

Apellidos, Nombre: _____

CÁLCULO INFINITESIMAL, GRUPO D, junio 2014
GRADO EN MATEMÁTICAS. 1er CURSO. Examen Final

IMPORTANTE: Entregar las soluciones en el mismo folio del examen

1. Enuncia y demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

1. Teorema de Bolzano para las funciones continuas.
2. Regla de Barrow.

2. Decide si las siguientes afirmaciones son VERDADERAS o FALSAS. **Justifique su respuesta**, ya sea probándola o dando un contraejemplo.

1. Sea f una función definida en (a, b) tal que $f(c) > 0$ $c \in (a, b)$. Entonces existe un entorno de c tal que $f(x) > 0$ en dicho entorno.

2. Toda sucesión monótona es convergente.

3. Para que una función derivable tenga un punto de inflexión en $x = a$ es necesario y suficiente que $f''(a) = 0$.

4. Para que una sucesión acotada sea convergente es necesario y suficiente que el límite superior coincida con el límite inferior.

5. Si z es un número complejo, se cumple que $\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1$.

Ejercicio 1. Se considera la sucesión definida recurrentemente $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n}$, $n \geq 0$. 1. Demuestra que $(x_n)_n$ está acotada.

2. Demuestra que la sucesión $(x_n)_n$ es creciente.

3. Probar que $(x_n)_n$ tiene límite. Calcularlo razonadamente.

Ejercicio 2.

Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} \exp(2/x), & x < 0 \\ \frac{3x}{x^2 + 3x + 2}, & x \geq 0 \end{cases}$.

(a) Escribe el mayor subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ donde esté definida f . $A = \dots\dots\dots$

(b) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en dicho conjunto A .

f es continua en: $\dots\dots\dots$ y no lo es en $\dots\dots\dots$

f es derivable en: $\dots\dots\dots$ y no lo es en $\dots\dots\dots$

y su derivada es:

(b) Encuentra sus asíntotas:

$\dots\dots\dots$

regiones de crecimiento y decrecimiento:

$\dots\dots\dots$

extremos relativos si los tiene:

$\dots\dots\dots$

y haga un esbozo de su gráfica.

(c) ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos (globales) en el intervalo abierto $(0, 3)$? Justifica tu respuesta. ¿Y en $[-1, 3]$? En caso de que los alcance ¿en qué puntos?

Ejercicio 3.

a) Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x}$$

b) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $y = \sqrt{9 - 4x^2}$ y el eje de coordenadas entre $x = 0$ y $x = 3/2$.

Ejercicio 4.

- a) Estudiar, según los valores de $a > 0$, la convergencia o divergencia de las siguientes series de números reales :

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^a}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} n^{-a}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$$

- b) Sumar si es posible la siguiente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$