

Integración numérica y resolución de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias con MAXIMA CAS

Renato Álvarez Nodarse

Dpto. Análisis Matemático, Universidad de Sevilla.

26 de junio de 2017

<http://euler.us.es/~renato/>

Fórmulas de cuadratura.

Sea $f(x)$ una función continua definida en el intervalo $[a, b]$. Nuestro objetivo será encontrar fórmulas aproximadas para calcular la integral $\int_a^b f(x) dx$. En caso de conocer la primitiva $F(x)$ es evidente que podemos encontrar el valor exacto de la integral utilizando el Teorema fundamental del cálculo integral: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Sin embargo no siempre esto es posible. Por ejemplo, para la función $f(x) = e^{-x^2}$ no existe ninguna primitiva que podamos escribir utilizando funciones elementales. En esta práctica vamos a aprender tres métodos para calcular aproximadamente el valor numérico de las integrales definidas.

Fórmula de los rectángulos.

Una aproximación de la integral $\int_a^b f(x) dx$ consiste en aproximar el área bajo la curva $y = f(x)$ por un rectángulo de base $b - a$ y altura $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (ver figura 1), entonces

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) + R(\xi), \quad \xi \in [a, b], \quad (1)$$

donde el error $R(\xi)$, si f tiene primera y segunda derivadas continuas en $[a, b]$, se expresa de la forma

$$R(\xi) = \frac{(b - a)^2}{24} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (2)$$

Ahora si queremos aproximar la integral $\int_a^b f(x) dx$ con mejor exactitud podemos dividir el intervalo $[a, b]$ en n puntos, o sea, consideremos la partición del intervalo

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}] \cup [x_{n-1}, b],$$

donde

$$x_k = a + \frac{b - a}{n} k, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n, \quad x_0 = a, x_n = b.$$

De

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \cdots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx.$$

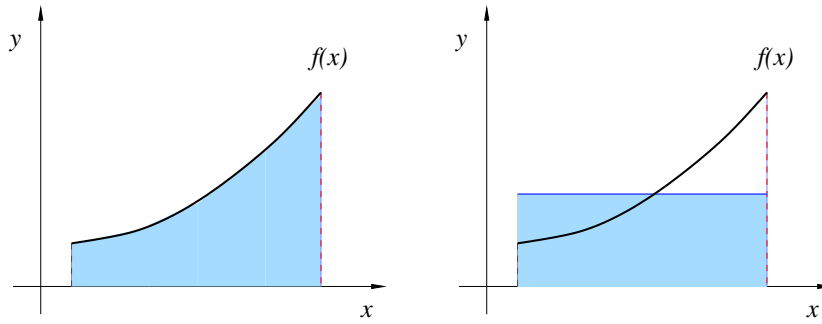


Figura 1: Aproximación de una integral por el método de los rectángulos. A la izquierda vemos el área bajo la curva que queremos calcular. A la derecha, la aproximación mediante el correspondiente rectángulo.

si aplicamos a cada integral $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$ la fórmula (1) obtenemos la ecuación

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + R(\xi), \quad (3)$$

y

$$|R(\xi)| \leq M \frac{(b-a)^2}{24n^2}, \quad M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \quad (4)$$

Problema 1 Utilizando las fórmulas (1) y (2) demostrar las fórmulas (3) y (4).

Problema 2 Prueba la fórmula (1) y (2). Para ello usa el teorema de Taylor para aproximar $f(x)$ en el punto $\frac{a+b}{2}$ así como el teorema del valor medio integral: Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no positiva (no negativa) e integrable en $[a, b]$ entonces existe un $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (5)$$

Implementación con Maxima.

Veamos como podemos implementar lo anterior con MAXIMA CAS. Definimos el intervalo $[a, b]$, el número de puntos en que vamos a dividir en intervalo y definimos la partición que usaremos:

```
(%i1) a:0;b:1;
x[0]:a;
Nu:20;
x[n]:=x[0]+n*(b-a)/Nu;
(%o1) 0
(%o2) 1
(%o3) 0
(%o4) 20
(%o5) x[n]:=x[0]+(n*(b-a))/Nu

(%i6) define(f(x),x^2);
rec:sum(f((x[k]+x[k+1])/2),k,0,Nu-1)*((b-a)/Nu);
float(%);
(%o6) f(x):=x^2
(%o7) 533/1600
(%o8) 0.333125
```

En este caso, como la función tiene primitiva podemos comparar el resultado numérico con el valor exacto

```
(%i9) exac:float(integrate(f(x),x,a,b));
float(abs(rec-exac));
(%o9) 0.333333333333333
(%o10) 2.083333333333104*10^-4
```

Fórmula de los trapezios.

Otra aproximación de la integral $\int_a^b f(x) dx$ consiste en aproximar el área bajo la curva $y = f(x)$ no por un rectángulo sino por un trapecio de base $b - a$ (ver figura 2), entonces

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) + R(\xi), \quad (6)$$

donde el error $R(\xi)$, si f tiene primera y segunda derivadas continuas en $[a, b]$ se expresa de la forma

$$R(\xi) = -\frac{(b - a)^2}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (7)$$

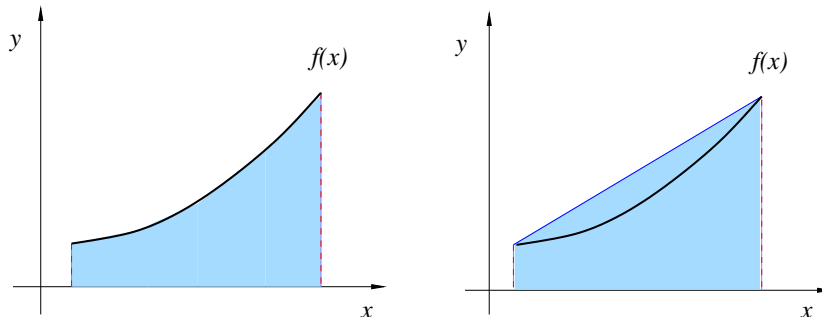


Figura 2: Aproximación de una integral por el método de los trapezios. A la izquierda vemos el área bajo la curva que queremos calcular. A la derecha, la aproximación mediante el correspondiente trapecio.

Problema 3 *Demostrar las fórmulas (6) y (7). Para ello seguir los siguientes pasos:*

1. *Demostrar que*

$$\int_a^b f''(x)(x - a)(x - b) dx = -(b - a)[f(a) + f(b)] + 2 \int_a^b f(x) dx. \quad (8)$$

2. *Utilizando el teorema del valor medio integral (5) demostrar que*

$$\int_a^b f''(x)(x - a)(x - b) dx = -\frac{(b - a)^3}{6} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (9)$$

3. *Usando los dos apartados anteriores obtén las fórmulas (6) y (7).*

Ahora podemos aproximar la integral $\int_a^b f(x) dx$ con mejor exactitud dividiendo, igual que antes, el intervalo $[a, b]$ en n puntos, o sea, consideremos la partición del intervalo

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}] \cup [x_{n-1}, b],$$

donde

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad x_0 = a, x_n = b.$$

Nuevamente,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \dots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx,$$

y, por tanto, si aplicamos a cada integral $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$ la fórmula (1) obtenemos la expresión

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right) + R(\xi), \quad (10)$$

donde

$$|R(\xi)| \leq M \frac{(b-a)^2}{12n^2}, \quad M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \quad (11)$$

Problema 4 Utilizando las fórmulas (6) y (7) demostrar las fórmulas (10) y (11).

Problema 5 Prueba la fórmula (6) y (7).

Implementación con Maxima.

En este caso volvemos a definir la partición:

```
(%i11) kill(all)$
      a:0;b:1;x[0]:a;Nu:20;
      x[n]:=x[0]+n*(b-a)/Nu;
(%o1) 0
(%o2) 1
(%o3) 0
(%o4) 20
(%o5) x[n]:=x[0]+(n*(b-a))/Nu
```

y definimos la función y la suma numérica

```
(%i6) define(f(x),x^2);
      tra: (f(a)+f(b)+ 2*sum(f(x[k]),k,1,Nu-1))*((b-a)/(2*Nu))$
      float(%);
(%o6) f(x):=x^2
(%o8) 0.33375
```

Finalmente, comparamos el resultado numérico con el valor exacto

```
(%i9) exac:float(integrate(f(x),x,a,b));
      float(abs(tra-exac));
(%o9) 0.3333333333333333
(%o10) 4.16666666666667*10^-4
```

Método de Simpson.

El método de Simpson para calcular integrales consiste en aproximar la integral $\int_a^b f(x) dx$ de la siguiente forma

$$\int_a^b f(x) dx = A f(a) + B f\left(\frac{a+b}{2}\right) + C f(b) + R(\xi), \quad (12)$$

donde A, B, C son tales que $R(\xi)$ es igual a cero si $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$, respectivamente. Es decir si sustituimos en (12) la función f por cualquiera de las funciones $f(x) = 1$, $f(x) = x$ o $f(x) = x^2$, la fórmula es exacta, o sea $R(\xi) = 0$. Esto es equivalente a aproximar el área debajo de f por una parábola (ver figura 3). Este método es un caso particular del método de Newton-Cotes.

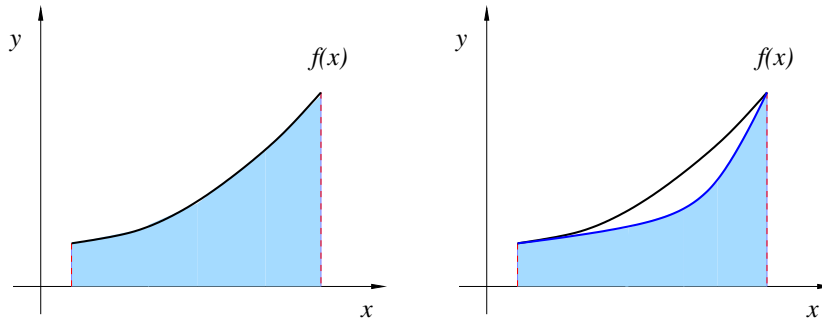


Figura 3: Aproximación de una integral por el método de Simpson. A la izquierda vemos el área bajo la curva que queremos calcular. A la derecha, la aproximación usando el método de los trapecios que equivale a encontrar el área bajo una parábola.

Problema 6 Sustituyendo $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$ en (12) encontrar un sistema de ecuaciones para las incógnitas A, B, C y demostrar entonces que (13) se puede escribir de la forma

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{4(b-a)}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} f(b) + R(\xi). \quad (13)$$

Si f es cuatro veces derivable y todas sus derivadas son continuas en $[a, b]$ entonces se puede demostrar que $R(\xi)$ se expresa de la forma

$$R(\xi) = \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (14)$$

Problema 7 Demostrar la fórmula anterior. Para ello seguir los siguientes pasos.

1. Comprobar que la función $F(x, t)$, con $x = \frac{a+b}{2}$, definida por

$$F(x, t) = \int_{x-t}^{x+t} f(\xi) d\xi - \frac{t}{3} [f(x-t) + 4f(x) + f(x+t)], \quad (15)$$

es continua y tres veces diferenciable para todo $t \in [0, \frac{b-a}{2}]$, y $F'''(x, t) = -\frac{t}{3} [f'''(x+t) - f'''(x-t)]$, además $F(x, 0) = F'(x, 0) = F''(x, 0) = 0$.

2. Probar que $F'''(x, t)$ es tal que existen dos números reales m y M (¿quiénes son dichos números?) tales que

$$\frac{2}{3} mt^2 \leq F'''(x, t) \leq \frac{2}{3} Mt^2,$$

y deducir de aquí que

$$\frac{1}{90} mt^5 \leq F(x, t) \leq \frac{1}{90} Mt^5.$$

3. Finalmente, substituyendo $t = \frac{b-a}{2}$, deducir el resultado deseado.

Al igual que en los casos anteriores vamos aproximar la integral $\int_a^b f(x) dx$ con mejor exactitud dividiendo el intervalo $[a, b]$ en $2n$ puntos de la forma

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{2n-2}, x_{2n-1}] \cup [x_{2n-1}, b],$$

donde

$$x_k = a + \frac{b-a}{2n} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n, \quad x_0 = a, x_{2n} = b.$$

Apliquemos ahora la fórmula de Simpson (13) para cada subintervalo $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, o sea, escribamos la integral original como la suma de las integrales

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^b f(x) dx.$$

y apliquemos el método de Simpson a cada uno de los sumandos. Nótese que los intervalos siguen teniendo una longitud $x_{2k+2} - x_{2k} = \frac{b-a}{n}$ igual que antes. Esto nos conduce a la expresión

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) \right) + R(\xi), \quad (16)$$

donde

$$|R(\xi)| \leq M \frac{(b-a)^5}{2880n^4}, \quad M = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|. \quad (17)$$

Problema 8 Utilizando las fórmulas (13) y (14) demostrar las fórmulas (16) y (17).

Implementación con Maxima.

En este caso la partición es de $2n$ puntos. Así definimos

```
(%i11) kill(all)$
a:0;b:1;x[0]:a;Nu:10;
x[n]:=x[0]+n*(b-a)/(2*Nu);
(%o1) 0
(%o2) 1
(%o3) 0
(%o4) 10
(%o5) x[n]:=x[0]+(n*(b-a))/(2*Nu)
```

y definimos la función y la suma numérica

```
(%i6) define(f(x),x^2);
simp: (f(a)+f(b)+ 4*sum(f(x[2*k-1]),k,1,Nu)+
2*sum(f(x[2*k]),k,1,Nu-1))*(b-a)/(6*Nu)$
float(%);
(%o6) f(x):=x^2
(%o8) 0.3333333333333333
```

Finalmente, comparamos el resultado numérico con el valor exacto

```
(%i9) exac:float(integrate(f(x),x,a,b));
float(abs(simp-exac));
(%o9) 0.3333333333333333
(%o10) 0.0
```

que da cero tal y como predice la teoría.

A continuación usemos estos métodos para calcular distintas integrales.

Comparación de los métodos de cuadratura de los rectángulos, los trapecios y de Simpson.

Problema 9 Sea la función $f(x) = \cos x$. Calcular la integral

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos x dx,$$

utilizando las fórmulas (1), (6), (13), respectivamente. Comparar los resultados con el resultado exacto

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos x dx = \sin \frac{1}{2} = 0,4794255386 \dots$$

Calcular una aproximación de la integral cambiando la función $f(x)$ por su polinomio de McLaurin de orden 5. Comparar los resultados con los del apartado anterior.

Problema 10 Calcular el orden del error cometido al calcular la integral

$$I = \int_0^1 f(x) dx \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

por los métodos de de los rectángulos, los trapecios y de Simpson, respectivamente, utilizando en todos ellos una partición del intervalo $[0, 1]$ con $n = 4$ puntos. ¿Quién aproxima mejor?

Problema 11 Calcular la integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

utilizando los métodos de de los rectángulos, los trapecios y de Simpson cuando $n = 4$. Comparar los resultados con el resultado exacto con 10 cifras decimales $I = 0,7468241328\dots$ Utiliza la serie de McLaurin para calcular un valor aproximado y compáralo con los anteriores.

Problema 12 Identifica las siguientes sumas con sumas de Riemman de ciertas funciones y calcula su suma. Usa MAXIMA para estudiar la convergencia de las mismas: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 1/(n+k)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 3n/(n^2+k^2)$.

Paquete de integración numérica de Maxima

MAXIMA tiene incorporado un potente paquete de integración numérica: el QUADPACK. Este paquete tiene muchísimas opciones así que nos restringiremos a mostrar unos ejemplos sencillos. Para más detalle consúltese el manual de MAXIMA.

El comando más sencillo para calcular la integral de una función en un intervalo acotado es `quad_qag`. Su sintaxis es

`quad_qag (f(x), x, a, b, key, [epsrel, epsabs, limit])`

donde $f(x)$ es la función a integrar, x es la variable, a y b los extremos del intervalo. el valor `key` es un número del 1 al 6 (es el orden de la regla de integración de Gauss-Kronrod). La segunda lista consta de los siguientes elementos `epsrel` que es el error relativo deseado de la aproximación (el valor por defecto es 10^{-8}), `epsabs` es el error absoluto deseado de la aproximación (el valor por defecto es 0, y `limit` es el número máximo de subintervalos a utilizar (el valor por defecto es 200).

La función `quad_qag` devuelve una lista de cuatro elementos: [la aproximación a la integral, el error absoluto estimado de la aproximación, el número de evaluaciones del integrando, un código de error]. Es deseable que la salida del último argumento (el código de error) sea 0 (no hay errores).

Como ejemplo calculemos la integral $\int_0^1 x^2 dx$.

```
(%i11) quad_qag (x^(2), x, 0, 1, 3, 'epsrel=1d-10);
(%o11) [0.3333333333333333,3.70074341541719*10^-15,31,0]
```

Problema 13 Calcula las distintas integrales propuestas en los problemas anteriores.

Problema 14 Considerar el caso de la función $f(x) = x^{(1/2)}(1-x)^{(3/2)}$. Para dicha función calcula la integral $\int_0^1 x^{(1/2)}(1-x)^{(3/2)} dx$ usando el paquete numérico `quad_qag`, el método de Simpson y compáralo con el valor exacto de la misma usando la orden `integrate`.

Bibliografía

1. R. Álvarez-Nodarse. Introducción al MAXIMA CAS con algunas aplicaciones. Versión online:
<http://euler.us.es/~renato/clases/maxima/manualcurso/intro-maxima.pdf>
2. N.I. Danílina, N.S. Dubróvskaya, O.P. Kvashá y G.L. Smirnov. Matemática de Cálculo. Editorial MIR, Moscú, 1990.

Introducción a las ecuaciones diferenciales con Maxima CAS.

La EDO lineal de primer orden.

La ecuación

$$\frac{dy(x)}{dx} + a(x)y(x) = b(x), \quad a(x), b(x) \in C_I. \quad (18)$$

(como incógnita tenemos a la función derivable $y(x)$) se denomina ecuación diferencial lineal de primer orden. Si $b(x) \equiv 0$ la ecuación se denomina ecuación homogénea y si $b(x) \neq 0$, ecuación no homogénea. La solución general de (18) se expresa de la forma

$$y(x) = Ce^{-\int a(x) dx} + e^{-\int a(x) dx} \int e^{\int a(x) dx} b(x) dx \quad (19)$$

Para probarlo basta sustituir la función $y(x)$ anterior en (18) y usar el Teorema fundamental del Cálculo.

Ejemplo: Encontrar la solución de la ecuación lineal $\frac{dy}{dx} + xy = 2x$.

Tenemos

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{\frac{x^2}{2}} 2x dx = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2.$$

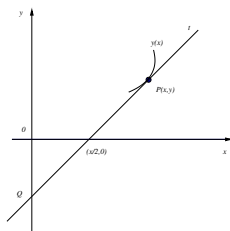
El problema de encontrar una solución de la ecuación (18) con la condición que $y(x)$ tome cierto valor y_0 cuando $x = x_0$ se denomina problema de valores iniciales (PVI) para la EDO lineal de primer orden. Así el PVI correspondiente a la ecuación (18) es

$$\frac{dy(x)}{dx} + a(x)y(x) = b(x), \quad a(x), b(x) \in C_I, \quad y(x_0) = y_0. \quad (20)$$

Ejemplo: Resolver la EDO del ejemplo anterior con la condición inicial $y(0) = 1$.

Como la solución general es $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2$, tenemos $y(0) = 1 = C + 2$, de donde $C = -1$ y $y(x) = 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Problema 15 *Encontrar una familia de curvas $y(x)$ tal que el segmento de la tangente t a la curva y en un punto cualquiera $P(x, y)$ dibujado entre P y el eje Oy quede bisecado por el eje Ox .*

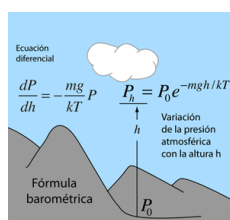


Problema 16 *Encontrar una familia de curvas $y(x)$ tal que la pendiente de la tangente t a la curva y en cada punto sea la suma de las coordenadas del punto. Encuentra además la curva que pasa por el origen.*

Problema 17 *La ecuación barométrica de Pascal es la EDO*

$$p'(h) = -\lambda p(h), \quad \lambda > 0,$$

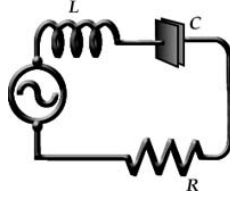
donde p es la presión en función de la altura h . Si $h = 0$, la presión es la presión al nivel del mar (usualmente 1 atm o 760 mm de mercurio). ¿Cómo varía la presión con la altura?



Problema 18 Se sabe que la intensidad i de circuito está gobernada por la EDO

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U,$$

donde L es la impedancia, R la resistencia y U el voltaje. Supongamos que el voltaje U es constante y que $i(0) = i_0$. Encontrar la dependencia de i respecto al tiempo t . Realizar el mismo estudio si $U = U_0 \sin(\omega t)$.



Ecuaciones separables.

Supongamos que la función $f(x, y)$ en la EDO

$$y' = f(x, y) \tag{21}$$

admite la factorización $f(x, y) = a(x)b(y)$. Cuando esto ocurre se dice que la EDO (21) es una ecuación separable. Un ejemplo trivial de ecuación diferencial separable es la ecuación diferencial lineal homogénea (18) cuando $b \equiv 0$.

En general tenemos

$$\frac{dy}{dx} = a(x)b(y) \iff \frac{dy}{b(y)} = a(x)dx \iff \int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)dx.$$

Luego la solución de la ecuación separable es

$$G[y(x)] = A(x) + C,$$

donde $G(y)$ es una primitiva de $1/b(y)$ y $A(x)$ es una primitiva de $a(x)$.

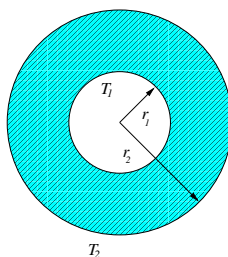
Ejemplo: Resolver la ecuación $y' = x/y$.

Usando lo anterior tenemos

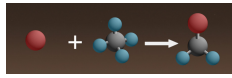
$$ydy = xdx \iff y^2 = x^2 + C.$$

La expresión anterior define una familia de curvas en \mathbb{R}^2 que son solución de la ecuación diferencial propuesta. En general la solución es $y(x) = \pm\sqrt{C + x^2}$, donde el signo $+$ o $-$ dependerá de las condiciones iniciales. Por ejemplo, si nos interesa el PVI con la condición $y(0) = 3$, entonces $C = 9$ y la solución será $y(x) = \sqrt{9 + x^2}$.

Problema 19 Sea una esfera hueca homogénea de radio interior r_1 y radio exterior r_2 . Supongamos que la temperatura de la cara interior es T_1 y la exterior es T_2 . Encontrar la temperatura en la esfera en función del radio si T satisface la siguiente EDO $Q = -\kappa r^2 \frac{dT}{dr}$, $\kappa > 0$.



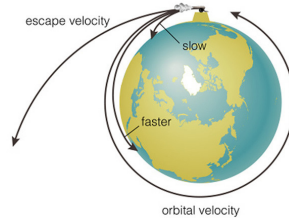
Problema 20 Supongamos que tenemos una reacción química $A + B \rightarrow C$ y que en $t = 0$ la concentración de A es a y la de B es b . Se sabe que la velocidad la velocidad de formación de C es proporcional a la concentración de A y B . Lo anterior nos conduce a la EDO



$$x' = \kappa(a - x)(b - x), \quad x(0) = 0. \quad (22)$$

Asumiendo que $a \neq b$. ¿Cómo varía x con el tiempo?

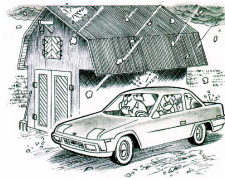
Problema 21 Encontrar la velocidad de escape v_E al espacio exterior de un cuerpo que se encuentre en la superficie de la Tierra si se sabe que la EDO que modeliza el movimiento es $v \frac{dv}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2}$.



Problema 22 La velocidad $v(t)$ de caída de un cuerpo en un medio viscoso se puede modelizar mediante la ecuación

$$v' = g - \kappa v^r, \quad v(0) = v_0,$$

donde g y κ son ciertas constantes (la gravedad y la viscosidad). Encontrar cómo varía v con el tiempo. Usar $r = 2, 3$ y $1,7$.



Usando Maxima.

Para resolver EDOS analíticamente con MAXIMA usamos el comando `ode2` cuya sintaxis es

`ode2(eqn, variable dependiente, variable independiente)`

y que resuelve EDOs de primer y segundo orden intentando reconocer alguna de las ecuaciones tipo más usuales: lineales, separables, de Bernoulli, etc.

Por ejemplo, resolvamos la EDO $z' = -z + x$:

```
(%i18) 'diff(z,x)=x-z;
(%i19) ode2('diff(z,x)=x-z,z,x)$
(%i20) expand(%);
(%o18) 'diff(z,x,1)=x-z
(%o20) z=%c*e^(-x)+x-1
```

Si queremos resolver el PVI $z' = -z + x$, $y(0) = 1$ hay que usar el comando `ic1` cuya sintaxis es

`ic1(solución, valor de x, valor de y)`

donde `solución` es la solución general que da el comando `ode2` y el `valor de x` y el `valor de y`, son los valores que toma la y cuando $x = x_0$, i.e., los valores iniciales. Así tenemos

```
(%i21) expand(ic1(% ,x=1,z=2));
(%o21) z=2*e^(1-x)+x-1
(%i22) define(s1(x),second(%));
(%o22) s1(x):=2*e^(1-x)+x-1
(%i23) wxplot2d(s1(x),[x,1,5])$
(%t23) << Graphics >>
```

Si lo aplicamos a nuestro PVI $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ tenemos

```
(%i23) kill(w)$
      'diff(w,x)=1+w^2;
      ode2('diff(w,x)=1+w^2,w,x)$
      sol:expand(%);
      expand(ic1(sol,x=0,w=0));
(%o24) 'diff(w,x,1)=w^2+1
(%o26) atan(w)=x+%c
(%o27) atan(w)=x
(%i28) sol:solve(% ,w);
(%o28) [w=tan(x)]
```

La última salida (entre “[]”) es una lista. Las listas son especialmente importantes en MAXIMA aunque por ahora sólo nos interesa saber sacar un elemento dado lo que se hace con el comando `part(lista,nº del elemento)` (o bien, en nuestro caso escribiendo `sol[1]`) así que hacemos

```
(%i29) part(% ,1);
(%o29) w=tan(x)
(%i30) define(solw(x),second(%));
(%o30) solw(x):=tan(x)
```

Soluciones numéricas.

Esta orden `ode2` no siempre funciona como es el caso de la EDO $z' = x - \sin z$, en cuyo caso la salida es “false”

```
(%i31) ode2('diff(z,x)=x-sin(z),z,x);
(%o31) false
```

En ese caso hay que usar algún método numérico. Más adelante explicaremos algunos métodos muy sencillos, no obstante aquí usaremos el comando `runge1` que permite resolver numéricamente PVI de primer orden del tipo $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ con MAXIMA usando en método de Runge-Kutta. Para ello lo primero que tenemos que hacer es cargar el paquete numérico `diffeq` y luego invocar dicho comando. La sintaxis de `runge1` es la siguiente

$$\text{runge1}(f, x_0, x_1, h, y_0)$$

donde f es la función $f(x, y)$ de la ecuación $y' = f(x, y)$, x_0 y x_1 los valores inicial, x_0 , y final, x_1 , de la variable independiente, respectivamente, h es la longitud (o paso) de los subintervalos e y_0 es el valor inicial y_0 que toma y en x_0 . El resultado es una lista que a su vez contiene tres listas: la primera contiene las abscisas x , la segunda las ordenadas y y tercera las correspondientes derivadas y' .

Como ejemplo consideremos el PVI $y' = 1 + y$, $y'(0) = 1$. Ante todo limpiaremos todas las variables y cargaremos el paquete `diffeq`

```
(%i32) kill(all);
(%o0) done
(%i1) load(diffeq);
(%o1) /usr/share/maxima/5.20.1/share/numeric/diffeq.mac
```

A continuación definimos la función f , y el paso h , para, a continuación, invocar la orden `runge1`

```
(%i2) f(x,y):=1+y; h:1/20;
(%o2) f(x,y):=1+y
(%o3) 1/20
(%i4) solnum:runge1(f,0,1,h,1)
(%o4) [[0.0,0.05,...,0.95],[1.0,1.102104166666667,...,4.150987618241528],
      [2.0,2.102104166666667,...,5.150987618241528]]
(%i5) wxplot2d([discrete,solnum[1],solnum[2]])$
(%t5) << Graphics >>
```

Como esta ecuación es exactamente resoluble podemos comparar sus gráficas. Para ello primero usamos `ode2` e `ice1` para resolver analíticamente el PVI:

```
(%i6) ode2('diff(w,x)=1+w,w,x)$
      sol:expand(%);
      expand(ice1(sol,x=0,w=1));
      define(solw(x),second(%));
(%o7) w=%c*e^-x-1
(%o8) w=2*e^-x-1
(%o9) solw(x):=2*e^-x-1
```

Y ahora dibujamos ambas gráficas

```
(%i10) wxplot2d([discrete,solnum[1],solnum[2],solw(x)],[x,0,1])$
(%t10) << Graphics >>
```

Aparte del comando anterior existe un comando alternativo para resolver numéricamente una ecuación diferencial pero que además es aplicable a sistemas de ecuaciones de primer orden. Se trata de comando `rk` del paquete `dynamics` que no es más que otra implementación de un método de Runge-Kutta. Su sintaxis, para el caso del PVI $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ es la siguiente

$$\text{rk}(f, y, y_0, [x, x_0, x_1, h])$$

donde f es la función $f(x, y)$ de la ecuación $y' = f(x, y)$, x_0 y x_1 los valores inicial, x_0 , y final, x_1 , de la variable independiente, respectivamente, h es la longitud de los subintervalos e y_0 es el valor inicial y_0 que toma y en x_0 . El resultado es una lista con los pares $[x, y]$ de las abscisas x y las ordenadas y .

Así tenemos la secuencia de órdenes

```
(%i15) load(dynamics)$
(%i16) h:1/20;kill(x,y);
      numsolrk:rk(x-sin(y),y,1,[x,0,1,h])$
(%o16) 1/20
(%o17) done
(%i19) numsolrk;
(%o19) [[0,1],[0.05,0.95973997169251],[0.1,0.92308155305544],...
      [0.95,0.77210758398484],[1.0,0.78573816934072]]
```

La salida de `rk` es justo una lista que entiende perfectamente el comando `plot2d` por lo que podemos dibujar la solución y comparar ambas salidas numéricas.

```
(%i20) wxplot2d([discrete,numsolrk],
      [xlabel,"x"],[ylabel,"y"],[color,blue])$
```

Bibliografía

1. R. Álvarez-Nodarse. Introducción al MAXIMA CAS con algunas aplicaciones. Versión online: <http://euler.us.es/~renato/clases/maxima/manualcurso/intro-maxima.pdf>
2. R. Álvarez-Nodarse. Ampliación de Análisis Matemático: Ecuaciones diferenciales ordinarias. <http://euler.us.es/~renato/clases/aam/files/edo-clases-2010.pdf>