APLICACIONES DE LAS SERIES DE FOURIER

Renato Álvarez Nodarse

1. Resolución de EDPs

1.1. La ecuación de ondas

En este apartado vamos a usar las series de Fourier para resolver la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t),$$

con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{1.1}$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = g(x). \tag{1.2}$$

Esta ecuación, conocida como ecuación de ondas, modeliza el movimiento de una onda unidimensional (por ejemplo el sonido).

Usualmente para resolver este problema se usa el método de separación de variables:

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad X(x) \not\equiv 0, \quad T(t) \not\equiv 0,$$

que al sustituir en la ecuación original nos da

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t), \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, i.e., tenemos las ecuaciones[1]

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{1.3}$$

[1] Como $u(0,t) = 0 = x(0)T(t)$, se deduce $X(0) = 0$ pues en caso contrario $T(t) \equiv 0$, lo que sera una contradicción.

y

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \tag{1.4}$$

Por sencillez asumiremos $a = 1$.

La solución general de (1.3) depende del valor de λ. Es fácil comprobar que solamente se tienen soluciones no nulas si $\lambda > 0$. En este caso la solución general es

$$X(x) = \alpha \cos \sqrt{\lambda}x + \beta \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x,$$

que junto a las condiciones de contorno para X nos dan las soluciones

$$X_n(x) = \operatorname{sen} nx, \quad \lambda := \lambda_n = n^2.$$

En este caso para T obtenemos ($a = 1$)

$$T''(t) + n^2 T(t) = 0,$$

luego

$$T_n(t) = A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt,$$

y por tanto una solución de nuestra ecuación con las condiciones de contorno (1.1) será

$$u_n(x,t) = (A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt) \operatorname{sen} nx.$$

Como la ecuación de ondas es lineal y homogénea entonces su solución general será de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt) \operatorname{sen} nx. \tag{1.5}$$

Para encontrar los coeficientes indeterminados A_n y B_n supondremos que f y g son lo suficientemente buenas (por ejemplo casi-continuamente derivables en $[0,\pi]$) y vamos a extenderlas a todo el intervalo $[-\pi,\pi]$ de forma impar, es decir de forma que f y g sean funciones impares. Entonces podemos desarrollar en serie de Fourier ambas funciones y además las correspondientes series son absoluta y uniformemente convergentes. Si ahora usamos las las condiciones iniciales (1.2) obtenemos[2]

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} nx,$$

[2]Suponiendo que la serie (1.5) se pueda derivar término a término respecto a t.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \operatorname{sen} nx,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx, \qquad B_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} g(x)\operatorname{sen} nx\, dx. \tag{1.6}$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que el perfil inicial de una cuerda viene dado por la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{Ax}{a} & 0 \leq x \leq a \\ \dfrac{A(\pi - x)}{\pi - a} & a \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

y que inicialmente está en reposo, es decir, $g(x) = 0$. Entonces usando (1.6) tenemos $B_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx = \frac{2A\operatorname{sen} an}{an^2(\pi - a)},$$

así que la solución es

$$u(x,t) = \frac{2A}{a(\pi - a)}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} an}{n^2}\cos nt \operatorname{sen} nx.$$

Supongamos ahora que el perfil inicial de una cuerda viene dado por la función

$$f(x) = \alpha x(\pi - x)$$

y que inicialmente está en reposo, es decir, $g(x) = 0$. Entonces usando (1.6) tenemos $B_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx = \frac{4\alpha(1 + (-1)^{n+1})}{n^3\pi},$$

y por tanto la solución es

$$u(x,t) = \frac{8\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}\cos(2n-1)nt \operatorname{sen}(2n-1)x.$$

Como ejercicio considerar el caso cuando

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \dfrac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ \pi - x & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi. \end{cases} \qquad \text{y} \quad g(x) = 0.$$

y el caso cuando $f(x) = 0$,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{v_0 x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ \dfrac{v_0(\pi - x)}{\pi - a} & a \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

1.2. La ecuación del calor

Consideremos ahora la ecuación del calor

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t),$$

con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{1.7}$$

y la condición inicial

$$u(x,0) = f(x). \tag{1.8}$$

Nuevamente usaremos el método de separación de variables:

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad X(x) \not\equiv 0, \quad T(t) \not\equiv 0,$$

que al sustituir en la ecuación original nos da

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t), \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, i.e., tenemos las ecuaciones

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{1.9}$$

y

$$T'(t) - a^2 \lambda T(t) = 0 \tag{1.10}$$

La solución general de (1.9) depende del valor de λ. Es fácil comprobar que solamente se tienen soluciones no nulas si $\lambda > 0$. En este caso la solución general es

$$X(x) = \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + \beta \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x,$$

que junto a las condiciones de contorno para X nos dan las soluciones

$$X_n(x) = \operatorname{sen} nx, \quad \lambda := \lambda_n = n^2.$$

En este caso para T obtenemos

$$T'(t) + a^2 n^2 T(t) = 0,$$

luego

$$T_n(t) = e^{-a^2 n^2 t}$$

y por tanto una solución de nuestra ecuación con las condiciones de contorno (1.7) será

$$u_n(x,t) = A_n e^{-a^2 n^2 t} \operatorname{sen} nx.$$

Como la ecuación del calor es lineal y homogénea entonces su solución general será de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 n^2 t} \operatorname{sen} nx. \tag{1.11}$$

Para encontrar los coeficientes indeterminados A_n supondremos que f es lo suficientemente buena (por ejemplo casi-continuamente derivable en $[0, \pi]$) y vamos a extenderlas a todo el intervalo $[-\pi, \pi]$ de forma impar, es decir de forma que f y g sean funciones impares. Entonces desarrollamos en serie de Fourier f y usamos las las condiciones iniciales (1.8) obtenemos

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} nx,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx. \tag{1.12}$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que la distribución inicial de la temperatura es uniforme, i.e., $f(x) = T_0$. Entonces, usando (1.12) tenemos $B_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2T_0(1 + (-1)^{n+1})}{\pi n},$$

así que la solución es

$$u(x,t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\, e^{-a^2(2n-1)^2 t} \operatorname{sen}(2n-1)x.$$

1.3. El problema del telégrafo

La ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t),$$

con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{1.13}$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0, \tag{1.14}$$

que modeliza la trasmisión telegráfica.

Para resolverlo usaremos el método de separación de variables:

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad X(x) \not\equiv 0, \quad T(t) \not\equiv 0,$$

que al sustituir en la ecuación original nos da

$$X(x)T''(t) + X(x)T'(t) + X(x)T(t) = a^2 X''(x)T(t), \quad \Rightarrow$$

$$a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = -\lambda,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, i.e., tenemos las ecuaciones

$$X''(x) + \lambda a^{-2} X(x) = 0, \qquad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{1.15}$$

y

$$T''(t) + T'(t) + T(t) - a^2 \lambda T(t) = 0 \tag{1.16}$$

La solución general de (1.15) depende del valor de λ. Es fácil comprobar que solamente se tienen soluciones no nulas si $\lambda > 0$. En este caso la solución general es

$$X(x) = \alpha \cos\sqrt{\lambda}x + \beta \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x,$$

que junto a las condiciones de contorno para X nos dan las soluciones

$$X_n(x) = \operatorname{sen} nx, \quad \lambda := \lambda_n = n^2.$$

En este caso para T obtenemos

$$T''(t) + T'(t) + (1 - a^2n^2)T(t) = 0,$$

luego

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\omega_n t} + B_n e^{-\frac{1}{2}t} e^{\omega_n t}, \qquad \omega_n = \sqrt{4a^2n^2 - 3},$$

o, equivalentemente,

$$T_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(A_n \cosh(\omega_n t) + B_n \operatorname{senh}(\omega_n t)\right)$$

y por tanto su solución general será de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t} \left(A_n \cosh(\omega_n t) + B_n \operatorname{senh}(\omega_n t)\right) \operatorname{sen} nx, \quad \omega_n = \sqrt{4a^2n^2 - 3}. \tag{1.17}$$

Nuevamente para encontrar los coeficientes indeterminados A_n y B_n usamos las condiciones iniciales que en este caso nos dan

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} nx,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}A_n + B_n\omega_n\right) \operatorname{sen} nx,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx, \quad B_n = \frac{A_n}{2\omega_n} = \frac{A_n}{\pi\omega_n} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx. \tag{1.18}$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que $f(x) = \alpha x(\pi - x)$, entonces como ya hemos visto

$$A_{2n-1} = \frac{8\alpha}{\pi(2n-1)^3}, \quad A_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

por tanto

$$B_{2n-1} = \frac{8\alpha}{\pi(2n-1)^3\sqrt{4a^2(2n-1)^2-3}}, \quad B_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

luego la solución es

$$u(x,t) = 8\alpha \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t} \left(\frac{\cosh(\omega_n t)}{\pi(2n-1)^3} + \frac{\operatorname{senh}(\omega_n t)}{\pi(2n-1)^3\omega_n} \right) \operatorname{sen}(2n-1)x,$$

con $\omega_n = \sqrt{4a^2n^2-3}$.

Como ejercicio encontrar la solución si $f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \alpha(\pi - x), & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$

Una colección más exhaustiva de problemas se puede encontrar en los libros:

1. Nagle R.K. y Saff E.B. *Fundamentos de ecuaciones diferenciales.* Pearson Educación.

2. Budak B.M., Samarski A.A., Tijonov A.N, *Problemas de la física matemática.* En 2 tomos

2. La transformada de Fourier

2.1. Definición

Sea f una función cualquiera, no necesariamente periódica.

Si nos restringimos al intervalo $[-l, l] \subset \mathbb{R}$ podemos suponer que la función es periódica de periodo $2l$ y entonces, si f es lo suficientemente buena,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(\omega_k, l) e^{i\omega_k x}, \qquad \omega_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde

$$c(\omega_k, l) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\omega_k x} dx.$$

Definamos la siguiente función, en caso que exista[3]

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Nótese que

$$\lim_{l\to\infty} \frac{l}{\pi} c(\omega_k, l) = c(\omega_k).$$

Usando lo anterior es fácil ver que

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(\omega_k, l) e^{i\omega_k x} \frac{\pi}{l} = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

por tanto, si f es suficientemente buena tenemos que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \qquad c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx,$$

o, equivalentemente,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \right) e^{-i\omega x} d\omega.$$

Lo anterior es, por tanto, un análogo de la serie de Fourier válido para funciones definidas sobre todo $\mathbb{R}$.

[3] Basta que f sea absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, i.e., $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Definición 2.1 *Dada una función integrable $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, definiremos su transformada de Fourier que denotaremos por $\widehat{f}$ o $\mathcal{F}[f]$ a la función*

$$\widehat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \tag{2.1}$$

Por comodidad definiremos también la transformación

$$\overline{\mathcal{F}}[f](\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx. \tag{2.2}$$

ante, bajo ciertas condiciones sobre f, $2\pi\overline{\mathcal{F}}[f]$ es la inversa de $\mathcal{F}[f]$, i.e.,

$$f(x) = 2\pi\overline{\mathcal{F}}[\widehat{f}](x), \qquad \mathcal{F}[f]^{-1} = 2\pi\overline{\mathcal{F}}[\widehat{f}].$$

Definición 2.2 *A la función $F(\lambda) = |\widehat{f}(\lambda)|$, se le denomina espectro de la función f.*

Como ejercicio encuentra las transformadas de Fourier de las siguientes funciones.

1. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $a > 0$.

2. $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

3. $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = e^{-x^2/2}$

4. Prueba que para $h_a(\lambda)$

$$h_a(\lambda) = Ce^{-a^2x^2}, \quad \widehat{h_a}(\lambda) = \mathcal{F}[h_a](\lambda) = \frac{C}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2/(4a^2)}. \tag{2.3}$$

5. $u_l : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $u_l(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq l, \\ 0, & |x| > l \end{cases}$.

6. $w : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $w(x) = \begin{cases} e^{-ax} \operatorname{sen} bt, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $a > 0$.

7. $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $y(x) = \begin{cases} e^{-ax} \cos bt, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $a > 0$.

2.2. Algunos resultados de convergencia para la transformada de Fourier

Lema 2.3 *Sea* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, *i.e.,* $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < +\infty$. *Entonces*

1. *Existe la trasformada* $\widehat{f}(\lambda)$ $(\mathcal{F}[f](\lambda))$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)| \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx.$
3. *La función* $\widehat{f}(\lambda)$ *es continua en* $\mathbb{R}$.
4. $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \widehat{f}(\lambda) = 0.$

Lema 2.4 *Sea* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, *continua y casi continuamente derivable en* $\mathbb{R}$.

1. *Si* $f'(x)$ *es absolutamente integrable en* $\mathbb{R}$, *entonces existe el* $\lim_{|x|\to\infty} f(x)$.
2. *Si ambas funciones* $f'(x)$ *y* $f(x)$ *son absolutamente integrables en* $\mathbb{R}$, *entonces* $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Teorema 2.5 *Convergencia puntual de la integral de Fourier*
Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ *continua y casi-continuamente derivable en* $\mathbb{R}$. *Entonces la integral de Fourier converge a* f*:*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\mathcal{F}}[\widehat{f}](x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\mathcal{F}}[\cdot] = \mathcal{F}[\cdot]^{-1}.$$

2.2.1. Propiedades de la Transformada de Fourier

En adelante definiremos el operador de traslación τ_h

$$\tau_h f(x) = f(x+h), \qquad h \in \mathbb{C}. \tag{2.4}$$

Proposición 2.6 1. *La transformada de Fourier es lineal: para todas* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\lambda) = \alpha\mathcal{F}[f](\lambda) + \beta\mathcal{F}[g](\lambda) + \alpha\widehat{f}(\lambda) + \beta\widehat{g}(\lambda).$$

2. $\widehat{\tau_h f}(\lambda) = \mathcal{F}[\tau_h f](\lambda) = \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda h}$

3. $\widehat{fe^{ixh}}(\lambda) = \tau_{-h}\widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda - h)$.

4. $\mathcal{F}[\alpha^{-1}f(x/\alpha)](\lambda) = \mathcal{F}[f](\alpha\lambda) = \widehat{f}(\alpha\lambda)$.

Proposición 2.7 *Sea $f \in C^{(k)}(\mathbb{R})$ tal que $f, f', \dots, f^{(k)}$ son absolutamente integrables. Entonces*

1. $\mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) = (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda)$, $n = 0, 1, \dots, k$.

2. $\mathcal{F}[f](\lambda) = \widehat{f}(\lambda) = o\left(\dfrac{1}{\lambda^k}\right)$.

Proposición 2.8 *Supongamos que f y $x^k f(x)$ son absolutamente integrables en $\mathbb{R}$. Entonces*

1. $\mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) = \widehat{f^{(k)}}(\lambda) \in C^k(\mathbb{C})$.

2. $\widehat{f}^{(n)}(\lambda) = \dfrac{d^n \mathcal{F}[f]}{d\lambda^k}(\lambda) = (-i)^k\, \widehat{x^n f}(\lambda) = (-i)^k \mathcal{F}[x^n f](\lambda)$, $\forall n = 0, 1, \dots k$.

Además, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g(x)dx, \tag{2.5}$$

de donde se deduce la propiedad

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}dx \quad \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 dx. \tag{2.6}$$

Definición 2.9 *Dada dos funciones f y g absolutamente integrables se define la convolución $(f * g)(x)$ mediante la expresión*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(z)g(x - z)dz = \int_{\mathbb{R}} f(x - z)g(z)dz.$$

Se puede probar que entonces $\mathcal{F}[f * g](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda)\mathcal{F}[g](\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)$ y que s$\mathcal{F}[f\, g](\lambda) = (\widehat{f} * \widehat{g})(\lambda)$.

Como aplicación de la transformada de Fourier resuelve las EDPs

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$