Capítulo 8

La transformada de Laplace

8.1. Introducción a las transformadas integrales

En este apartado aprenderemos un método alternativo para resolver el problema de valores iniciales (4.5.1)

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x), \qquad p, q \in \mathbb{R}, \quad y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0'. \tag{8.1.1}$$

La idea consiste en convertir de alguna forma la EDO en una ecuación algebraica en general más "sencilla" de resolver y luego invertir el proceso de forma que obtengamos la solución buscada[1]. ¿Es posible y si lo es, cómo hacerlo? La respuesta la da una conocida *transformada integral.*

Para tener una idea de que es una trasformada integral consideraremos, por ejemplo, el espacio $\mathcal{R}_{[a,b]}$ de las funciones $f(x)$ integrables según Riemann en $[a,b]$ y sea $K(x,t)$ una función integrable en $[a,b]$, para todo $t \in A \subset \mathbb{R}$. Entonces podemos definir para cada una de las funciones de $\mathcal{R}_{[a,b]}$ podemos definir un *funcional*[2] $\mathcal{T}[f]$ tal que

$$\mathcal{T}[f] = \int_a^b K(x,t)f(x)dx = F(t).$$

La función $K(x,t)$ se suele denominar *núcleo* de la transformación y a $F(t)$ transformada de la función f. Una propiedad inmediata de éstas transformadas es que son lineales, es decir, cuales quiera sean los números α y β y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ de $\mathcal{R}_{[a,b]}$,

$$\mathcal{T}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{T}[f] + \beta\mathcal{T}[g].$$

8.2. La transformada integral de Laplace

Vamos a introducir ahora una transformada integral de especial importancia: la transformada de Laplace

Definición 8.2.1 *Sea f una función definida en $[0,\infty)$. La transformada de Laplace $\mathfrak{L}[f]$ o $\mathcal{F}(t)$ es la transformada integral*

$$\mathcal{F}(t) = \mathfrak{L}[f](t) = \int_0^\infty e^{-tx}f(x)dx, \tag{8.2.1}$$

[1]Es similar a la idea que llevó a la apariación de los logaritmos. O sea, convertir una operación "complicada" en otra más "sencilla" para luego, al invertir dicha operación obtener el resultado. Es fácil comprobar que multiplicar dos números cualesquiera es mucho más complicado que sumarlos, de ahí la utilidad e importancia que tuvieron las primeras tablas de logaritmos.

[2]Un funcional no es más que una función definida sobre el espacio de funciones

donde la integral se entiende en el sentido impropio, o sea

$$\int_0^\infty e^{-tx} f(x)dx = \lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-tx} f(x)dx.$$

Antes de continuar debemos tener en cuenta que esta integral a diferencia de la transformada $\mathcal{T}[f]$ anterior puede no estar definida para ciertas funciones continuas pues aunque exista la integral $\int_0^z e^{-tx} f(x)dx$ para todo z puede que el límite no exista, o bien, que exista no para todo $t \in \mathbb{R}$. Por ejemplo,

$$\mathfrak{L}[e^{ax}](t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t-a}, & t > a \\ \infty, & s \leq a \end{cases}, \qquad \mathfrak{L}[e^{x^2}](t) = \int_0^\infty e^{x^2 - tx} dx = \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Una pregunta natural es por tanto que clase de funciones tienen transformadas de Laplace. En este curso nos restringiremos a las funciones de orden exponencial.

Definición 8.2.2 *Diremos que una función f es de orden exponencial si existen dos constantes no negativas c y M tales que $|f(x)| \leq Me^{cx}$ para todo $x \geq 0$.*

Teorema 8.2.3 *Si f es una función continua a trozos de orden exponencial entonces f tiene transformada de Laplace para todo t suficientemente grande.*

Demostración: Tenemos, para $t > c$,

$$|e^{-tx} f(x)| = e^{-tx}|f(x)| \leq Me^{-tx+cx} = Me^{-x(t-c)}.$$

Pero la integral

$$\int_0^\infty e^{-x(t-c)} dx = \lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-x(t-c)} dx = \lim_{z\to\infty} M \frac{e^{(c-t)z-1}}{c-t} = \frac{M}{t-c},$$

luego por el criterio de comparación de Weierstrass para las integrales impropias la integral $\int_0^\infty e^{-tx} f(x)dx$ es absolutamente convergente, y por tanto converge. Nótese además que de la prueba se deduce que la transformada de Laplace existe para todo $t > c$. ■

La siguiente tabla de Transformadas de Laplace es de gran interés. En ella están las principales transformadas de Laplace que usaremos incluida la de la función escalón $\chi_c(s)$ definida como 1 si $x \in [0, c]$ y 0 en el resto.

Proposición 8.2.4 *Si $\mathcal{F}(t) = \mathfrak{L}[f](t)$ entonces*

1. $\mathfrak{L}[f'](t) = t\mathfrak{L}[f](t) - f(0) = t\mathcal{F}(t) - f(0)$,
2. $\mathfrak{L}[f^{(n)}](t) = t^n\mathcal{F}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^k f^{(n-k-1)}(0) = t^n\mathcal{F}(t) - t^{n-1}f(0) - t^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$,
3. $\mathfrak{L}[e^{ax}f(x)](t) = \mathcal{F}(t-a)$,
4. $\mathfrak{L}[xf(x)](t) = -\mathcal{F}'(t)$,
5. $\mathfrak{L}[x^n f(x)](t) = (-1)^n\mathcal{F}^{(n)}(t)$,
6. $\mathfrak{L}[\chi_c(x)f(x-c)](t) = e^{-ct}\mathcal{F}(t)$,
7. $\mathfrak{L}[\chi_c(x)f(x)](t) = e^{-ct}\mathfrak{L}[f(x+c)](t)$.

$f(x)$	$\mathcal{F}(t) = \mathfrak{L}[f](t)$
c	$\dfrac{c}{t}$
x^n	$\dfrac{n!}{t^{n+1}}$
e^{ax}	$\dfrac{1}{t-a}, \quad t > a$
$\operatorname{sen}(ax)$	$\dfrac{a}{t^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
$\operatorname{senh}(ax)$	$\dfrac{a}{t^2-a^2}, \quad t > a$
$\cosh(ax)$	$\dfrac{t}{t^2-a^2}, \quad t > a$
$x^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{t}}, \quad t > 0$
$\chi_c(x)$	$\dfrac{e^{-ct}}{t}, \quad t > 0$

Tabla 8.1: Transformadas de Laplace de algunas funciones

Demostración: Usando la integración por partes para la integral impropia tenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f'](t) &= \int_0^\infty e^{-tx}f'(x)dx = e^{-tx}f(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (e^{-tx})'f(x) = -f(0) + t\int_0^\infty e^{-tx}f(x)dx \\ &= t\mathcal{F}(t) - f(0).\end{aligned}$$

Supongamos que es cierta para n, entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f^{(n+1)}](t) &= \mathfrak{L}[(f^{(n)})'] = t\,\mathfrak{L}[f^{(n)}](t) - f^{(n)}(0) = t\left(t^n\mathcal{F}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^k f^{(n-k-1)}(0)\right) - f^{(n)}(0) \\ &= t^{n+1}\mathcal{F}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{k+1} f^{(n-k-1)}(0) - f^{(n)}(0) = t^{n+1}\mathcal{F}(t) - \sum_{k=0}^{n} t^k f^{(n-k)}(0),\end{aligned}$$

por tanto lo es para $n+1$ y por inducción se deduce 2.

Para probar 3 basta notar que

$$\mathfrak{L}[e^{ax}f(x)](t) = \int_0^\infty e^{-(t-a)x}f(x)dx = \mathcal{F}(t-a).$$

Para probar 4 basta derivar (8.2.1) respecto a t.[3] Derivando n veces se deduce 5. La propiedad 7 se deduce fácilmente de 6 y ésta, a su vez, es consecuencia de las igualdades

$$\mathfrak{L}[\chi_c(x)f(x-c)] = \int_c^\infty f(x-c)e^{-xt}dx = \int_0^\infty f(\xi)e^{-(c+\xi)t}d\xi = e^{-ct}\mathcal{F}(t).$$

[3] No siempre se puede hacer esta operación, no obstante en este caso es posible.

■

Veamos como usar las propiedades anteriores para resolver el problema de valores iniciales

$$y''ay' + by = f(x), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'.$$

Usando que $\mathfrak{L}[y'] = t\mathfrak{L}[y] - y(0)$, $\mathfrak{L}[y''] = t^2\mathfrak{L}[y] - ty(0) - y'(0)$, y denotando por $\mathcal{F}(t) = \mathfrak{L}[f]$, tenemos que la EDO anterior se transforma en la siguiente ecuación algebraica

$$t^2\mathfrak{L}[y] - ty_0 - y_0' + at\mathfrak{L}[y] - ay_0 + b\mathfrak{L}[y] = \mathcal{F}(t)$$

de donde se deduce que transformada de la solución tiene la forma

$$\mathfrak{L}[y] = \frac{\mathcal{F}(t) + (t+a)y_0 + y_0'}{t^2 + at + b}. \tag{8.2.2}$$

Así solo nos resta saber como encontrar la "inversa" de la transformada anterior, es decir encontrar la función $y(x)$ tal que $\mathfrak{L}[y] = \mathfrak{L}[y]$. Este problema no es sencillo de resolver y de hecho requiere un gran conocimiento de la teoría de funciones de variables complejas por lo que sólo nos limitaremos a "adivinar" muchas de ellas usando las propiedades antes descritas así como la tabla de transformadas conocidas.

Definición 8.2.5 *Dada la función $\mathcal{F}(t)$, diremos que la función $f(x)$ es la antitransformada de $\mathcal{F}(t)$ si $\mathcal{F}(t) = \mathfrak{L}[f](t)$, y lo denotaremos por $f(x) = \mathfrak{L}^{-1}[\mathcal{F}(t)]$.*

Ejemplo 8.2.6 *Encontrar las antitransformadas de*

$$\frac{1}{(t+a)^2 + b^2}, \qquad \frac{t}{(t+a)^2 + b^2}.$$

En el primer caso tenemos $\mathfrak{L}[\operatorname{sen}(bx)] = b/(t^2 + b^2)$, luego

$$\mathfrak{L}[e^{-ax}\operatorname{sen}(bx)] = \frac{b}{(t+a)^2 + b^2} \iff \mathfrak{L}\left[\frac{1}{(t+a)^2 + b^2}\right] = \frac{1}{b}e^{-ax}\operatorname{sen}(bx).$$

Análogamente, $\mathfrak{L}[\cos(bx)] = t/(t^2 + b^2)$, luego $\mathfrak{L}[e^{-ax}\cos(bx)] = \frac{t+a}{(t+a)^2+b^2}$, por tanto

$$\frac{t}{(t+a)^2 + b^2} = \frac{t+a}{(t+a)^2 + b^2} - \frac{a}{(t+a)^2 + b^2} = \mathfrak{L}[e^{-ax}\cos(bx)] - a\mathfrak{L}[\frac{1}{b}e^{-ax}\operatorname{sen}(bx)],$$

de donde deducimos

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{t}{(t+a)^2 + b^2}\right] = \frac{e^{-ax}}{b}[b\cos(bx) - a\operatorname{sen}(bx)].$$

Ejemplo 8.2.7 *Calcular la antitransformada de* $\dfrac{e^{-ct}}{(t+a)^2 + b^2}$.

Como $\mathfrak{L}[e^{-ax}\operatorname{sen}(bx)] = \frac{b}{(t+a)^2+b^2}$, entonces usando la propiedad 6 de la proposición 8.2.4 tenemos

$$\mathfrak{L}[\chi_c(x)e^{-a(x-c)}\operatorname{sen}(b(x-c)] = e^{-ct}\mathfrak{L}[e^{-ax}\operatorname{sen}(bx)],$$

por tanto,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ct}}{(t+a)^2 + b^2}\right] = \frac{1}{b}\chi_c(x)e^{-a(x-c)}\operatorname{sen}(b(x-c).$$

Veamos ahora algunos ejemplos de aplicación a EDOs lineales de orden 2. Comenzaremos mostrando como resolver dos casos particulares de la EDO homogénea.

Ejemplo 8.2.8 *Resolver la EDO $y'' + 3y' + 2y = 0$ con $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$.*

Usando (8.2.2) tenemos

$$\mathfrak{L}[y] = \frac{(t-3)y_0 + y_0'}{t^2 + 3t + 2},$$

que en fracciones simples nos da

$$\mathfrak{L}[y] = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}.$$

Ahora bien, como $\mathfrak{L}[e^x] = 1/(t+1)$ y $\mathfrak{L}[e^{2x}] = 1/(t+2)$, tenemos

$$\mathfrak{L}[y] = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} = A\mathfrak{L}[e^x] + B\mathfrak{L}[e^{2x}] = \mathfrak{L}[Ae^x + Be^{2x}] \quad \Longrightarrow \quad y(x) = Ae^x + Be^{2x}.$$

Ejemplo 8.2.9 *Resolver la EDO $y'' + 2y' + y = 0$ con $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$.*

Usando (8.2.2) y aplicando el método de fracciones simples obtenemos

$$\mathfrak{L}[y] = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2}.$$

Como antes tenemos $\mathfrak{L}[e^x] = 1/(t+1)$ y nos falta encontrar la función f cuya transformada es $\mathfrak{L}[f] = 1/(t+1)^2$. Existen diversas formas de dar con esta función. Por ejemplo, combinando la propiedad 3 de la proposición 8.2.4 y la transformada $\mathfrak{L}[x] = 1/t^2$ tenemos que $\mathfrak{L}[xe^{ax}] = 1/(t-a)^2$, por tanto, escogiendo $a = -1$ tenemos $\mathfrak{L}[xe^{-x}] = 1/(t+1)^2$ y por tanto

$$\mathfrak{L}[y] = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} = A\mathfrak{L}[e^{-x}] + B\mathfrak{L}[xe^{-x}] = \mathfrak{L}[Ae^{-x} + Bxe^{-x}] \quad \Longrightarrow \quad y(x) = Ae^{-x} + Be^{-x}.$$

El mismo resultado se obtiene si usamos la propiedad 4 de la proposición (8.2.4) escogiendo $f(x) = e^{-x}$.

Ejemplo 8.2.10 *Resolver el PVI $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.*

Aplicamos la fórmula (8.2.2) y obtenemos

$$\mathfrak{L}[y] = \frac{1}{(t-3)(t^2 - 3t + 2)} - \frac{t-3}{t^2 - 3t + 2}.$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{(t-3)(t^2 - 3t + 2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{t-1},$$
$$\frac{t-3}{t^2 - 3t + 2} = -\frac{1}{t-2} + 2\frac{1}{t-1},$$

luego

$$\mathfrak{L}[y] = \frac{1}{2}\frac{1}{t-3} - 2\frac{1}{t-2} + \frac{5}{2}\frac{1}{t-1} = \frac{1}{2}\mathfrak{L}[e^{3x}] - 2\mathfrak{L}[e^{2x}] + \frac{5}{2}\mathfrak{L}[e^x],$$

de donde deducimos que la solución es $y(x) = e^{3x}/2 - 2e^{2x} + 5e^x/2$.[4]

Ejercicio 8.2.11 *Resolver el PVI $y'' + 4y = 4x$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.*

Es importante destacar que la transformada de Laplace no sólo está bien definida para muchas funciones continuas, sino que también lo está para funciones continuas a trozos lo cual nos permitirá resolver directamente el PVI (8.1.1) cuando la función f sea continua a trozos.

[4]Resolverlo por el método del apartado anterior y comprobar que la solución es la misma.

Ejemplo 8.2.12 *Resolver el PVI* $y'' + 4y = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ *con* $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.

Aplicamos $\mathfrak{L}[\cdot]$ a la EDO y obtenemos, usando (8.2.2)

$$\mathfrak{L}[y](t) = \mathcal{Y}(t) = \frac{3t-2}{t^2+4} + \frac{e^{-4t}}{t(t^2+4)}.$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{t(t^2+4)} = \frac{1}{4t} - \frac{t}{4(t^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\mathfrak{L}[1] - \mathfrak{L}[\operatorname{sen}(2x)]\right),$$

así que la propiedad 6 de la proposición 8.2.4 nos da

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4t}}{t(t^2+4)}\right] = \frac{1}{4}\left(\chi_4(x) + \chi_4(x)\operatorname{sen}(2x-8)\right).$$

Además, es fácil comprobar que

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{3t-2}{t^2+4}\right] = 3\cos(2x) - 2\operatorname{sen}(2x),$$

luego

$$\mathfrak{L}^{-1}[\mathcal{Y}(t)] = 3\cos(2x) - 2\operatorname{sen}(2x) + \frac{\chi_4(x)}{4}(1 - \operatorname{sen}(2x-8)).$$

Ejemplo 8.2.13 *Resolver* $y'' + 3y' + 2y = \chi_1(x)e^{3x}$ *con* $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Al igual que en el ejemplo anterior tenemos, usando (8.2.2)

$$\mathcal{Y}(t) = \frac{e^3 e^{-t}}{(t-3)(t+1)(t+2)} + \frac{t+4}{(t+1)(t+2)}.$$

Ahora bien,

$$\frac{t+4}{(t+1)(t+2)} = \frac{3}{t+1} - \frac{2}{t+2} = \mathfrak{L}[3e^{-x} - 2e^{-2x}],$$

$$\frac{1}{(t-3)(t+1)(t+2)} = \frac{1}{20}\frac{1}{(t-3)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(t+1)} + \frac{1}{5}\frac{1}{(t+2)} = \mathfrak{L}\left[\frac{1}{20}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{5}e^{-2x}\right].$$

Entonces, usando la propiedad 6 de la proposición 8.2.4 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{e^3 e^{-t}}{(t-3)(t+1)(t+2)} &= e^3 e^{-t}\,\mathfrak{L}\left[\frac{1}{20}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{5}e^{-2x}\right] \\ &= e^3\left[\chi_1(x)\frac{1}{20}e^{3x-3} - \frac{1}{4}e^{-x+1} + \frac{1}{5}e^{-2x+2}\right], \end{aligned}$$

luego

$$y(x) = \mathfrak{L}^{-1}[\mathcal{Y}(t)] = 3e^{-x} - 2e^{-2x} + \chi_1(x)\frac{1}{20}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x+4} + \frac{1}{5}e^{-2x+5}.$$

La última propiedad que consideraremos es la transformada de una *convolución de funciones.*

Definición 8.2.14 *Dadas dos funciones integrables* f *y* g*, definiremos la convolución* $(f \star g)$ *de ambas a la función*

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(x-z)g(z)dz.$$

Si además, f y g son de orden exponencial siendo $\mathcal{F}(t)$ y $\mathcal{G}(t)$ las transformadas de Laplace de f y g, respectivamente, entonces existe la transformada de Laplace de $(f \star g)(x)$ y

$$\mathfrak{L}[f \star g] = \mathcal{F}(t)\,\mathcal{G}(t). \tag{8.2.3}$$

Para comprobarlo basta notar que

$$\mathfrak{L}[f \star g] = \int_0^\infty e^{-xt}\left(\int_0^x f(x-z)g(z)dz\right)dx = \int_0^\infty e^{-xt}\left(\int_0^\infty \chi_x(z)f(x-z)g(z)dz\right)dx$$
$$= \int_0^\infty g(z)\left(\int_0^\infty \chi_x(z)f(x-z)e^{-xt}dx\right)dz = \int_0^\infty g(z))e^{-zt}\mathcal{F}(t)dz = \mathcal{F}(t)\mathcal{G}(t).$$

Ejemplo 8.2.15 *Usando lo anterior calcula* $\mathfrak{L}^{-1}[1/(t^2+1)^2]$.

Como $\mathfrak{L}[\operatorname{sen} x] = \mathcal{F}(t) = 1/(t^2+1)$, tenemos

$$\frac{1}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{t^2+1}\frac{1}{t^2+1} = \mathcal{F}(t)\mathcal{F}(t),$$

luego,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(t^2+1)^2}\right] = (\operatorname{sen} x) \star (\operatorname{sen} x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x-z)\operatorname{sen} z dz = -\frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x.$$

Ejercicio 8.2.16 *Calcula* $\mathfrak{L}^{-1}[1/(t-a)\,1/(t-b)]$.

Lo anterior nos permite también resolver las EDOs de orden dos de una forma directa tal y como se muestra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 8.2.17 *Resuelve el PVI* $y'' + 5y' + 4y = g(x)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Tomamos la transformada de Laplace de forma que usando (8.2.2) tenemos

$$\mathcal{Y}(t) = \frac{\mathcal{G}(t)}{(t+1)(t+4)} = \frac{1}{(t+1)(t+4)}\,\mathcal{G}(t).$$

Si denotamos por $y_h(x)$ la antitransformada de $1/(t+1)(t+4)$ (cuyo valor en este caso es $-1/3e^{-x} + 1/3e^{-4x}$), entonces la solución del PVI se puede escribir de la forma

$$y(x) = \int_0^x g(x-z)y_h(z)dz. \tag{8.2.4}$$

Ejemplo 8.2.18 *Resuelve el PVI* $y'' + 5y' + 4y = g(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

8.3. Problemas

Problema 8.3.1 *Calcula las transformadas de Laplace de las funciones de la tabla 8.2.*

Problema 8.3.2 *Calcula las transformadas de Laplace de las funciones* $x\cos(\omega x)$ *y* $x\operatorname{sen}(\omega x)$ *y prueba que*

$$\frac{t^2}{(t^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{2\omega}\mathfrak{L}[\operatorname{sen}(\omega x) + x\omega\cos(\omega x)].$$

Usando lo anterior encuentra la transformada de la función $(t^2+\omega^2)^{-2}$. *Como aplicación resuelve el PVI*

$$y'' + \omega^2 y = f_0 \operatorname{sen}(\omega x), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Problema 8.3.3 *Calcula las antitransformadas de las siguientes funciones*

$$\frac{1}{(t+a)^2}, \quad \frac{1}{(t+a)^n}, \quad \frac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}, \quad \frac{e^{-ct}t}{(t+a)^2+b^2}.$$

Problema 8.3.4 *Encuentra la solución de las EDOs*

1. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
3. $y'' + y = xe^x$, $y(0) = y'(0) = 0$,
4. $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x} \operatorname{sen} x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
5. $y'' + 2y' + y = [1 - \chi_{\pi/2}(x)] \operatorname{sen}(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
6. $y'' + 3y' + 2y = \chi_{\pi/2}(x)e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Problema 8.3.5 *La EDO $xy'' + y' + xy = 0$, se conoce como ecuación de Bessel de orden 0. Prueba que si $\mathcal{Y}(t)$ es la transformada de Laplace de la solución de esta EDO con $y(0) = 1$, prueba que entonces $\mathcal{Y}$ satisface la EDO*

$$(t^2 + 1)\mathcal{Y}'(t) + t\mathcal{Y}(t) = 0.$$

Prueba que la solución de la EDO anterior se puede expresar en serie como

$$\mathcal{Y}(t) = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{t^{2n+1}}.$$

A partir de lo anterior deduce la función $y(x)$ solución de la EDO de Bessel.

Problema 8.3.6 *Usar la transformada de Laplace para resolver los siguientes PVI de SEDO:*

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} Y, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 - \chi_\pi(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$