# Infinitésimos equivalentes

**Definición.** Dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se denominan equivalentes si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, y se escribe $a_n \sim b_n$.

Por ejemplo, la sucesión $n!$ es equivalente a la sucesión $\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$.

**Definición.** Una sucesión $\{a_n\}$ se denomina infinitesimal si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se denominan infinitésimos equivalentes y se escribe $a_n \sim b_n$ si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

**Teorema.** Si $\{a_n\}$ es una sucesión infinitesimal, entonces:

1. $\operatorname{sen} a_n \sim a_n$.
2. $\tan a_n \sim a_n$.
3. $\operatorname{arc\,sen} a_n \sim a_n$.
4. $\arctan a_n \sim a_n$.
5. $1 - \cos a_n \sim \dfrac{a_n^2}{2}$.
6. $(1 + a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, a_n$.
7. $e^{a_n} - 1 \sim a_n, \qquad b^{a_n} - 1 \sim a_n \ln b$ .
8. $\ln(1 + a_n) \sim a_n, \qquad \log_b(1 + a_n) \sim a_n \log_b e$ .

**Definición.** Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan equivalentes en $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando $x$ tiende a $a$.

**Definición.** Una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ se denomina infinitesimal en $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es infinitesimal en $x = 0$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x-2)$ es infinitesimal en $x = 2$.

**Definición.** Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan infinitésimos equivalentes en $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando $x$ tiende a $a$.

**Definición** (o pequeña). Dados dos funciones $f$ y $g$ infinitesimales en cierto $x = a$, diremos que $g(x)$ es un infinitésimo de orden mayor que $f(x)$ en $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ y se escribe $g(x) = o(f(x))$ cuando $x$ tiende a $a$.

Por ejemplo, la función $x^2$ es un infinitésimo de mayor orden que $x$ en $x = 0$, es decir $x^2 = o(x)$, y la función $x^3$ es un infinitésimo de mayor orden que $x^{3/2}$ en $x = 0$, o sea, $x^3 = o(x^{3/2})$. Además se tiene que:

1. Para todo $m \in \mathbb{R}$, $m \cdot o(x) = o(x)$,
2. La suma de un número finito infinitésimos equivalentes es un infinitésimo,

3. El producto de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo de orden superior.

**Teorema.** Si $x$ tiende a 0, entonces:

1. $\operatorname{sen} x \sim x$.
2. $\tan x \sim x$.
3. $\operatorname{arc\,sen} x \sim x$.
4. $\arctan x \sim x$.
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.
6. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha\, x$.
7. $e^x - 1 \sim x, \qquad b^x - 1 \sim x \ln b$ .
8. $\ln(1+x) \sim x, \qquad \log_b(1+x) \sim x \log_b e$ .

Utilizando esta notación los infinitésimos del teorema anterior se podrán reescribir de la forma:

1. $\operatorname{sen} x = x + o(x)$.
2. $\tan x = x + o(x)$.
3. $\operatorname{arc\,sen} x = x + o(x)$.
4. $\arctan x = x + o(x)$.
5. $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
6. $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha\, x + o(x)$.
7. $b^x - 1 = x \ln b + o(x)$ .
8. $\log_b(1+x) = x \log_b e + o(x)$ .

**Definición** (O grande). Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan comparable o del mismo orden en $x = a$ si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, donde $l \neq 0$, $|l| < \infty$ y se escribe $f(x) = O(g(x))$ o $g(x) = O(f(x))$ cuando $x$ tiende a $a$.