Integración numérica y resolución de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias con Maxima CAS

Renato Álvarez Nodarse

Dpto. Análisis Matemático, Universidad de Sevilla.

18 de septiembre de 2015

http://euler.us.es/~renato/

Fórmulas de cuadratura.

Sea $f(x)$ una función continua definida en el intervalo $[a,b]$. Nuestro objetivo será encontrar fórmulas aproximadas para calcular la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. En caso de conocer la primitiva $F(x)$ es evidente que podemos encontrar el valor exacto de la integral utilizando el Teorema fundamental del cálculo integral: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Sin embargo no siempre esto es posible. Por ejemplo, para la función $f(x) = e^{-x^2}$ no existe ninguna primitiva que podamos escribir utilizando funciones elementales. En esta práctica vamos a aprender tres métodos para calcular aproximadamente el valor númerico de las integrales definidas.

Fórmula de los rectángulos.

Una aproximación de la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ consiste en aproximar el área bajo la curva $y = f(x)$ por un rectángulo de base $b-a$ y altura $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (ver figura 1), entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(\xi), \qquad \xi \in [a,b], \tag{1}$$

donde el error $R(\xi)$, si f tiene primera y segunda derivadas continuas en $[a,b]$, se expresa de la forma

$$R(\xi) = \frac{(b-a)^2}{24} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]. \tag{2}$$

Ahora si queremos aproximar la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ con mejor exactitud podemos dividir el intervalo $[a,b]$ en n puntos, o sea, consideremos la partición del intervalo

$$[a,b] = [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-2},x_{n-1}] \cup [x_{n-1},b],$$

donde

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad n = 0,1,2,...,n, \quad x_0 = a, x_n = b.$$

De

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b f(x)\,dx.$$

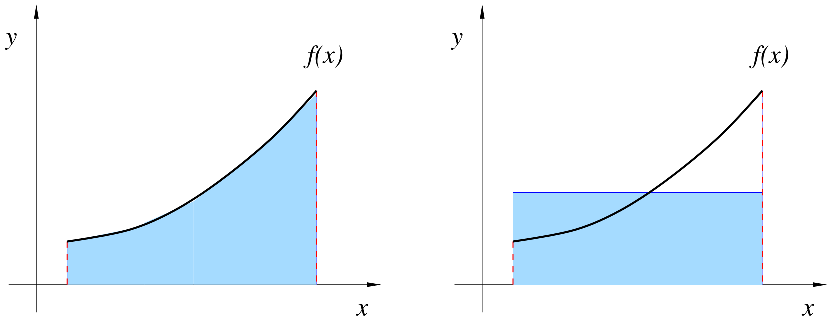


Figura 1: Aproximación de una integral por el método de los rectángulos. A la izquierda vemos el área bajo la curva que queremos calcular. A la derecha, la aproximación mediante el correspondiente rectángulo.

si aplicamos a cada integral $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$ la fórmula (1)obtenemos la ecuación

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) + R(\xi), \tag{3}$$

y

$$|R(\xi)| \le M\frac{(b-a)^2}{24n^2}, \quad M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|. \tag{4}$$

Problema 1 *Utilizando las fórmulas (1) y (2) demostrar las fórmulas (3) y (4).*

Problema 2 *Prueba la fórmula (1) y (2). Para ello usa el teorema de Taylor para aproximar $f(x)$ en el punto $\frac{a+b}{2}$ así como el teorema del valor medio integral: Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función no positiva (no negativa) e integrable en $[a,b]$ entonces existe un $\xi\in[a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{5}$$

Implementación con Maxima.

Veamos como podemos implementar lo anterior con MAXIMA CAS. Definimos el intervalo $[a,b]$, el número de puntos en que vamos a dividir en intervalo y definimos la partición que usaremos:

```
(%i1)  a:0;b:1;
x[0]:a;
Nu:20;
x[n]:=x[0]+n*(b-a)/Nu;
(%o1)  0
(%o2)  1
(%o3)  0
(%o4)  20
(%o5)  x[n]:=x[0]+(n*(b-a))/Nu

(%i6) define(f(x),x^2);
rec:sum(f((x[k]+x[k+1])/2),k,0,Nu-1)*((b-a)/Nu);
float(%);
(%o6)  f(x):=x^2
(%o7)  533/1600
(%o8)  0.333125
```

En este caso, como la función tiene primitiva podemos comparar el resultado numérico con el valor exacto

```
(%i9) exac:float(integrate(f(x),x,a,b));
float(abs(rec-exac));
(%o9)  0.33333333333333
(%o10) 2.083333333333104*10^-4
```

Fórmula de los trapecios.

Otra aproximación de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ consiste en aproximar el área bajo la curva $y = f(x)$ no por un rectángulo sino por un trapecio de base $b-a$ (ver figura 2), entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) + R(\xi), \tag{6}$$

donde el error $R(\xi)$, si f tiene primera y segunda derivadas continuas en $[a,b]$ se expresa de la forma

$$R(\xi) = -\frac{(b-a)^2}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]. \tag{7}$$

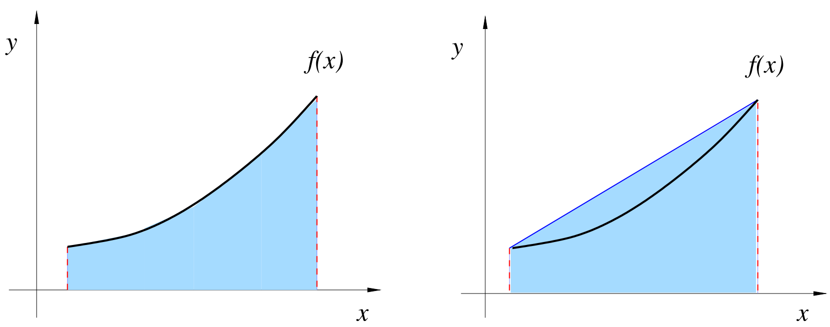


Figura 2: Aproximación de una integral por el método de los trapecios. A la izquierda vemos el área bajo la curva que queremos calcular. A la derecha, la aproximación mediante el correspondiente trapecio.

Problema 3 *Demostrar las fórmulas (6) y (7). Para ello seguir los siguientes pasos:*

1. *Demostrar que*

$$\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx = -(b-a)[f(a)+f(b)] + 2\int_a^b f(x)\,dx. \tag{8}$$

2. *Utilizando el teorema del valor medio integral (5) demostrar que*

$$\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]. \tag{9}$$

3. *Usando los dos apartados anteriores obtén las fórmulas (6) y (7).*

Ahora podemos aproximar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ con mejor exactitud dividiendo, igual que antes, el intervalo $[a,b]$ en n puntos, o sea, consideremos la partición del intervalo

$$[a,b] = [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-2},x_{n-1}] \cup [x_{n-1},b],$$

donde
$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k = 0,1,2,...,n, \quad x_0 = a, x_n = b.$$
Nuevamente,
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx,$$
y, por tanto, si aplicamos a cada integral $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$ la fórmula (1) obtenemos la expresión
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) + R(\xi), \tag{10}$$
donde
$$|R(\xi)| \leq M\frac{(b-a)^2}{12n^2}, \quad M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|. \tag{11}$$

Problema 4 *Utilizando las fórmulas (6) y (7) demostrar las fórmulas (10) y (11).*

Problema 5 *Prueba la fórmula (6) y (7).*

Implementación con Maxima.

En este caso volvemos a definir la partición:

```
(%i11)  kill(all)$
        a:0;b:1;x[0]:a;Nu:20;
        x[n]:=x[0]+n*(b-a)/Nu;
(%o1)  0
(%o2)  1
(%o3)  0
(%o4)  20
(%o5)  x[n]:=x[0]+(n*(b-a))/Nu
```

y definimos la función y la suma numérica

```
(%i6)   define(f(x),x^2);
        tra: (f(a)+f(b)+ 2*sum(f(x[k]),k,1,Nu-1))*((b-a)/(2*Nu))$
        float(%);
(%o6) f(x):=x^2
(%o8) 0.33375
```

Finalmente, comparamos el resultado numérico con el valor exacto

```
(%i9) exac:float(integrate(f(x),x,a,b));
        float(abs(tra-exac));
(%o9)  0.33333333333333
(%o10)  4.166666666666763*10^-4
```

Método de Simpson.

El método de Simpson para calcular integrales consiste en aproximar la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ de la siguiente forma
$$\int_a^b f(x)\,dx = A\,f(a) + B\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + C\,f(b) + R(\xi), \tag{12}$$
donde A, B, C son tales que $R(\xi)$ es igual a cero si $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$, respectivamente. Es decir si sustituimos en (12) la función f por cualquiera de las funciones $f(x) = 1$, $f(x) = x$ o $f(x) = x^2$, la fórmula es exacta, o sea $R(\xi) = 0$. Esto es equivalente a aproximar el área debajo de f por una parabola (ver figura 3). Este método es un caso particular del método de Newton-Cotes.

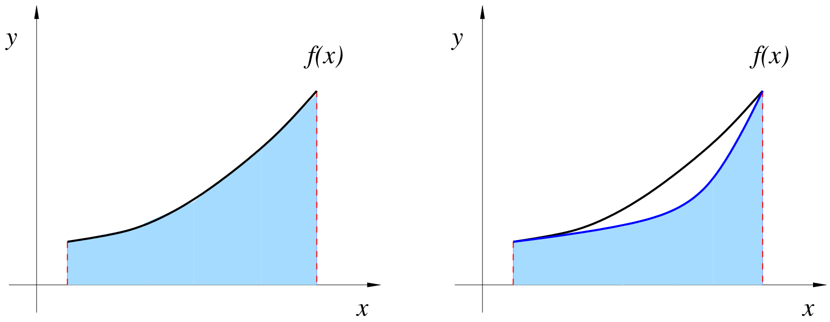


Figura 3: Aproximación de una integral por el método de Simpson. A la izquierda vemos el área bajo la curva que queremos calcular. A la derecha, la aproximación usando el método de los trapecios que equivale a encontrar el área bajo una parábola.

Problema 6 *Sustituyendo $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$ en (12) encontrar un sistema de ecuaciones para las incógnitas A, B, C y demostrar entonces que (13) se puede escribir de la forma*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{4(b-a)}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} f(b) + R(\xi). \tag{13}$$

Si f es cuatro veces derivable y todas sus derivadas son continuas en $[a,b]$ entonces se puede demostrar que $R(\xi)$ se expresa de la forma

$$R(\xi) = \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]. \tag{14}$$

Problema 7 *Demostrar la fórmula anterior. Para ello seguir los siguientes pasos.*

1. *Comprobar que la función $F(x,t)$, con $x = \frac{a+b}{2}$, definida por*

$$F(x,t) = \int_{x-t}^{x+t} f(\xi) d\xi - \frac{t}{3}\left[f(x-t) + 4f(x) + f(x+t)\right], \tag{15}$$

es continua y tres veces diferenciable para todo $t \in [0, \frac{b-a}{2}]$, y $F'''(x,t) = -\frac{t}{3}[f'''(x+t) - f'''(x-t)]$, además $F(x,0) = F'(x,0) = F''(x,0) = 0$.

2. *Probar que $F'''(x,t)$ es tal que existen dos números reales m y M (¿quiénes son dichos números?) tales que*

$$\frac{2}{3} m t^2 \leq F'''(x,t) \leq \frac{2}{3} M t^2,$$

y deducir de aquí que

$$\frac{1}{90} m t^5 \leq F(x,t) \leq \frac{1}{90} M t^5.$$

3. *Finalmente, substituyendo $t = \frac{b-a}{2}$, deducir el resultado deseado.*

Al igual que en los casos anteriores vamos aproximar la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ con mejor exactitud dividiendo el intervalo $[a,b]$ en $2n$ puntos de la forma

$$[a,b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{2n-2}, x_{2n-1}] \cup [x_{2n-1}, b],$$

donde

$$x_k = a + \frac{b-a}{2n} k, \quad k = 0, 1, 2, ..., 2n, \quad x_0 = a, x_{2n} = b.$$

Apliquemos ahora la fórmula de Simpson (13) para cada subintervalo $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, $k = 0, 1, ..., n-1$, o sea, escribamos la integral original como la suma de las integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{b} f(x)\,dx.$$

y apliquemos el método de Simpson a cada uno de los sumandos. Nótese que los intervalos siguen teniendo una longitud $x_{2k+2} - x_{2k} = \frac{b-a}{n}$ igual que antes. Esto nos conduce a la expresión

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})\right) + R(\xi), \tag{16}$$

donde

$$|R(\xi)| \leq M\frac{(b-a)^5}{2880n^4}, \quad M = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|. \tag{17}$$

Problema 8 *Utilizando las fórmulas (13) y (14) demostrar las fórmulas (16) y (17).*

Implementación con Maxima.

En este caso la partición es de $2n$ puntos. Así definimos

```
(%i11)  kill(all)$
        a:0;b:1;x[0]:a;Nu:10;
        x[n]:=x[0]+n*(b-a)/(2*Nu);
(%o1) 0
(%o2) 1
(%o3) 0
(%o4) 10
(%o5) x[n]:=x[0]+(n*(b-a))/(2*Nu)
```

y definimos la función y la suma numérica

```
(%i6) define(f(x),x^2);
        simp: (f(a)+f(b)+ 4*sum(f(x[2*k-1]),k,1,Nu)+
                  2*sum(f(x[2*k]),k,1,Nu-1))*((b-a)/(6*Nu))$
        float(%);
(%o6) f(x):=x^2
(%o8) 0.33333333333333
```

Finalmente, comparamos el resultado numérico con el valor exacto

```
(%i9) exac:float(integrate(f(x),x,a,b));
float(abs(simp-exac));
(%o9) 0.33333333333333
(%o10) 0.0
```

que da cero tal y como predice la teoría.

A continuación usemos estos métodos para calcular distintas integrales.

Comparación de los métodos de cuadratura de los rectángulos, los trapecios y de Simpson.

Problema 9 *Sea la función $f(x) = \cos x$. Calcular la inegral*

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos x dx,$$

utilizando las fórmulas (1), (6), (13), respectivamente. Comparar los resultados con el resultado exacto

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos x dx = \sin \frac{1}{2} = 0{,}4794255386\ldots$$

Calcular una aproximación de la integral cambiando la función $f(x)$ por su polinomio de McLaurin de orden 5. Comparar los resultados con los del apartado anterior.

Problema 10 *Calcular el orden del error cometido al calcular la integral*

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

por los métodos de de los rectángulos, los trapecios y de Simpson, respectivamente, utilizando en todos ellos una partición del intervalo $[0,1]$ con $n = 4$ puntos. ¿Quién aproxima mejor?

Problema 11 *Calcular la integral*

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

utilizando los métodos de de los rectángulos, los trapecios y de Simpson cuando $n = 4$. Comparar los resultados con el resultado exacto con 10 cifras decimales $I = 0{,}7468241328$...

Paquete de integración numérica de Maxima

Maximatiene incorporado un potente paquete de integración numérica: el Quadpack. Este paquete tiene muchísimas opciones así que nos restringiremos a mostrar unos ejemplos sencillos. Para más detalle consúltese el manual de Maxima.

El comando más sencillo para calcular la integral de una función en un intervalo acotado es `quad_qag`. Su sintaxis es

```
quad_qag (f(x), x, a, b, key, [epsrel, epsabs, limit])
```

donde $f(x)$ es la función a integrar, x es la variable, a y b los extremos del intervalo. el valor `key` es un número del 1 al 6 (es el orden de la regla de integración de Gauss-Kronrod). La segunda lista consta de los siguientes elementos `epsrel` que es el error relativo deseado de la aproximación (el valor por defecto es 10^{-8}, `epsabs` es el error absoluto deseado de la aproximación (el valor por defecto es 0, y `limit` es el número máximo de subintervalos a utilizar (el valor por defecto es 200).

La función `quad_qag` devuelve una lista de cuatro elementos: [la aproximación a la integral, el error absoluto estimado de la aproximación, el número de evaluaciones del integrando, un código de error]. Es deseable que la salida del último argumento (el código de error) sea 0 (no hay errores).

Como ejemplo calculemos la integral $\int_0^1 x^2 dx$.

```
(%i11) quad_qag (x^(2), x, 0, 1, 3, 'epsrel=1d-10);
(%o11) [0.33333333333333,3.700743415417188*10^-15,31,0]
```

Como ejercicio calcular las distintas integrales propuestas en los problemas anteriores.

Bibliografía

1. R. Álvarez-Nodarse. Introducción al Maxima CAS con algunas aplicaciones. Versión online: `http://euler.us.es/~renato/clases/maxima/manualcurso/intro-maxima.pdf`
2. N.I. Danílina, N.S. Dubróvskaya, O.P. Kvashá y G.L. Smirnov. Matemática de Cálculo. Editorial MIR, Moscú, 1990.

La EDO lineal de primer orden.

La ecuación

$$\frac{d\,y(x)}{dx} + a(x)y(x) = b(x), \qquad a(x), b(x) \in C_I. \tag{18}$$

(como incógnita tenemos a la función derivable $y(x)$) se denomina ecuación diferencial lineal de primer orden. Si $b(x) \equiv 0$ la ecuación se denomina ecuación homogénea y si $b(x) \neq 0$, ecuación no homogénea. La solución general de (18) se expresa de la forma

$$y(x) = Ce^{-\int a(x)\,dx} + e^{-\int a(x)\,dx} \int e^{\int a(x)\,dx}\, b(x)\,dx \tag{19}$$

Para probarlo basta sustituir la función $y(x)$ anterior en (18) y usar el Teorema fundamental del Cálculo.

Ejemplo: Encontrar la solución de la ecuación lineal $\dfrac{d\,y}{d\,x} + x\,y = 2x$.

Tenemos

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{\frac{x^2}{2}} 2x\,dx = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2.$$

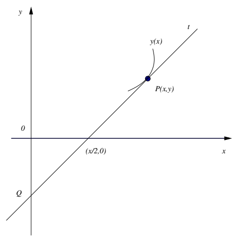
El problema de encontrar una solución de la ecuación (18) con la condición que $y(x)$ tome cierto valor y_0 cuando $x = x_0$ se denomina problema de valores iniciales (PVI) para la EDO lineal de primer orden. Así el PVI correspondiente a la ecuación (18) es

$$\frac{d\,y(x)}{dx} + a(x)y(x) = b(x), \qquad a(x), b(x) \in C_I, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{20}$$

Ejemplo: Resolver la EDO del ejemplo anterior con la condición inicial $y(0) = 1$.

Como la solución general es $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2$, tenemos $y(0) = 1 = C + 2$, de donde $C = -1$ y $y(x) = 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Problema 12 *Encontrar una familia de curvas $y(x)$ tal que el segmento de la tangente t a la curva y en un punto cualquiera $P(x, y)$ dibujado entre P y el eje $0y$ quede bisecado por el eje Ox.*

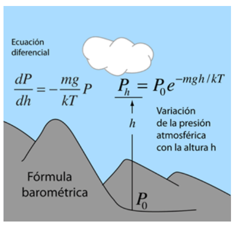


Problema 13 *Encontrar una familia de curvas $y(x)$ tal que la pendiente de la tangente t a la curva y en cada punto sea la suma de las coordenadas del punto. Encuentra además la curva que pasa por el origen.*

Problema 14 *La ecuación barométrica de Pascal es la EDO*

$$p'(h) = -\lambda p(h), \qquad \lambda > 0,$$

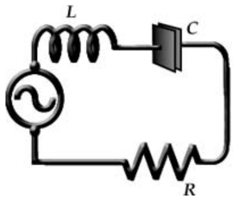
donde p es la presión en función de la altura h. Si $h = 0$, la presión es la presión al nivel del mar (usualmente 1 atm o 760 mm de mercurio). ¿Cómo varía la presión con la altura?



Problema 15 *Se sabe que la intensidad i de circuito está gobernada por la EDO*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U,$$

donde L es la impedancia, R la resistencia y U el voltaje. Supongamos que el voltaje U es constante y que $i(0) = i_0$. Encontrar la dependencia de i respecto al tiempo t. Realizar el mismo estudio si $U = U_0 \sin(\omega t)$.



Ecuaciones separables.

Supongamos que la función $f(x, y)$ en la EDO

$$y' = f(x, y) \tag{21}$$

admite la factorización $f(x, y) = a(x)b(y)$. Cuando esto ocurre se dice que la EDO (21) es una ecuación separable. Un ejemplo trivial de ecuación diferencial separable es la ecuación diferencial lineal homogénea (18) cuando $b \equiv 0$.

En general tenemos

$$\frac{dy}{dx} = a(x)b(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{b(y)} = a(x)dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{dy}{b(y)}dy = \int a(x)dx.$$

Luego la solución de la ecuación separable es

$$G[y(x)] = A(x) + C,$$

donde $G(y)$ es una primitiva de $1/b(y)$ y $A(x)$ es una primitiva de $a(x)$.

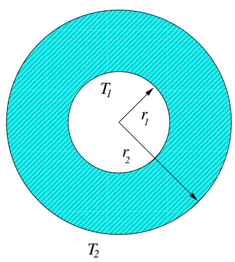
Ejemplo: Resolver la ecuación $y' = x/y$.

Usando lo anterior tenemos

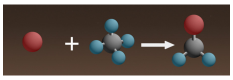
$$ydy = xdx \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = x^2 + C.$$

La expresión anterior define una familia de curvas en $\mathbb{R}^2$ que son solución de la ecuación diferencial propuesta. En general la solución es $y(x) = \pm\sqrt{C + x^2}$, donde el signo + o − dependerá de las condiciones iniciales. Por ejemplo, si nos interesa el PVI con la condición $y(0) = 3$, entonces $C = 9$ y la solución será $y(x) = \sqrt{9 + x^2}$.

Problema 16 *Sea una esfera hueca homogénea de radio interior r_1 y radio exterior r_2. Supongamos que la temperatura de la cara interior es T_1 y la exterior es T_2. Encontrar la temperatura en la esfera en función del radio si T satisface la siguiente EDO $Q = -\varkappa r^2 \frac{dT}{dr}$, $\varkappa > 0$.*



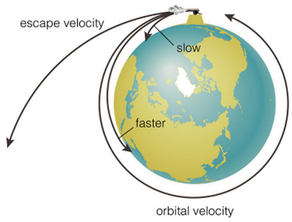
Problema 17 *Supongamos que tenemos una reacción química $A + B \to C$ y que en $t = 0$ la concentración de A es a y la de B es b. Se sabe que la velocidad la velocidad de formación de C es proporcional a la concentración de A y B. Lo anterior nos conduce a la EDO*



$$x' = \varkappa(a - x)(b - x), \qquad x(0) = 0. \tag{22}$$

Asumiendo que $a \neq b$. ¿Cómo varía x con el tiempo?

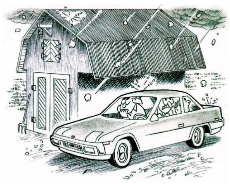
Problema 18 *Encontrar la velocidad de escape v_E al espacio exterior de un cuerpo que se encuentre en la superficie de la Tierra si se sabe que la EDO que modeliza el movimiento es $v\dfrac{dv}{dr} = -\dfrac{gR^2}{r^2}$.*



Problema 19 *La velocidad $v(t)$ de caída de un cuerpo en un medio viscoso se puede modelizar mediante la ecuación*

$$v' = g - \kappa v^r, \qquad v(0) = v_0,$$

donde g y κ son ciertas constantes (la gravedad y la viscosidad). Encontrar cómo varía v con el tiempo. Usar $r = 2$, 3 y $1{,}7$.



Usando Maxima.

Para resolver EDOS analíticamente con MAXIMA usamos el comando `ode2` cuya sintaxis es

`ode2(eqn, variable dependiente, variable independiente)`

y que resuelve EDOs de primer y segundo orden intentando reconocer alguna de las ecuaciones tipo más usuales: lineales, separables, de Bernoulli, etc.

Por ejemplo, resolvamos la EDO $z' = -z + x$:

```
(%i18)   'diff(z,x)=x-z;
(%i19)   ode2('diff(z,x)=x-z,z,x)$
(%i20)   expand(%);
(%o18)   'diff(z,x,1)=x-z
(%o20)   z=%c*%e^(-x)+x-1
```

Si queremos resolver el PVI $z' = -z + x$, $y(0) = 1$ hay que usar el comando `ic1` cuya sintaxis es

`ic1(solución, valor de x, valor de y)`

donde `solución` es la solución general que da el comando `ode2` y el `valor de x` y el `valor de y`, son los valores que toma la y cuando $x = x_0$, i.e., los valores iniciales. Así tenemos

```
(%i21) expand(ic1(%,x=1,z=2));
(%o21) z=2*%e^(1-x)+x-1
(%i22) define(s1(x),second(%));
(%o22) s1(x):=2*%e^(1-x)+x-1
(%i23) wxplot2d(s1(x),[x,1,5])$
(%t23)  << Graphics >>
```

Si lo aplicamos a nuestro PVI $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ tenemos

```
(%i23) kill(w)$
       'diff(w,x)=1+w^2;
        ode2('diff(w,x)=1+w^2,w,x)$
        sol:expand(%);
        expand(ic1(sol,x=0,w=0));
(%o24) 'diff(w,x,1)=w^2+1
(%o26) atan(w)=x+%c
(%o27) atan(w)=x
(%i28) sol:solve(%,w);
(%o28) [w=tan(x)]
```

La última salida (entre "`[ ]`")es una lista. Las listas son especialmente importantes en MAXIMA aunque por ahora sólo nos interesa saber sacar un elemento dado lo que se hace con el comando `part(lista,n° del elemento)` (o bien, en nuestro caso escribiendo `sol[1]`) así que hacemos

```
(%i29) part(%,1);
(%o29) w=tan(x)
(%i30) define(solw(x),second(%));
(%o30) solw(x):=tan(x)
```

Soluciones numéricas.

Esta orden `ode2` no siempre funciona como es el caso de la EDO $z' = x - \sin z$, en cuyo caso la salida es "false"

```
(%i31) ode2('diff(z,x)=x-sin(z),z,x);
(%o31) false
```

En ese caso hay que usar algún método numérico. Más adelante explicaremos algunos métodos muy sencillos, no obstante aquí usaremos el comando `runge1` que permite resolver numéricamente PVI de primer orden del tipo $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ con MAXIMA usando en método de Runge-Kutta. Para ello lo primero que tenemos que hacer es cargar el paquete numérico `diffeq` y luego invocar dicho comando. La sintaxis de `runge1` es la siguiente

```
runge1(f, x0, x1, h, y0)
```

donde f es la función $f(x, y)$ de la ecuación $y' = f(x, y)$, `x0` y `x1` los valores inicial, x_0, y final, x_1, de la variable independiente, respectivamente, `h` es la la longitud (o paso) de los subintervalos e `y0` es el valor inicial y_0 que toma y en x_0. El resultado es una lista que a su vez contiene tres listas: la primera contiene las abscisas x, la segunda las ordenadas y y tercera las correspondientes derivadas y'.

Como ejemplo consideremos el PVI $y' = 1+y$, $y'(0) = 1$. Ante todo limpiaremos todas las variables y cargaremos el paquete `diffeq`

```
(%i32) kill(all);
(%o0) done
(%i1) load(diffeq);
(%o1) /usr/share/maxima/5.20.1/share/numeric/diffeq.mac
```

A continuación definimos la función f, y el paso h, para, a continuación, invocar la orden `runge1`

```
(%i2) f(x,y):=1+y; h:1/20;
(%o2) f(x,y):=1+y
(%o3) 1/20
(%i4) solnum:runge1(f,0,1,h,1)
(%o4) [[0.0,0.05,...,0.95],[1.0,1.102104166666667,...,4.150987618241528],
       [2.0,2.102104166666667,...,5.150987618241528]]
(%i5) wxplot2d([discrete,solnum[1],solnum[2]])$
(%t5)  << Graphics >>
```

Como esta ecuación es exactamente resoluble podemos comparar sus gráficas. Para ello primero usamos `ode2` e `ice1` para resolver analíticamente el PVI:

```
(%i6) ode2('diff(w,x)=1+w,w,x)$
       sol:expand(%);
       expand(ic1(sol,x=0,w=1));
       define(solw(x),second(%));
(%o7) w=%c*%e^x-1
(%o8) w=2*%e^x-1
(%o9) solw(x):=2*%e^x-1
```

Y ahora dibujamos ambas gráficas

```
(%i10) wxplot2d([[discrete,solnum[1],solnum[2]],solw(x)],[x,0,1])$
(%t10)  << Graphics >>
```

Aparte del comando anterior existe un comando alternativo para resolver numéricamente una ecuación diferencial pero que además es aplicable a sistemas de ecuaciones de primer orden. Se trata de comando `rk` del paquete `dynamics` que no es más que otra implementación de un método de Runge-Kutta. Su sintaxis, para el caso del PVI $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ es la siguiente

```
rk(f,y,y0,[x,x0,x1,h])
```

donde f es la función $f(x, y)$ de la ecuación $y' = f(x, y)$, `x0` y `x1` los valores inicial, x_0, y final, x_1, de la variable independiente, respectivamente, `h` es la la longitud de los subintervalos e `y0` es el valor inicial y_0 que toma y en x_0. El resultado es una lista con los pares $[x, y]$ de las abscisas x y las ordenadas y.

Así tenemos la secuencia de órdenes

```
(%i15) load(dynamics)$
(%i16) h:1/20;kill(x,y);
       numsolrk:rk(x-sin(y),y,1,[x,0,1,h])$
(%o16) 1/20
(%o17) done
(%i19) numsolrk;
(%o19) [[0,1],[0.05,0.95973997169251],[0.1,0.92308155305544], ...
       [0.95,0.77210758398484],[1.0,0.78573816934072]]
```

La salida de `rk` es justo una lista que entiende perfectamente el comando `plot2d` por lo que podemos dibujar la solución y comparar ambas salidas numéricas.

```
(%i20) wxplot2d([discrete,numsolrk],
          [xlabel, "x"], [ylabel, "y"],[color,blue])$
```

Bibliografía

1. R. Álvarez-Nodarse. Introducción al Maxima CAS con algunas aplicaciones. Versión online: http://euler.us.es/~renato/clases/maxima/manualcurso/intro-maxima.pdf

2. R. Álvarez-Nodarse. Ampliación de Análisis Matemático: Ecuaciones diferenciales ordinarias. http://euler.us.es/~renato/clases/aam/files/edo-clases-2010.pdf