Proyecto III: Los Teoremas de Rolle y del valor Medio

Objetivos: Profundizar el estudio de algunos teoremas del cálculo diferencial.

1. El Teorema de Rolle Generalizado.

La formulación más común del Teorema de Rolle es la siguiente:

Teorema 1.1 *(Teorema de Rolle) Sea la función $f(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, continua en todo el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe al menos un ξ en el interior de del intervalo $[a, b]$, $\xi \in (a, b)$, tal que $f'(\xi) = 0$.*

Vamos a profundizar en el estudio de este teorema.

Ejercicio 1.1 *Muestra, mediante varios ejemplos que las condiciones del teorema no son necesarias.*

Nuestro objetivo será probar un teorema más general que el anterior. En efecto, se trata de probar el siguiente Teorema de Rolle generalizado:

Teorema 1.2 *(Teorema de Rolle generalizado) Sea la función $f(x) : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, derivable en el intervalo abierto (a, b) tal que los límites laterales $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a+) = f(b-) = \lim_{x\to b-} f(x)$ coinciden (ambos límites pueden ser finitos o infinitos). Entonces, existe al menos un $\xi \in (a, b)$, tal que $f'(\xi) = 0$.*

Ejercicio 1.2 *Prueba el teorema anterior.*

Una forma de probar el teorema generalizado consiste en intentar "adaptar" la demostración del teorema clásico. Para ello hay que considerar distintos casos:

1. Que (a, b) sea un intervalo acotado y que $f(a+)$ y $f(b-)$ también sean acotados.
2. Que (a, b) sea un intervalo acotado y que $f(a+)$ y $f(b-)$ sean no acotados.
3. Que (a, b) sea un intervalo no acotado (por ejemplo superiormente) y que $f(a+)$ y $f(b-)$ sean acotados.
4. Que (a, b) sea un intervalo no acotado (por ejemplo superiormente) y que $f(a+)$ y $f(b-)$ sean no acotados

En caso uno de los supuestos anteriores prueba que el Teorema de Rolle generalizado es cierto.

Ejercicio 1.3 *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua y con $n-1$ derivadas continuas en $[a, b]$, y con derivada de orden n en (a, b). Supongamos que f se anula en los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.*

1. *Probar que entre cada cero de f hay al menos un cero de f'.*
2. *¿Qué se puede decir acerca de los ceros de $f^{(k)}$ y $f^{(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$?*
3. *Demuestra que $f^{(n)}$ se anula al menos una vez en (a, b).*

Ejercicio 1.4 *Prueba el siguiente teorema sobre los ceros de un polinomio:*

Teorema 1.3 *Sea $P_n(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$, con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Entonces, si todos los ceros de P_n son reales y están en el interior de (a, b), los ceros de las sucesivas derivadas sólo pueden ser reales y además están en el interior de (a, b).*

Para probarlo hay que diferenciar dos casos. Cuando todos los ceros de P_n son simples y cuando son múltiples. Recordemos que P_n tiene un cero α múltiple con multiplicidad $k \leq n$, si P_n se puede expresar por $P_n(x) = (x-\alpha)^k Q_{n-k}(x)$, siendo Q_{n-k} un polinomio de grado $n-k$.

Ejercicio 1.5 *Usando el teorema anterior prueba que*

1. *los polinomios de Legendre, definidos por*

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n],$$

   tienen n ceros en el interior del intervalo $[-1,1]$,

2. *los polinomios de Laguerre, definidos por*

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}],$$

   tiene sus n ceros reales y positivos.

En ambos casos demuestra que P_n y L_n son polinomios de grado exactamente n. Para resolver el segudo apartado, a diferencia del primero, no basta usar el teorema del ejercicio anterior. En este caso, aplica a la función $\phi(x) = x^n e^{-x}$ el teorema de Rolle generalizado para probar que ϕ' tiene al menos un cero $c_1 > 0$. A continuación prueba que ϕ'' se anula al menos dos veces, y así sucesivamente.

Ejercicio 1.6 *Prueba que polinomios de Hermite, definidos por*

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}],$$

tienen n ceros reales y además que si α es un cero de H_n, $-\alpha$ también lo es.

2. Sobre el Teorema del valor medio

El Teorema del valor medio de Lagrange afirma que

Teorema 2.1 *(Teorema del valor medio de Lagrange) Sea la función $f(x) : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, continua en todo el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b). Entonces, existe un ξ en el interior de del intervalo $[a,b]$, $\xi \in (a,b)$, tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ejercicio 2.1 *¿Será cierto el recíproco? Es decir, si f es derivable en (a,b) entonces para todo $\xi \in (a,b)$ existirán dos puntos x_1 y x_2 en (a,b) tales que si $x_< \xi < x_2$, entonces*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi).$$

Para responder a la pregunta intenta construir una función estrictamente creciente de forma que $f'(x)$ se anule en algún punto interior de (a,b) y decidir si para esa función se cumple lo anterior.

Ejercicio 2.2 *Probar que si f es derivable en (a,b) pero no acotada en (a,b), entonces f' también es no acotada en (a,b).*

Para resolver el ejercicio considera una función no acotada en $x=a$ (o $x=b$) y aplica el Teorema de Lagrange. ¿Se puede escoger x en el interior de (a,b)? Justifica la respuesta.

Ejercicio 2.3 *Prueba que la condición de no acotación del ejercicio anterior es necesaria pero no suficiente. Es decir, construye una funciónn acotada en (a,b) pero cuya derivada sea no acotada en (a,b). ¿Se pueden escoger los intervalos cerrados? Justifica la respuesta.*

Ejercicio 2.4 *Probar que si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y f' es acotada, entonces o f es lineal ($f(x) = mx + n$) o entonces existe un $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(c),$$

y da una interpretación geométrica del resultado.

Para resolverlo mira que ocurre si f es lineal. Suponiendo que f no sea la función lineal, descompón $[a,b]$ en n intervalos arbitrarios

$$[a,b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, b], \qquad a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b.$$

En cada segmento aplica el teorema de Lagrange y razona, usando la arbitrariedad de los x_i, $i = 1, 2, \ldots n-1$ y la acotación de f', que es cierta la propiedad. ¿Dónde se usa la no linealidad de f?

Proyecto IV: Interpolación de funciones.

Objetivos: Estudiar la interpolación de funciones y aplicarlas en diversos ejercicios.

1. Interpolación Polinómica.

Dado un intervalo (a, b), sean x_i, $i = 1, 2, .., n, n+1$ unos valores prefijados del mismo, que denominaremos nodos de interpolación, y a los cuales le corresponden ciertos valores y_i. Llamaremos **polinomio de interpolación** al polinomio $P_{int}(x)$ que coincida en los puntos x_i con los valores y_i, osea $P_{int}(x)$ es tal que:

$$P_{int}(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, .., n+1, \tag{1}$$

Ejercicio 1.1 *Demostrar que dada la secuencia de puntos* $S = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n+1}$ *el polinomio de interpolación es único. Para ello buscar el polinomio de interpolación de la forma* $P_{int}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, *y demostrar que los coeficientes* c_k, $k = 0, 1, ..., n$ *son únicos.*

Ejercicio 1.2 *Utilizando la definición (1) calculemos el polinomio de interpolación que pase por los puntos* $S = \{(-\frac{1}{2}, -1), (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, (0, 0), (\frac{1}{6}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)\}$.

En la práctica este método no se utiliza puesto que existen otras formas más eficaces de calcular el polinomio de interpolación.

2. Interpolación de Lagrange.

El polinomio de interpolación $P_{int}(x)$ más conocido es el de Lagrange que resuelve el problema de interpolación de Lagrange: Dado un intervalo (a, b), sean x_i, $i = 1, 2, .., n+1$ unos valores prefijados del mismo y a los cuales le corresponden ciertos valores y_i. Llamaremos **polinomio de interpolación de Lagrange** al polinomio $L_m(x)$, de orden a lo más $m = n$, que coincida en los puntos x_i con los valores y_i, osea $L_m(x)$ es tal que:

$$L_m(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, .., n+1. \tag{2}$$

Se puede comprobar que el polinomio de interpolación de Lagrange tiene la forma:

$$P_{int}(x) \equiv L_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k l_k(x), \text{ donde } l_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}. \tag{3}$$

Ejercicio 2.1 *Demostrar que el polinomio de Lagrange* L_n *(3) cumple con las condiciones (2) y por tanto es realmente una de las soluciones del problema planteado. Además por la unicidad del problema de interpolación polinómica toda solución coincide con él. (Primero demostrar que* $l_k(x_i) = \delta_{ki}$*), donde* $\delta_{ki} = 1$ *si* $i = k$ *o* $\delta_{ki} = 0$, *si* $i \neq k$.*)*

Ejercicio 2.2 *Utilizando el polinomio de Lagrange calcular el polinomio de interpolación de la función* $f(x) = \sin \pi x$ *tomando como nodos de interpolación los valores* x_i *iguales a* $x = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\}$, *respectivamente. Compararlo con el resultado del ejercicio 1.2.*

3. Interpolación de Hermite.

Dado un intervalo (a,b), sean x_i, $i = 1,2,..,n$ unos valores prefijados del mismo y a cada uno de los cuales le corresponden ciertos valores y_i, y_i',..., $y_i^{(k)}$. Llamaremos **polinomio de interpolación de Hermite de orden k** al polinomio $H_m(x)$, de orden a lo más $m = (k+1)n-1$, que coincida en los puntos x_i con los valores y_i y el de sus respectivas derivadas hasta orden $k-1$ $H_m^{(k)}(x)$, con los valores y_i',..., $y_i^{(k-1)}$, o sea,

$$H_m(x_i) = y_i, \quad H_m'(x_i) = y_i', \quad \cdots, \quad H_m^{(k-1)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad i = 1,2,..,n \tag{4}$$

Es evidente que el polinomio de interpolación de Hermite de orden $k = 0$ coincide con el polinomio de interpolación de Lagrange.

Ejercicio 3.1 *Demostrar que el polinomio de interpolación de Hermite de orden n $H_m(x)$ de una función $n-$ veces derivable en el punto $x = a$ tomando como nodos de interpolación. un único nodo $x = a$ coincide con el polinomio de Taylor $P_n(x,a)$ de dicha función. (Ayuda: Calcule los valores de $P_n(a,a)$.) Una consecuencia de este resultado es que los polinomios de Taylor para funciones son un caso particular del polinomio de Hermite.*

Ejercicio 3.2 *Calcule el polinomio de interpolación de Hermite de orden $k = 4$ de la función $f(x) = e^x \sin x$ en el nodo $x = 0$ ($n = 1$). Para ello busque el polinomio de Hermite de orden $m = (k+1)n-1 = 4$ de la forma $H_4(x) = a_4x^4 + \cdots + a_1x + a_0$. Compare el resultado obtenido con el polinomio de Taylor de orden 4 de dicha función.*

4. Un ejemplo de aproximación racional: la aproximación Padé.

La aproximación Padé es el análogo racional del polinomio de Taylor. Supongamos que tenemos una función $f(x)$ definida en el intervalo $(-b,b)$ por la *serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{5}$$

Si truncamos esta serie obtendremos el polinomio:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{6}$$

conocido como polinomio de Taylor en $x = 0$) (polinomio de McLaurin) de f y que satisface la propiedad

$$P_n(0) = f(0), \quad P_n'(0) = f'(0), \quad ..., \quad P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0). \tag{7}$$

La descripción de la aproximación de Taylor se basa en la suposición de que f cumple ciertas propiedades: es $(n+1)-$veces derivable en $x = 0$.

Definamos el siguiente problema de aproximación: encontrar un polinomio P_n del mayor grado posible tal que:

$$|f(x) - P_n(x)| \le Mx^\nu \quad \forall x \in (-b-b), \tag{8}$$

y donde ν sea tan grande como se pueda. En el caso de que f tenga n derivadas continuas en $(-b,b)$ se puede tomar $\nu = n$ pues el polinomio de Taylor es tal que:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \le \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n, \quad \xi \in (-b,b).$$

El problema (8) tiene una solución única puesto que es equivalente al sistema de ecuaciones (7).

Generalizemos el problema (8) para el caso cuando intentemos aproximar la función f utilizando, en vez de un polinomio P_n, una función racional, o sea consideremos el problema de encontrar los polinomios P_n y Q_m tales que:

$$\left| f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \right| \leq M x^{n+m+1} \qquad \forall x \in (-b - b). \tag{9}$$

Este problema se le conoce como problema de aproximación Padé. Si éste problema tiene solución entonces a $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se le llama aproximate de Padé (n, m) del mismo. Se puede demostrar que aunque los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ están definidos con una exactitud de un factor multiplicativo (pues si multiplicamos a $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ por una constante diferente de zero, el aproximante (n, m) sigue siendo el mismo), que existe un único aproximante de Padé (m, n). Por esta razón se suele tomar generalmente el polinomio Q_m mónico, o sea, $Q_m = x^m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k$. Por tanto para calcular los valores del aproximante de Padé (n, m) tendremos que buscar dos polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ de grados n y m, respectivamente, tales que:

$$\left(x^m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k \right) f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = M x^{n+m+1} + \cdots \Longleftrightarrow f(x) = R(x) \equiv \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} + O(x^{n+m+1}), \tag{10}$$

donde $f(x)$ viene dada por la expansión formal (5). Ello es equivalente a decir que:

$$R(0) = f(0), \qquad \frac{d^k}{dx^k} R(x) \,|_{x=0} = \frac{d^k}{dx^k} f(x) \,|_{x=0}\,, \qquad k = 1, 2, ..., n + m.$$

Estas ecuaciones nos permiten encontrar un sistema lineal de $n + m + 1$ equaciones para encontar los coeficientes a_k y b_k de los polinomios. El aproximante de Padé cuando $n = m$ se denomina *aproximante diagonal de Padé* (n, n).

Ejercicio 4.1 *Demostrar que si f es una función $(n+m+1)-$veces derivable, entonces los coeficientes $b_0, b_1, b_2, ..., b_{m-1}$ son la solución del sistema de ecuaciones ($n > m$)*

$$\begin{aligned}
b_0 \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} + b_1 \frac{f^{(n)}(0)}{(n)!} + \cdots + b_{m-1} \frac{f^{(n-m+2)}(0)}{(n-m+2)!} &= -\frac{f^{(n-m+1)}(0)}{(n-m+1)!}, \\
b_0 \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} + b_1 \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} + \cdots + b_{m-1} \frac{f^{(n-m+3)}(0)}{(n-m+3)!} &= -\frac{f^{(n-m+2)}(0)}{(n-m+2)!}, \\
&\ \ \vdots \\
b_0 \frac{f^{(n+m)}(0)}{(n+m)!} + b_1 \frac{f^{(n+m-1)}(0)}{(n+m-1)!} + \cdots + b_{m-1} \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} &= -\frac{f^{(n)}(0)}{(n)!}.
\end{aligned}$$

Hacer la demostración sólo para el caso $n = m = 2$ y encontrar la solución del sistema de ecuaciones. (Ayuda: igualar los coeficientes de las potencias x^{n+1}, x^{n+2},..., x^{n+m} en (10).)

Ejercicio 4.2 *Demostrar que si f es una función $(n+m+1)-$veces derivable, entonces los coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ se expresan a traves de las ecuaciones*

$$a_0 = b_0 f(0), \qquad a_1 = f(0) b_1 + f'(0) b_0,$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{f^{(n-m)}(0)}{(n-m)!} + b_{m-1} \frac{f^{(n-m+1)}(0)}{(n-m+1)!} + \cdots + b_1 \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + b_0 \frac{f^{(n)}(0)}{(n)!}.$$

Hacer la demostración sólo para el caso $n = m = 2$. (Ayuda: igualar los coeficientes de las potencias x^0, x,..., x^n en (10).)

Ejercicio 4.3 *Utilizando los dos ejercicios anteriores calcular los aproximantes de Padé $(2, 2)$ de las funciones*

$$(a) \quad f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2-x}}, \quad (b) \quad g(x) = e^x.$$

Ejercicio 4.4 *Comparar la aproximación Padé con la de Taylor de una función (6). Utilizar los resultados del ejercicio anterior para la función* $g(x) = e^x$ *para el aproximante de Pade* $(2, 2)$ *y calcular el polinomio de Taylor de orden 4. Calcule el valor aproximado de ambas aproximaciones en* $x = 0{,}1, 1, 5$, *respectivamente. ¿Quién aproxima mejor a la función exponencial?. Repetir la operación para la función* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ *en los puntos* $1, 1{,}5, 1{,}9$.