n$	$n$	$n(n + \alpha + \beta + 1)$
$\rho(x)$	$e^{-x^2}$	$x^\alpha e^{-x}$ $\alpha > -1$	$(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ $\alpha, \beta > -1$
$\rho_n(x)$	$e^{-x^2}$	$x^{n+\alpha} e^{-x}$	$(1 - x)^{n+\alpha} (1 + x)^{n+\beta}$

correspondientes se denominan *Polinomios de Hermite*  $H_n(x)$ , cuando  $\sigma$  es de grado 1, *Polinomios de Laguerre*  $L_n^\alpha(x)$  y cuando  $\sigma$  es de grado 2, *Polinomios de Jacobi*  $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ , respectivamente. En las tablas 1 y 2 están representados los principales parámetros de dichas familias, en las cuales  $(a)_n$  denota al símbolo de Pochhammer

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (45)$$

### 5.2.2. Representación hipergeométrica.

De la fórmula de Rodrigues, o usando el método de las series de potencias, (33) se puede obtener la representación de los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi en términos de la función hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1$  definida en el caso más general de forma:

$${}_pF_q \left( \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!}. \quad (46)$$

De esta manera encontramos que:

$$H_{2m}(x) = (-1)^m \left( \frac{1}{2} \right)_m {}_1F_1 \left( \begin{matrix} -m \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x^2 \right), \quad (47)$$

$$H_{2m+1}(x) = (-1)^m \left( \frac{3}{2} \right)_m {}_1F_1 \left( \begin{matrix} -m \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| x^2 \right),$$

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} {}_1F_1 \left( \begin{matrix} -n \\ \alpha + 1 \end{matrix} \middle| x \right), \quad (48)$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{2^n (\alpha + 1)_n}{(n + \alpha + \beta + 1)_n} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right). \quad (49)$$

Cuadro 2: Parámetros de las SPO Mónicas ( $a_n = 1$ ).

$P_n(x)$	$H_n(x)$	$L_n^\alpha(x)$	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$
$B_n$	$\frac{(-1)^n}{2^n}$	$(-1)^n$	$\frac{(-1)^n}{(n + \alpha + \beta + 1)_n}$
$b_n$	0	$-n(n + \alpha)$	$\frac{n(\alpha - \beta)}{2n + \alpha + \beta}$
$d_n^2$	$\frac{n!\sqrt{\pi}}{2^n}$	$\Gamma(n + \alpha + 1)n!$	$\frac{2^{\alpha+\beta+2n+1}n!\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)_n^2}$
$\alpha_n$	1	1	1
$\beta_n$	0	$2n + \alpha + 1$	$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + 2 + \alpha + \beta)}$
$\gamma_n$	$\frac{n}{2}$	$n(n + \alpha)$	$\frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}$
$\tilde{\alpha}_n$	0	0	$-n$
$\tilde{\beta}_n$	0	$n$	$\frac{2(\alpha - \beta)n(n + \alpha + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + 2 + \alpha + \beta)}$
$\tilde{\gamma}_n$	$n$	$n(n + \alpha)$	$\frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)(n + \alpha + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}$
$\delta_n$	0	$n$	$\frac{2n(\alpha - \beta)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + 2 + \alpha + \beta)}$
$\epsilon_n$	0	0	$-\frac{4n(n - 1)(n + \alpha)(n + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}$

### 5.2.3. Casos particulares.

1. Los polinomios de Legendre  $P_n(x) = P_n^{0,0}(x)$ .

2. Los polinomios de Chebyshev de primera especie  $T_n(x)$ :

$$T_n(x) = P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos[n \arccos(x)].$$

3. Los polinomios de Chebyshev de segunda especie  $U_n(x)$ :

$$U_n(x) = P_n^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\text{sen}[(n + 1) \arccos(x)]}{\text{sen}[\arccos(x)]}.$$

4. Los polinomios de Gegenbauer  $G_n^\lambda(x)$ :

$$G_n^\gamma(x) = P_n^{\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}}(x), \quad \gamma > -\frac{1}{2}.$$

#### 5.2.4. Otras características.

Como consecuencia de las fórmulas anteriores podemos obtener los valores de los polinomios en los extremos del intervalo de ortogonalidad.

$$\begin{aligned} H_{2m}(0) &= \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} m!}, \quad H_{2m+1} = 0, \quad L_n^\alpha(0) = \frac{(-1)^n \Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}, \\ P_n^{\alpha, \beta}(1) &= \frac{2^n (\alpha + 1)_n}{(n + \alpha + \beta + 1)_n}, \quad P_n^{\alpha, \beta}(-1) = \frac{(-1)^n 2^n (\beta + 1)_n}{(n + \alpha + \beta + 1)_n}. \end{aligned} \quad (50)$$

Utilizando la fórmula (40) encontramos las ecuaciones ( $\nu = 1, 2, 3, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$(H_n(x))^{(\nu)} = \frac{n!}{(n - \nu)!} H_{n-\nu}(x), \quad (L_n^\alpha(x))^{(\nu)} = \frac{n!}{(n - \nu)!} L_{n-\nu}^{\alpha+\nu}(x), \quad (51)$$

$$(P_n^{\alpha, \beta}(x))^{(\nu)} = \frac{n!}{(n - \nu)!} P_{n-\nu}^{\alpha+\nu, \beta+\nu}(x), \quad (52)$$

donde  $(P_n(x))^{(\nu)}$  denota la  $\nu$ -ésima derivada de  $P_n(x)$ .

Directamente a partir de las correspondientes EDOs se puede probar que los polinomios de Hermite y Gegenbauer se relacionan con los de Hermite y Jacobi, respectivamente mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} H_{2m}(x) &= L_m^{-\frac{1}{2}}(x^2), \quad H_{2m+1}(x) = x L_m^{\frac{1}{2}}(x^2), \\ G_{2m}^\gamma(x) &= P_{2m}^{\gamma-\frac{1}{2}, \gamma-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2^m} P_m^{\gamma-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(2x^2 - 1), \\ G_{2m+1}^\gamma(x) &= P_{2m+1}^{\gamma-\frac{1}{2}, \gamma-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2^m} x P_m^{\gamma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(2x^2 - 1). \end{aligned} \quad (53)$$

Además, de la fórmula de Rodrigues se puede encontrar la siguiente propiedad de simetría para los polinomios de Jacobi:

$$P_n^{\beta, \alpha}(-x) = (-1)^n P_n^{\alpha, \beta}(x). \quad (54)$$

### 5.3. Problemas

**Problema 5.1** Probar todas las propiedades de los polinomios clásicos enumeradas en el apartado 5.2.

**Problema 5.2** Probar la ortogonalidad de las  $k$ -ésimas derivadas de los polinomios hipergeométricos  $y_k \equiv P_n^{(k)}$ , es decir,

$$\int_a^b P_n^{(k)}(x) P_m^{(k)}(x) \rho_k(x) dx = \delta_{nm} d_{kn}^2. \quad (55)$$

**Problema 5.3** Prueba que los polinomios núcleos satisfacen la propiedad reproductora (28)

**Problema 5.4** A partir de la ecuación de Pearson demuestra el siguiente



**Teorema 5.5** Sea  $\mu \in \mathbb{C}$ . Se definen los momentos generalizados como

$$C_{\nu,\mu}(z) = \int_a^b (s-z)^\mu \rho_\nu(s) ds. \quad (56)$$

Si se cumple la condición de frontera

$$\sigma(s)\rho_\nu(s)(s-z)^\mu \Big|_a^b = 0, \quad \forall \mu \geq 0, \quad (57)$$

entonces los momentos generalizados verifican la siguiente relación de recurrencia a tres términos

$$\mu\sigma(z)C_{\nu,\mu-1}(z) + [\tau_\nu(z) + \mu\sigma'(z)]C_{\nu,\mu}(z) + \left(\tau_\nu'(z) + \frac{1}{2}\mu\sigma''(z)\right)C_{\nu,\mu+1}(z) = 0. \quad (58)$$

Usando lo anterior, encuentra una relación de recurrencia para los momentos  $C_n := C_{0,n}(0)$  de los polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite. Usando la relación de recurrencia encuentra los momentos de los polinomios de Laguerre y Hermite.

Un caso de especial relevancia son los polinomios de Gegenbauer que corresponden al caso  $\alpha = \beta = \gamma - 1/2$ . Encontrar la relación de recurrencia para los momentos  $C_n := C_{0,n}(0)$  en este caso y resuélvela. A partir de ésta encuentra los momentos de los polinomios de Legendre  $P_n(x) = P_n^{0,0}(x)$ , los polinomios de Chebyshev de primera especie  $T_n(x) = P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x)$  y los polinomios de Chebyshev de segunda especie  $U_n(x) = P_n^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x)$ , respectivamente.

**Problema 5.5** Dada una sucesión numérica  $(A_n)_n$  y una sucesión de polinomios  $(P_n)_n$  encontrar una función  $\Phi(x,t)$  tal que,

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) t^n. \quad (59)$$

Si existe tal función, dicha función se denomina función generatriz de la sucesión  $(P_n)_n$ .

Demuestra que la función generatriz para los polinomios de Hermite viene dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} H_n(x) t^n = e^{2xt-t^2}, \quad (60)$$

Demuestra que la función generatriz para los polinomios de Laguerre viene dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} L_n^\alpha(x) t^n = \frac{e^{-\frac{tx}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}}.$$

Sean los polinomios de Gegenbauer  $C_n^\gamma(x) := P_n^{\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}}(x)$  que son un caso particular de los polinomios de Jacobi. Prueba que en este caso

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(\gamma)_n}{n!} C_n^\gamma(x) t^n, \quad (61)$$

donde  $(\gamma)_n$  es el símbolo de Pochhammer. Como casos particulares deducir la de los polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie y la de los polinomios de Legendre.

**Problema 5.6** Prueba las relaciones

$$P_{n-1}^{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{(2n + \alpha + \beta)(1 - x)}{2n(\alpha + n)} \frac{dP_n^{\alpha,\beta}}{dx}(x) + \frac{(2n + \alpha + \beta)}{2(\alpha + n)} P_n^{\alpha,\beta}(x), \quad (62)$$

$$P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) = \frac{(2n + \alpha + \beta)(x + 1)}{2n(\beta + n)} \frac{dP_n^{\alpha,\beta}}{dx}(x) - \frac{(2n + \alpha + \beta)}{2(\beta + n)} P_n^{\alpha,\beta}(x). \quad (63)$$

**Problema 5.7** Los polinomios núcleos  $\text{Ker}_{n-1}(x, y)$  se definen mediante la expresión

$$\text{Ker}_{n-1}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{P_m(x)P_m(y)}{d_m^2}.$$

Usando la fórmula de Christoffel-Darboux, los valores en los extremos y las fórmulas de diferenciación, prueba las siguientes fórmulas:

- Núcleos de los polinomios de Hermite:

$$\text{Ker}_{2m-1}^H(x, 0) = \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{\pi}(m-1)!} L_{m-1}^{\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{(-1)^{m-1}}{2\sqrt{\pi}(m-1)!} \frac{H'_{2m}(x)}{x},$$

$$\text{Ker}_{2m}^H(x, 0) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}(m)!} L_m^{\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}(m)!} \frac{H_{2m}(x)}{x},$$

$$\text{Ker}_{2m-1}^H(0, 0) = \frac{(2m-1)!}{2^{2m-2}\sqrt{\pi}(m-1)!^2}, \quad \text{Ker}_{2m}^H(0, 0) = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}\sqrt{\pi}m!^2}.$$

- Núcleos de los polinomios de Laguerre:

$$\text{Ker}_{n-1}^L(x, 0) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(\alpha+1)n!} (L_n^\alpha)'(x), \quad \text{Ker}_{n-1}^L(0, 0) = \frac{(\alpha+1)_n}{\Gamma(\alpha+2)(n-1)!}.$$

- Núcleos de los polinomios de Jacobi:

$$\text{Ker}_{n-1}^{J,\alpha,\beta}(x, -1) = \eta_n^{\alpha,\beta} \frac{d}{dx} P_n^{\alpha-1,\beta}(x) = n\eta_n^{\alpha,\beta} P_{n-1}^{\alpha,\beta+1}(x), \quad (64)$$

$$\text{Ker}_{n-1}^{J,\alpha,\beta}(x, 1) = (-1)^{n+1} \eta_n^{\beta,\alpha} \frac{d}{dx} P_n^{\alpha,\beta-1}(x) = n(-1)^{n+1} \eta_n^{\beta,\alpha} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x), \quad (65)$$

donde por  $\eta_n^{\alpha,\beta}$  y  $\eta_n^{\beta,\alpha}$  denotaremos las cantidades

$$\eta_n^{\beta,\alpha} = \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(2n + \alpha + \beta)}{2^{\alpha+\beta+n} n! \Gamma(\alpha + n) \Gamma(\beta + 1)}, \quad \eta_n^{\alpha,\beta} = \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(2n + \alpha + \beta)}{2^{\alpha+\beta+n} n! \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + n)}.$$

Usando (64)-(65) tenemos

$$\text{Ker}_{n-1}^{J,\alpha,\beta}(-1, -1) = \frac{\Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{2^{\alpha+\beta+1} (n-1)! \Gamma(\beta + 1) \Gamma(\beta + 2) \Gamma(\alpha + n)},$$

$$\text{Ker}_{n-1}^{J,\alpha,\beta}(-1, 1) = \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{2^{\alpha+\beta+1} (n-1)! \Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha + 1)}.$$

Utilizando la relación de simetría para los polinomios de Jacobi demuestra que

$$\text{Ker}_{n-1}^{J,\alpha,\beta}(1, 1) = \text{Ker}_{n-1}^{J,\beta,\alpha}(-1, -1).$$

## 5.4. Aplicaciones

La ecuación hipergeométrica generalizada es una ecuación lineal de segundo orden de la forma

$$u''(z) + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u'(z) + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u(z) = 0, \quad (66)$$

siendo  $\tilde{\tau}(z)$  un polinomio de grado a lo más uno y  $\sigma(z)$  y  $\tilde{\sigma}(z)$  polinomios de grado a lo más dos.

Hagamos el cambio  $u(z) = \phi(z)y(z)$ ,

$$y''(z) + \left(2\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}\right)y'(z) + \left(\frac{\phi''(z)}{\phi(z)} + \frac{\phi'(z)\tilde{\tau}(z)}{\phi(z)\sigma(z)} + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}\right)y(z) = 0.$$

El objetivo del cambio es convertir que representa la componente radial de la ecuación de Schrodinger para el átomo de hidrógeno la ecuación anterior en una más sencilla —o por lo menos menos complicada— que (66), así que al menos debemos tener

$$2\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} = \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}, \quad \text{o} \quad \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{\tau(z) - \tilde{\tau}(z)}{2\sigma(z)} = \frac{\pi(z)}{\sigma(z)}, \quad (67)$$

siendo  $\tau$  un polinomio de grado a lo más uno y, por tanto,  $\pi$  polinomio de grado a lo más uno. Lo anterior transforma nuestra ecuación original (66) en la siguiente

$$y''(z) + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}y'(z) + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}y(z) = 0, \quad (68)$$

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z),$$

$$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \pi'(z)\sigma(z).$$

Como  $\bar{\sigma}$  es un polinomio de grado dos a lo sumo, impongamos que sea proporcional al propio  $\sigma$ , es decir que  $\bar{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z)$ . Ello es posible pues  $\bar{\sigma}$  tiene dos coeficientes indeterminados —los coeficientes del polinomio  $\pi$ — y  $\lambda$  es una constante a determinar, lo que nos conduce a tres ecuaciones —al igualar los coeficientes de  $\bar{\sigma}$  y  $\sigma$ — con tres incógnitas. Hecho esto, nuestra ecuación se transforma en la ecuación hipergeométrica

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0. \quad (69)$$

Pasemos a calcular  $\pi$  y  $\lambda$ . Como  $\bar{\sigma} = \lambda\sigma(z)$ , entonces

$$\tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \pi'(z)\sigma(z) = \lambda\sigma(z),$$

o, equivalentemente,

$$\pi^2(z) + [\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)]\pi(z) + \{\tilde{\sigma}(z) - [\lambda - \pi'(z)]\sigma(z)\} = 0.$$

Supongamos que  $k = \lambda - \pi'(z)$  es conocido, entonces tenemos una ecuación de segundo orden para  $\pi(z)$ , luego

$$\pi(z) = \frac{\sigma'(z) - \tilde{\tau}(z)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(z) - \tilde{\tau}(z)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(z) + k\sigma(z)}, \quad (70)$$

pero  $\pi(z)$  ha de ser un polinomio de grado a lo sumo uno, por tanto el polinomio  $\left(\frac{\sigma'(z) - \tilde{\tau}(z)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(z) + k\sigma(z)$  ha de ser un cuadrado perfecto, es decir su discriminante debe ser cero, lo que nos conduce a una ecuación para encontrar  $k$ . El  $k$  encontrado lo sustituimos en (70) y obtenemos  $\pi(z)$ , el cual nos conduce directamente a  $\lambda = \pi'(z) + k$ .

Obviamente el método anterior da distintas soluciones en función del  $k$  que escojamos y del convenio de signos en (70).

Como ejemplo apliquemos la técnica anterior al caso del oscilador armónico cuántico.

Partimos de la ecuación de Scrödinger para el oscilador armónico

$$\Psi''(\xi) + (\varepsilon - \xi^2)\Psi(\xi) = 0,$$

que obviamente es del tipo (66) con  $\tilde{\tau}(\xi) = 0$ ,  $\sigma(\xi) = 1$  y  $\tilde{\sigma}(\xi) = \varepsilon - \xi^2$ . Para  $\pi(\xi)$ , (70) nos da

$$\pi(\xi) = \pm\sqrt{\xi^2 + (k - \varepsilon)}.$$

Como el polinomio  $\xi^2 + (k - \varepsilon)$  ha de ser un cuadrado perfecto, entonces  $k = \varepsilon$  y, por tanto,  $\pi(\xi) = \pm x$ , luego

$$\begin{aligned} \pi(\xi) = x, & \quad \pi'(\xi) = 1, & \quad \lambda = \varepsilon + 1, & \quad \tau(\xi) = 2x, \\ \pi(\xi) = -x, & \quad \pi'(\xi) = -1, & \quad \lambda = \varepsilon - 1, & \quad \tau(\xi) = -2x, \end{aligned}$$

que nos conducen a las ecuaciones

$$y''(\xi) + 2\xi y'(\xi) + (1 + \varepsilon)y(\xi) = 0, \quad y''(\xi) - 2\xi y'(\xi) + (1 - \varepsilon)y(\xi) = 0,$$

respectivamente. En cada caso la función  $\phi(\xi)$  es la solución de las ecuaciones  $\phi'/\phi = \xi$  y  $\phi'/\phi = -\xi$ , que conducen a las funciones

$$\phi(\xi) = e^{\xi^2/2}, \quad \text{y} \quad \phi(\xi) = e^{-\xi^2/2},$$

respectivamente. Finalmente, la ecuación  $y''(\xi) - 2\xi y'(\xi) + (1 - \varepsilon)y(\xi) = 0$  corresponde a la ecuación hipergeométrica de los polinomios de Hermite, por tanto tenemos  $\varepsilon - 1 = 2n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  y las soluciones normalizadas de nuestra ecuación original serán

$$\Psi(\xi) = N_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad \varepsilon = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (71)$$

Para calcular  $N_n$  notamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \overline{\Psi(x)} dx = N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = N_n^2 d_n^2, \quad d_n^2 = \frac{\sqrt{\pi} n!}{2^n},$$

$$\text{luego } N_n = \sqrt{\frac{2^n}{\sqrt{\pi} n!}}.$$

Es fácil ver que la otra ecuación tiene como soluciones los polinomios  $H_n(-x)$ , por lo que sus soluciones  $\Psi(\xi) = e^{\xi^2/2} H_n(-\xi)$  no son de cuadrado integrable

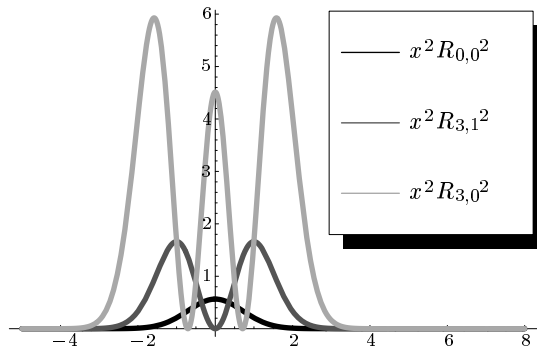


Figura 2: Estado fundamental (negro) y excitados  $n = 1, 2$  (grises) del oscilador armónico.

en  $\mathbb{R}$ , y por tanto no tienen sentido físico. De esta forma las únicas soluciones estacionarias del oscilador armónico son las funciones (71) anteriores.

Finalmente, mencionemos que las autofunciones del oscilador definen una base ortogonal completa en el espacio de las funciones de cuadrado integrable y por tanto las podemos usar para desarrollar en la misma cualquier función de este espacio.

**Ejercicio:** Usando el método anterior resuelve la EDO

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dF(r)}{dr} \right) + \left( \frac{l(l+1)}{2r^2} - \frac{1}{r} + E \right) F(r) = 0,$$

que representa la componente radial de la ecuación de Schrodinger para el átomo de hidrógeno. Para ello se debe hacer el cambio  $F(r) = R(r)/r$  que la transforma en una EDO de la forma

$$R''(r) + \left[ 2 \left( E + \frac{1}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0,$$

o sea, de la forma (66) con

$$\sigma(r) = r, \quad \tilde{\sigma}(r) = 2Er^2 + 2r - l(l+1).$$

Más detalles sobre este tema se pueden encontrar en:

1. R. Álvarez-Nodarse. Polinomios hipergométricos y q-polinomios. Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano" Número 26. Prentas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza, 2003.
2. A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov, Special Functions of Mathematical Physics. Birkhäuser Verlag, Basilea, 1988.

## 6. Transformadas integrales

### 6.1. La transformada de Fourier

Sea  $f$  una función cualquiera, no necesariamente periódica.

Si nos restringimos al intervalo  $[-l, l] \subset \mathbb{R}$  podemos suponer que la función es periódica de periodo  $2l$  y entonces, si  $f$  es lo suficientemente buena,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(\omega_k, l) e^{i\omega_k x}, \quad \omega_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde

$$c(\omega_k, l) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\omega_k x} dx.$$

Definamos la siguiente función, en caso que exista<sup>4</sup>

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Nótese que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l}{\pi} c(\omega_k, l) = c(\omega_k).$$

Usando lo anterior es fácil ver que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(\omega_k, l) e^{i\omega_k x} \frac{\pi}{l} = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

por tanto, si  $f$  es suficientemente buena tenemos que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx,$$

o, equivalentemente,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \right) e^{-i\omega x} d\omega.$$

Lo anterior es, por tanto, un análogo de la serie de Fourier válido para funciones definidas sobre todo  $\mathbb{R}$ .

**Definición 6.1** Dada una función  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ , definiremos su transformada de Fourier que denotaremos por  $\hat{f}$  o  $\mathcal{F}[f]$  a la función

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \quad (72)$$

Por comodidad definiremos también la transformación

$$\overline{\mathcal{F}}[f](\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx. \quad (73)$$

ante, bajo ciertas condiciones sobre  $f$ ,  $2\pi\overline{\mathcal{F}}[f]$  es la inversa de  $\mathcal{F}[f]$ , i.e.,

$$f(x) = 2\pi\overline{\mathcal{F}}[\hat{f}](x), \quad \mathcal{F}[f]^{-1} = 2\pi\overline{\mathcal{F}}[\hat{f}].$$

---

<sup>4</sup>Basta que  $f$  sea absolutamente integrable en  $\mathbb{R}$ , i.e.,  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Definición 6.2** A la función  $F(\lambda) = |\widehat{f}(\lambda)|$ , se le denomina espectro de la función  $f$ .

**Lema 6.3** Sea  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ ,  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , i.e.,  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty$ . Entonces

1. Existe la transformada  $\widehat{f}(\lambda)$  ( $\mathcal{F}[f](\lambda)$ ), para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2.  $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$ .
3. La función  $\widehat{f}(\lambda)$  es continua en  $\mathbb{R}$ .
4.  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\lambda) = 0$ .

**Lema 6.4** Sea  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ , continua y casi continuamente derivable en  $\mathbb{R}$ .

1. Si  $f'(x)$  es absolutamente integrable en  $\mathbb{R}$ , entonces existe el  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x)$ .
2. Si ambas funciones  $f'(x)$  y  $f(x)$  son absolutamente integrables en  $\mathbb{R}$ , entonces  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

**Teorema 6.5** Convergencia puntual de la integral de Fourier

Sea  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  continua y casi-continuamente derivable en  $\mathbb{R}$ . Entonces la integral de Fourier converge a  $f$ :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \iff \overline{\mathcal{F}}[\widehat{f}](x) = f(x) \iff \overline{\mathcal{F}}[\cdot] = \mathcal{F}[\cdot]^{-1}.$$

### 6.1.1. Propiedades de la Transformada de Fourier

En adelante definiremos el operador de traslación  $\tau_h$

$$\tau_h f(x) = f(x+h), \quad h \in \mathbb{C}. \quad (74)$$

**Proposición 6.6** 1. La transformada de Fourier es lineal: para todas  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\lambda) = \alpha \mathcal{F}[f](\lambda) + \beta \mathcal{F}[g](\lambda) + \alpha \widehat{f}(\lambda) + \beta \widehat{g}(\lambda).$$

2.  $\widehat{\tau_h f}(\lambda) = \mathcal{F}[\tau_h f](\lambda) = \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda h}$
3.  $\widehat{f e^{ixh}}(\lambda) = \tau_{-h} \widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda - h)$ .
4.  $\mathcal{F}[\alpha^{-1} f(x/\alpha)](\lambda) = \mathcal{F}[f](\alpha\lambda) = \widehat{f}(\alpha\lambda)$ .

**Proposición 6.7** Sea  $f \in C^{(k)}(\mathbb{R})$  tal que  $f, f', \dots, f^{(k)}$  son absolutamente integrables. Entonces

1.  $\mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) = (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda)$ ,  $n = 0, 1, \dots, k$ .
2.  $\mathcal{F}[f](\lambda) = \widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^k}\right)$ .

**Proposición 6.8** Supongamos que  $f$  y  $x^k f(x)$  son absolutamente integrables en  $\mathbb{R}$ . Entonces

1.  $\mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) = \widehat{f^{(k)}}(\lambda) \in C^k(\mathbb{C})$ .
2.  $\widehat{f^{(n)}}(\lambda) = \frac{d^n \mathcal{F}[f]}{d\lambda^n}(\lambda) = (-i)^k \widehat{x^n f}(\lambda) = (-i)^k \mathcal{F}[x^n f](\lambda), \forall n = 0, 1, \dots, k$ .

Además, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g(x)dx, \quad (75)$$

de donde se deduce la propiedad

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\widehat{g}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\overline{g(x)}dx \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 dx. \quad (76)$$

### 6.1.2. Problemas

**Problema 6.1** Encontrar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones.

1.  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, a > 0$ .
2.  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = e^{-a|x|}, a > 0$ .
3.  $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, h(x) = e^{-x^2/2}$
4. Prueba que para  $h_a(\lambda)$

$$h_a(\lambda) = Ce^{-a^2 x^2}, \quad \widehat{h_a}(\lambda) = \mathcal{F}[h_a](\lambda) = \frac{C}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2/(4a^2)}. \quad (77)$$

5.  $u_l : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, u_l(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq l, \\ 0, & |x| > l \end{cases}$ .
6.  $w : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, w(x) = \begin{cases} e^{-ax} \sin bt, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, a > 0$ .
7.  $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, y(x) = \begin{cases} e^{-ax} \cos bt, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, a > 0$ .

**Problema 6.2** Dada dos funciones  $f$  y  $g$  absolutamente integrables se define la convolución  $(f * g)(x)$  mediante la expresión

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(z)g(x-z)dz = \int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z)dz.$$

Entonces  $\mathcal{F}[f * g](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda)\mathcal{F}[g](\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)$ .

Probar además, que  $s\mathcal{F}[fg](\lambda) = (\widehat{f} * \widehat{g})(\lambda)$ .

**Problema 6.3** Usando la Transformada de Fourier resolver las EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



## 6.2. La transformada de Laplace

**Definición 6.9** Sea  $f$  una función definida en  $[0, \infty)$ . La transformada de Laplace  $\mathfrak{L}[f]$  o  $\mathcal{F}[\cdot](t)$  es la transformada integral

$$\mathcal{F}[\cdot](t) = \mathfrak{L}[f](t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx, \quad (78)$$

donde la integral se entiende en el sentido impropio, o sea

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-tx} f(x) dx.$$

**Definición 6.10** Diremos que una función  $f$  es de orden exponencial si existen dos constantes no negativas  $c$  y  $M$  tales que  $|f(x)| \leq Me^{cx}$  para todo  $x \geq 0$ .

**Teorema 6.11** Si  $f$  es una función continua a trozos de orden exponencial entonces  $f$  tiene transformada de Laplace para todo  $t$  suficientemente grande.

En la siguiente tabla incluimos algunas de las transformadas de Laplace más comunes incluida la de la función escalón  $\chi_c(s)$  definida como 1 si  $x \in [0, c]$  y 0 en el resto.

$f(x)$	$\mathcal{F}[\cdot](t) = \mathfrak{L}[f](t)$
$c$	$\frac{c}{t}$
$x^n$	$\frac{n!}{t^{n+1}}$
$e^{ax}$	$\frac{1}{t-a}, \quad t > a$
$\text{sen}(ax)$	$\frac{a}{t^2 + a^2}$
$\text{cos}(ax)$	$\frac{t}{t^2 + a^2}$
$\text{senh}(ax)$	$\frac{a}{t^2 - a^2}, \quad t > a$
$\text{cosh}(ax)$	$\frac{t}{t^2 - a^2}, \quad t > a$
$x^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad t > 0$
$\chi_c(x)$	$\frac{e^{-ct}}{t}, \quad t > 0$

Cuadro 3: Transformadas de Laplace de algunas funciones

**Proposición 6.12** Si  $\mathcal{F}[\cdot](t) = \mathfrak{L}[f](t)$  entonces

1.  $\mathfrak{L}[f'](t) = t\mathfrak{L}[f](t) - f(0) = t\mathcal{F}[(t) - f(0)]$  y en general  $\mathfrak{L}[f^{(n)}](t) = t^n\mathcal{F}[(t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^k f^{(n-k-1)}(0)]$

2.  $\mathfrak{L}[e^{ax}f(x)](t) = \mathcal{F}[(t-a)]$

3.  $\mathfrak{L}[xf(x)](t) = -\mathcal{F}'(t)$  y en general,  $\mathfrak{L}[x^n f(x)](t) = (-1)^n\mathcal{F}^{(n)}(t)$ .

4.  $\mathfrak{L}[\chi_c(x)f(x-c)] = e^{-ct}\mathcal{F}[(t)]$ .

5.  $\mathfrak{L}[(f * g)(x)](t) = \mathfrak{L}[f(x)](t) \cdot \mathfrak{L}[g(x)](t)$ .

### 6.3. Problemas

**Problema 6.4** *Calcula las transformadas de Laplace de las funciones de la tabla 6.2.*

**Problema 6.5** *Calcula las transformadas de Laplace de las funciones  $x \cos(wx)$  y  $x \sin(wx)$ . Usando lo anterior encuentra la transformada de las funciones*

$$\frac{t^2}{(t^2 + w^2)^2}, \quad \frac{1}{(t^2 + w^2)^2}$$

**Problema 6.6** *Usando los resultados del problema anterior encuentra, usando la transformada de Laplace la solución de la EDO*

$$y'' + w^2y = f_0 \sin(wx), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

**Problema 6.7** *Usa la transformada de Laplace para resolver las EDOs*

1.  $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0,$
2.  $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1,$
3.  $y'' + y = xe^x, y(0) = y'(0) = 0,$
4.  $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x} \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 1,$
5.  $y'' + 2y' + y = [1 - \chi_{\pi/2}(x)] \sin(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0,$
6.  $y'' + 3y' + 2y = \chi_{\pi/2}(x)e^{3x}, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

**Problema 6.8** *La EDO  $xy'' + y' + xy = 0$ , se conoce como ecuación de Bessel de orden 0. Prueba que si  $\mathfrak{Y}(t)$  es la transformada de Laplace de la solución de esta EDO con  $y(0) = 1$ , prueba que entonces  $\mathfrak{Y}$  satisface la EDO*

$$(t^2 + 1)\mathfrak{Y}'(t) + t\mathfrak{Y}(t) = 0.$$

*Prueba que la solución de la EDO anterior se puede expresar en serie como*

$$\mathfrak{Y}(t) = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{1}{t^{2n+1}}.$$

*A partir de lo anterior deduce la función  $y(x)$  solución de la EDO de Bessel.*

**Problema (2.5 ptos)**

1. Dada una función  $f$  de periodo  $2\pi$ , define su serie de Fourier.
2. Sea la función  $2\pi$  periódica  $f(x) = \cos x/2$ . Calcula su serie de Fourier  $S_f(x)$ .
3. ¿Es  $S_f(x) = f(x)$  para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ . Justifica tu respuesta?
4. Utilizando si es necesario los apartados anteriores resuelve la EDP:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t), \\ u(0, t) = u(\pi, t) &= 0, \quad u(x, 0) = \cos x/2. \end{aligned}$$

**Problema (2 ptos)**

1. Define la transformada de Fourier  $\widehat{f}(\omega)$  de una función  $f(x)$  absolutamente integrable en  $\mathbb{R}$ .
2. Encuentra la transformada de Fourier de la función  $xe^{-x^2}$ .
3. Demuestra que si  $f$  es  $n$  veces derivable y sus  $n$  derivadas son absolutamente integrables en  $\mathbb{R}$  entonces  $\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n \widehat{f}(\omega)$ .

La serie trigonométrica de Fourier está definida por

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

donde los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

para  $n \geq 0$ .

En nuestro ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & -\pi \leq x < 0 \\ x + 2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

es una función impar por tanto  $a_n = 0$  para todo  $n \geq 0$ . Además,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+2) \sin(nx) dx = \frac{4(1 - (-1)^n) - 2\pi(-1)^n}{n}.$$

Luego

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n) - 2\pi(-1)^n}{n} \sin nx.$$

Además  $s(x) \neq f(x)$  en  $x = 0$  ya que  $f$  no es continua en dicho punto, de hecho en 0  $s(x)$  tiende a 0 mientras que  $f(0) = 2$ .

Resolvamos ahora la ecuación del calor

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t),$$

con las condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$

y la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x).$$

Nuevamente usaremos el método de separación de variables:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad X(x) \neq 0, \quad T(t) \neq 0,$$

que al sustituir en la ecuación original nos da

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t), \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , i.e., tenemos las ecuaciones

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0,$$

y

$$T'(t) - a^2 \lambda T(t) = 0$$

La solución general de (15) depende del valor de  $\lambda$ . Es fácil comprobar que solamente se tienen soluciones no nulas si  $\lambda > 0$ . En este caso la solución general es

$$X(x) = \alpha \cos \sqrt{\lambda}x + \beta \sin \sqrt{\lambda}x,$$

que junto a las condiciones de contorno para  $X$  nos dan las soluciones

$$X_n(x) = \sin nx, \quad \lambda := \lambda_n = n^2.$$

En este caso para  $T$  obtenemos

$$T'(t) + a^2 n^2 T(t) = 0,$$

luego

$$T_n(t) = e^{-a^2 n^2 t}$$

y por tanto una solución de nuestra ecuación con las condiciones de contorno (13) será

$$u_n(x, t) = A_n e^{-a^2 n^2 t} \sin nx.$$

Como la ecuación del calor es lineal y homogénea entonces su solución general será de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 n^2 t} \sin nx.$$

Para encontrar los coeficientes indeterminados  $A_n$  supondremos que  $f$  es lo suficientemente buena (por ejemplo casi-continuamente derivable en  $[0, \pi]$ ) y vamos a extenderlas a todo el intervalo  $[-\pi, \pi]$  de forma impar, es decir de forma que  $f$  y  $g$  sean funciones impares. Entonces desarrollamos en serie de Fourier  $f$  y usamos las las condiciones iniciales (14) obtenemos

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Es decir,  $A_n = b_n$ , luego

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n) - 2\pi(-1)^n}{n} e^{-a^2 n^2 t} \sin nx.$$