Proyecto I: Más sobre números reales

Objetivos: Profundizar el estudio de los números reales.

1. Problemas de inducción.

Ejercicio 1.1

Sea $k \leq n$. Definiremos los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ mediante la expresión

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \qquad k! = 1 \cdot 2 \cdots k, \quad 0! = 1. \tag{1}$$

1. Probar (sin usar inducción) que
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

2. Usando la inducción probar que $\binom{n}{k}$ son números naturales cualquiera sea $0 \leq k \leq n$.

3. Probar usando inducción la fórmula del binomio de Newton
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \cdots + y^n.$$

4. Usando lo anterior, probar

   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ y $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

   b) $\displaystyle\sum_{k \text{ par}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$ y $\displaystyle\sum_{k \text{ impar}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$

5. Probar que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}$$
Use la identidad $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$

2. Problemas sobre números reales.

Ejercicio 2.1

1. Sea A y B dos conjuntos acotados superiormente (inferiormente). Sea $C = A + B$ el conjunto $B = \{a + b\,; a \in A, b \in B\}$. Prueba que $\sup(A + B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$.

2. Sea A y B dos conjuntos númericos de elementos positivos acotados superiormente y sea $C = A \cdot B$ el conjunto $B = \{a \cdot b\,; a \in A, b \in B\}$. Prueba que $\sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$. ¿Es cierto para cuales quiera sean los conjuntos númericos acotados superiormente?

3. Usando lo anterior demuestra que si $A^n = \{a^n\,;\, a \in A\}$, entonces $\sup A^n = (\sup A)^n$.

4. Demuestra el siguiente resultado conicido como Lema de Cantor: Sea $\{I_k\}$ una sucesión de intervalos cerrados tales que $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset I_n = [a_n, b_n]$, para todo n natural. Entonces existe al menos un punto $\xi \in \mathbb{R}$ que pertenece a todos los intervalos. Si además, para todo $\epsilon > 0$, en la sucesión de intervalos encajados existe al menos un intervalo cuya longitud $|I_k| = b_k - a_k$ es menor que ϵ, entonces el punto ξ es único.

5. Sabemos, por el Lema de Cantor, que si $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es equivalente a decir que x pertence a la intersección de todos los I_n. ¿Es cierto el lema de Cantor si en vez de trabajar con intervalos cerrados $I_n = [a_n, b_n]$ lo hacemos con abiertos $I_n = (a_n, b_n)$? Justifica tu respuesta.

6. Para definir el conjunto de los numéros reales $\mathbb{R}$ es necesario, ademas de los axiomas de cuerpo y orden un axioma de *completitud*. Una elección para ese tercer axioma es el axioma de las cortaduras de Dedekind, que enunciaremos de forma más sencilla como sigue: Axioma de completitud o continuidad de $\mathbb{R}$. Dados dos subconjuntos A y B de $\mathbb{R}$ no nulos tales que cualquiera sean $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que $a \leq b$, entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$ y $b \in B$, $a \leq c \leq b$. Demuestra que el axioma de completitud es equivalente al "axioma" del supremo y que éste, a su vez, es equivalente al lema de Cantor de intervalos encajados.

3. Un teorema "topológico" de $\mathbb{R}$.

Definición 3.1 *Se dice que el sistema $S = \{X_i\}$ de conjuntos X recubre al conjunto Y o que S es un recubrimiento de Y, si $Y \subset \bigcup_{X_i \in S}$, o sea, si cualquier elemento de Y se encuentra al menos en un X_i.*

Es importante destacar que un recubrimento puede ser finito o infinito. Por ejemplo, para recubrir el intervalo $Y = (0,1)$ podemos escoger un sistema finito: $(0,1/3) \cup (1/3,1/2) \cup (1/2,1)$ o infinito $(1/2,1) \cup (1/3,1/2) \cup \cdots \cup (1/(n+1),1/n) \cup \cdots$.

Ejercicio 3.1 *Probar el lema de Borel-Lebesge*

> En cualquier sistema de intervalos que recubren al intervalo cerrado y acotado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, existe un subsistema finito que recubre a $[a,b]$.

usando el teorema de los intervalos encajados de Cantor.

Para su demostración hacer un razonamiento por reducción al absurdo. Por ejemplo, tomemos $I_1 = [a,b]$ y supongamos que el lema es falso es decir que existe cierto recubrimiento S de I_1 el cual no contiene ningun recubrimento finito de $I_1 = [a,b]$. Entonces, dividiendo I_1 en dos segmentos iguales al menos uno de los dos, que llamaremos I_2, no admite ningún recubrimiento finito. ¿Qué ocurre si seguimos este razonamiento? Prueba que de esta construcción se obtiene una contradicción.

Ejercicio 3.2 *Usando el lema Borel-Lesbege prueba el lema de Bolzano-Weiersstras (*Cualquier subconjunto infinito acotado de $\mathbb{R}$ tiene por lo menos un punto de acumulación.*)*

El lema de Bolzano-Weiersstras también implica el lema Borel-Lesbege, es decir ambos son equivalentes.

Proyecto II: Sobre conjuntos infinitos.

Objetivos: Estudiar algunos conjuntos infinitos. La hipótesis del continuo

1. Conjuntos numerables

Sean dos conjuntos A y B cualesquiera. Por ejemplo, digamos que A es el conjunto de los números primos menores que un número dado (digamos 10), B el de los vértices de un duodecaedro (12 lados). A y B son finitos, es decir están constituidos por un número finito de elementos. Luego, una forma natural para compararlos puede ser sencillamente usando el número de sus elementos. Obviamente A tiene seis elementos, 1,2,3,5,7 y B doce, así que B será más grande que A. Sea ahora C el conjunto de los lados de un hexágono. Entonces C y A tienen el mismo número de elementos de forma que podemos hacer corresponder a cada uno de los elementos de C el correspondiente elemento de A y viceversa. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de A y C. Obviamente tal correspondencia es imposible de encontrar entre los elementos de A y B o B y C (¿por qué?).

¿Qué ocurre si ahora A Y B tienen infinitos elementos, es decir son conjuntos infinitos? Ejemplo de tales conjuntos son conocidos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.

En este caso el primer método de comparar conjuntos no nos sirve pues no podemos "contar" los elementos ya que éstos son infinitos así que sólo nos queda el segundo de ellos: intentar encontrar una correspondencia biunívoca entre conjuntos.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$. $\mathbb{N}$ es el conjunto infinito más simple. Dado cualquier otro conjunto A que se pueda poner en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$ se denomina conjunto *numerable*.

Por ejemplo, P, el conjunto de todos los números pares es numerable. En efecto, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ existe un único $p \in P$ tal que $p = 2n$ y viceversa, cualquiera sea $p \in P$, existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = p/2$, es decir existe una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos, o lo que es lo mismo *hay tantos números pares como naturales.*

Existe una forma muy sencilla de probar lo anterior. Escribamos todos los números naturales en una tabla

1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	$2n+2$	$\cdots$

y eliminemos todos los impares y "contamos" los números resultantes. Así tenemos

$\cancel{1}$	2	$\cancel{3}$	4	$\cancel{5}$	6	$\cdots$	$2\cancel{n}-1$	$2n$	$2\cancel{n}+1$	$2n+2$	$\cdots$
	1		2		3	$\cdots$		n		$n+1$	$\cdots$

es decir, P es numerable, los números pares se pueden "contar", existe una correspondencia biyectiva entre los números pares y los naturales.

Ejercicio 1.1 *Probar que el conjunto de los números impares I en numerable y encontrar una aplicación biyectiva entre I y $\mathbb{N}$.*

Ejercicio 1.2 *Probar que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ en numerable y encontrar una aplicación biyectiva entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$. (piense en como escribir consecutivamente todos los números enteros y haga el correspondiente esquema)*

Veamos un ejemplo más complicado. Sea A el conjunto de puntos del plano de la forma (n, m), $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces A es numerable.

$$
\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[d] & & & \\
(1,2) \arrow[r] & (2,1) \arrow[dl] & & \\
(1,3) \arrow[r] & (2,2) \arrow[r] & (3,1) \arrow[dll] & \\
(1,4) \arrow[r] & (2,3) \arrow[r] & (3,2) \arrow[r] & (4,1) \\
 & \vdots & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 1: Contando el conjunto $A = \{(n,m), ; n, m \in \mathbb{N}\}$.

Para comprobarlo vamos a "contar" todos los pares anteriores, es decir vamos a construir una función biyectiva que a cada par le haga corresponder un único valor de $n \in \mathbb{N}$. Lo haremos siguiendo el siguiente esquema: ordenamos los pares por filas según la suma $n + m = 2, 3, 4, \ldots$ y cada fila la ordenamos de menor a mayor según el primer valor n y así tenemos una correspondencia biúnivoca tal y como se ve en la figura 1

Ejercicio 1.3 *Prueba que el conjunto $B = \{(p,q)\,;\, p, q \in \mathbb{Z}\}$ es numerable, es decir que se puede construir una "ordenación" de B similar a la del ejemplo anterior.*

Ejercicio 1.4 *Sea un número r racional cualquiera, $r \in \mathbb{Q}$. Entonces r se puede escribir como $r = p/q$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Así que a cada número racional le podemos hacer corresponder el par (p,q) con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Prueba que entonces $\mathbb{Q}$ es numerable, es decir que se puede constuir una "ordenación" de $\mathbb{Q}$ similar a la del ejemplo anterior.*

2. Propiedades de los conjuntos numerables

Veamos algunas propiedades de los conjuntos numerables.

Ejercicio 2.1 *Prueba que si A es un conjunto numerable y B es un subconjunto infinito de A, entonces B es numerable.*

Ejercicio 2.2 *Prueba que:*

1. *la unión de un conjunto numerable y uno finito es numerable,*
2. *la unión de dos conjuntos numerables es numerable, y por tanto la unión de un número finito de conjuntos numerables es numerable*
3. *la unión de un número numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Para probar el último apartado escribe cada uno de los conjuntos numerables de la forma $A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots a_{1,n}, \ldots\}$, $A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots a_{2,n}, \ldots\}$,..., $A_m = \{a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots a_{m,n}, \ldots\}$, y escríbelos como una tabla. A continuación razona como han de contarse los elementos del conjunto $\cup_k A_k$. Nota que los casos anteriores son casos particulares de éste (¿por qué?)

Veamos como usando los apartados anteriores podemos probar los ejercicios que antes hemos resuelto.

Sea $\mathbb{N}^-$ el conjunto de los números enteros negativos y sea $\mathbb{Z}_k$, $k \in \mathbb{N}$, los conjuntos de los números de la forma n/k, con $n \in \mathbb{Z}$, es decir $\mathbb{Z}_k = \{n/k\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$. Obviamente $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-$, pero tanto

$\mathbb{N}$ como $\mathbb{N}^-$ son numerables, así que $\mathbb{Z}$ es numerable. Además, por construcción $\mathbb{Z}_k$ es numerable. Además, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{Z}_k \cup \cdots$, o sea $\mathbb{Q}$ es la unión de una cantidad numerable de conjuntos numerables así que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Definamos ahora el conjunto "producto directo" de dos conjuntos. Sea A y B dos conjuntos cuales quiera. Definiremos el "producto directo" de A y B que denotaremos por $A \otimes B$ al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

Ejercicio 2.3 *Prueba que si A y B son numerables el conjunto $A \otimes B$ es numerable.*

Para probarlo piensa en la analogía con el ejercicio 1.3.

Como consecuencia del ejercicio anterior tenemos otra prueba de que $\mathbb{Q}$ es numerable pues, como hemos visto, a cada número racional le podemos hacer corresponder el par (p, q) con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, p, q primos entre si, o sea, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{N}$.

Sea ahora $\mathbb{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado a lo más n con coeficientes $a_0, \ldots a_n$ racionales:

$$\mathbb{P}_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\,;\, a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Q}\}$$

Ejercicio 2.4 *Prueba que $\mathbb{P}_n$ es numerable.*

Sea ahora

$$\mathbb{P} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\,;\, a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Q},\ \forall n \in \mathbb{N}\},$$

es decir el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales, o sea, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 \cup \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2 \cup \cdots$.

Ejercicio 2.5 *Prueba que $\mathbb{P}$ es numerable.*

Para probarlo usa induccoón sobre n así como que $\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}_n \cup \{a_{n+1}x^{n+1}\,;\, a_{n+1} \in \mathbb{Q}\}$.

Definición 2.1 *Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que x es solución de la ecuación algebraica*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0, \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Q}.$$

Entonces se dice que x es un número algebraico. Si x no es solución de ninguna ecuación algebraica, entonces se dice trascendente.

Por ejemplo, 2 es un número algebraico ($x - 2 = 0$), $\sqrt{2}$ es un irracional algebraico pues es solución de $x^2 - 2 = 0$. Se puede probar que e u π son trascendentes.

Nótese que, a diferencia de los números irracionales, ningún número racional puede ser trascendente (¿por qué?). Sea $\mathbb{A}$ el conjunto de todos los números algebraicos y $\mathbb{T}$ el de los trascendentes.

Ejercicio 2.6 *Usando el ejercicio 2.5 prueba que $\mathbb{A}$ es numerable. (¿cuántas raíces puede tener una ecuación algebraica?)*

3. La no numerabilidad de $\mathbb{R}$

Definición 3.1 *Dos conjuntos A y B se denominan equivalentes y se denota por $A \sim B$ si existe una correspodencia biunívoca entre sus elementos. En este caso el "número" de sus elementos es el mismo lo que se suele denotar por* $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$[1].

[1] En realidad el concepto de cardinal o potencia de un conjunto es ligeramente más complicado que el número de sus elementos, pero para nuestros objetivos esta definición es suficiente.

En fácil comprobar entonces que si $A \sim B$ entonces $B \sim A$ (¿por qué?) y que si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$.

Por ejemplo, según hemos visto antes $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{P}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{A}$, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{A}$, etc.

Es evidente que el conjunto de los números racionales que pertencen al conjunto $[0,1]$ es numerable pues son un subconjunto de $\mathbb{Q}$. La pregunta es ¿será también numerable el conjunto de los irracioanles contenidos en $[0,1]$?, o, equivalentemente, ¿será numerable $[0,1]$?

Vamos a intentar responder a esta pregunta.

Supongamos que $[0,1] \sim \mathbb{N}$. Entonces ha de existir una sucesión de números reales $(x_n)_n$ tal que cualquiera sea $x \in [0,1]$, x coincidirá con al menos un miembro de la sucesión $(x_n)_n$ (en caso contrario $[0,1]$ no sería numerable, ¿por qué?).

Hagamos la siguiente construcción: sea $I_0 = [0,1]$. Escojamos un intervalo cerrado $I_1 \subset I_0$ que no contenga a x_1, o sea, $x_1 \notin I_1$. A continuación escojamos un intervalo cerrado $I_2 \subset I_1$ que no contenga a x_2, o sea, $x_2 \notin I_2$, y así sucesivamente. Entonces tenemos una sucesión de intervalos (cerrados) encajados tal que $I_{n+1} \subset I_n$ pero $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Entonces, existe al menos un $x \in I_n$ para todo $n \geq 0$. ¿Puede ser eso posible? Justifica tu respuesta.

De lo anterior es fácil deducir el Teorema de Cantor

Teorema 3.1 $\mathbb{R}$ *no es numerable. (*$\operatorname{card}\mathbb{R} > \operatorname{card}\mathbb{N}$*)*

Como corolario tenemos

Corolario 3.1 *1. $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$, es decir, existe $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, el el conjunto de los números irracionales, y además $\mathbb{I}$ no es numerable.*

2. $\mathbb{A} \neq \mathbb{I}$, existe el conjunto de los números tracendentes $\mathbb{T}$, y $\mathbb{T}$ no es numerable.

Ejercicio 3.1 *Prueba el Teorema de Cantor y su corolario.*

Resulta que la mayoría de los números irracionales que conocemos son algebraicos, por ejemplo $\sqrt[n]{k}$ si $k \neq l^n$, $l \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ (prueba que este número es irracioanl algebraico), etc. Por el contrario se conocen pocos números trascendentes: π, e. No obstante resulta que éstos son la mayoría de todos los números ya que los números algebraicos (que incluyen, como hemos visto a los racionales) es un conjunto numerable, pero $\mathbb{R}$ no lo es y obviamente $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$.

4. La hipótesis del continuo

Automáticamente surge la pregunta. ¿Existirá algún conjunto infinito intermedio entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$?, es decir, que tenga "más" elementos que $\mathbb{N}$ pero "menos" que $\mathbb{R}$?

Georg Cantor fué quien desarrolló la teoría moderna de conjuntos infinitos, a él debemos la notación y algunos de los resultados que hemos descrito aquí. Precisamente fue Cantor quien conjeturó que no existía dicho conjunto intermedio (hipótesis del continuo). Este fué el primero de los 23 famosos problemas que formuló Hilbert en 1900. La respuesta a este problema fue totalmente inesperada. Por un lado Kurt Gödel probó en 1940 que usando los axiomas de la teoría de conjuntos era imposible desmentir la hipótesis de Cantor. La respuesta definitiva la dió Paul Cohen en 1963 cuando demostró que bajo el mismo sistema de axiomas de la teoría de conjuntos era imposible probar la conjetura, o sea, la hipótesis del continuo se puede aceptar o no y eso no lleva a ninguna contradicción lógica dentro de la teoría de conjuntos.