Examen de Cálculo infinitesimal. 4-2-2013.

PROBLEMAS

1. Calcular el límite de la sucesión definida por

$$\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{a^{n+1}}$$

donde $a>1$.

Solución.

Sea $x_n=1+a+a^2+\cdots+a^n$, $y_n=a^{n+1}$. Es claro que $y_n\to+\infty$ de manera estrictamente creciente pues $a>1$. Aplicamos el criterio de Stolz y

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1}-(1+a+a^2+\cdots+a^n)}{a^{n+2}-a^{n+1}}=$$

$$\frac{a^{n+1}}{a^{n+2}-a^{n+1}}=\frac{1}{a-1}\to\frac{1}{a-1}.$$

Luego

$$\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{a^{n+1}}\to\frac{1}{a-1}.$$

Otra forma de resolver este problema es tener en cuenta que x_n es la suma de una progresión geométrica de razón $a>1$ y por inducción podemos calcular su suma,

$$\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{a^{n+1}}=\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{a^{n+1}}=\frac{1}{a-1}\frac{a^{n+1}-1}{a^{n+1}}\to\frac{1}{a-1}.$$

2. Sea $a>0$. Se define $a_1=a$ y $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$.

a) Demostrar que a_n está bien definida.

b) Demostrar que a_n es acotada y convergente a 1. (Indicación: separar el caso $a>1$, $a=1$ o $a<1$)

c) Calcular

$$\lim a_n^{\frac{1}{(a_n-1)^2}}.$$

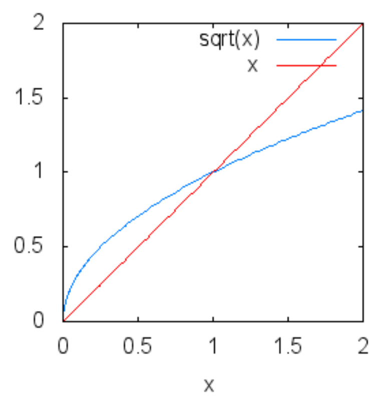
Solución.

a) Para probar que a_n está bien definida, basta probar que $a_n>0$ para $n\in\mathbb{N}$ (al involucrar una raíz cuadrada). Esto lo probaremos por inducción. Para

$n = 1$, es cierto por hipótesis ya que partimos de $a_1 > 0$. Supongamos ahora que tenemos definido el término $a_n > 0$. Es obvio que $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ está bien definido al ser $a_n > 0$. Por el Principio de inducción hemos probado que a_n está bien definida.

b) Calculemos los posibles límites. Si a_n es convergente a $L \in \mathbb{R}$, entonces $a_{n+1} \to L$ y sería $L = \sqrt{L}$, que implica $L^2 = L$. Esto nos dice que $L = 0$ o bien $L = 1$.

Para probar que a_n es acotada y converge a 1, observamos que $\sqrt{x} > x$ si $x < 1$ y $\sqrt{x} < x$ si $x > 1$ como muestra la gráfica.



Si $a = 1$, es obvio que $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $a_n \to 1$.

Sea ahora $0 < a < 1$. Probaremos por inducción que $a_n < 1$ para $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, es cierto por hipótesis ya que partimos de $a_1 = a \in (0, 1)$. Supongamos ahora que se tiene $a_n < 1$. Es claro que $\sqrt{a_n} < 1$ y, por tanto, $a_{n+1} < 1$. Usando el Principio de inducción hemos probado que $a_n < 1$ para $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que a_n es una sucesión acotada superiormente.

Vamos a probar ahora que a_n es monótona creciente; es decir, $a_{n+1} > a_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Esta última desigualdad es cierta debido a que $\sqrt{a_n} > a_n$, para $a_n \in (0, 1)$.

Una vez que a_n es creciente y acotada, sabemos que es convergente a $L \in \mathbb{R}$. Como $a_n < 1$ y a_n crece, debe ser $L = 1$.

Queda el caso $a > 1$ (repetiremos el argumento anterior para $a < 1$). Probaremos por inducción que $a_n > 1$ para $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, es cierto por hipótesis ya que partimos de $a_1 = a > 1$. Supongamos ahora que se tiene $a_n > 1$. Es claro que $\sqrt{a_n} > 1$ y, por tanto, $a_{n+1} > 1$. Usando el Principio de inducción hemos probado que $a_n > 1$ para $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que a_n es una sucesión acotada inferiormente.

Vamos a probar ahora que a_n es monótona decreciente; es decir, $a_{n+1} < a_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Esta última desigualdad es cierta debido a que $\sqrt{a_n} < a_n$, para $a_n > 1$.

Una vez que a_n es decreciente y acotada, sabemos que es convergente a $L \in \mathbb{R}$. Como $a_n > 1$, debe ser $L = 1$.

Una manera alternativa de probar la convergencia a 1 en el caso $a > 1$, es considerar la sucesión $b_n = 1/a_n$. Esto reduce el caso $a > 1$ a el anterior de $b_1 = 1/a < 1$.

Otra forma de haber resuelto este problema es probar por inducción que

$$a_n = a^{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

con lo que $a_n \to a^0 = 1$.

b) Para estudiar

$$\lim a_n^{\frac{1}{(a_n-1)^2}},$$

usamos que es una indeterminación del tipo 1^∞. Por ello, si $a < 1$

$$\lim \frac{a_n - 1}{(a_n - 1)^2} = \lim \frac{1}{(a_n - 1)} = -\infty.$$

$$\lim a_n^{\frac{1}{(a_n-1)^2}} = e^{-\infty} = 0.$$

Si $a > 1$

$$\lim \frac{a_n - 1}{(a_n - 1)^2} = \lim \frac{1}{(a_n - 1)} = +\infty.$$

$$\lim a_n^{\frac{1}{(a_n-1)^2}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Para $a = 1$, no tiene sentido.

3. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x|\log x|, & x > 0; \\ e^{1/x}, & x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Justifica que el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

b) Estudia la continuidad y derivabilidad de f.

c) Calcula los límites en el infinito de f.

d) Estudia el crecimiento y extremos de f.

e) Estudia la concavidad y convexidad de f.

Solución.

a) Para $x > 0$, $f(x) = x|\log x|$ está bien definida pues es un polinomio multiplicado por el valor absoluto de un logaritmo de $x > 0$. Para $x < 0$, $f(x) = e^{1/x}$

que no tiene problemas de definición al ser una exponencial (cuyo dominio es $\mathbb{R}$) compuesta con $1/x$. También $f(0) = 0$, con lo que el dominio es toda la recta real.

b) En $(-\infty, 0)$ (intervalo abierto), la función vale $f(x) = e^{1/x}$, que es una exponencial (continua y derivable en $\mathbb{R}$) compuesta con $1/x$ (continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). Por tanto, f es continua y derivable en $(-\infty, 0)$ y

$$f'(x) = \frac{-e^{1/x}}{x^2}.$$

En $(0, +\infty)$ (intervalo abierto), $f(x) = x|\log x|$ es continua pues es un polinomio multiplicado por el valor absoluto de un logaritmo de $x > 0$. Para estudiar la derivabilidad, encontramos un posible problema en el valor absoluto. Escribimos f como

$$f(x) = \begin{cases} x \log x, & \text{si} \quad \log x \geq 0; \\ -x \log x, & \text{si} \quad \log x < 0. \end{cases} = \begin{cases} x \log x, & \text{si} \quad x \geq 1; \\ -x \log x, & \text{si} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Esto quiere decir que f es derivable en los intervalos abiertos $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$ y

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \log x, & \text{si} \quad x > 1; \\ -1 - \log x, & \text{si} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad en 1, al tener f' fórmulas distintas a derecha e izquierda,

$$f'_+(1) \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 + \log x) = 1 \neq \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (-1 - \log x) = -1 = f'_-(1).$$

Esto prueba que f no es derivable en 1.

Para estudiar la continuidad en 0, tenemos que calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$. Al tener f definiciones distintas a la izquierda y a la derecha de 0, calculamos los límites laterales.

Como para $x > 0$, $f(x) = x|\log x|$, usando que $\log x < 0$ en $(0, 1)$ y aplicando la Regla de L'Hopital,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x|\log x| = \lim_{x \to 0^+} (-x \log x) = \lim_{x \to 0^+} -\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1/x}{-1/x^2} = 0 = f(0),$$

lo que implica la continuidad a la derecha de 0.

Para $x < 0$, $f(x) = e^{1/x}$, y

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0 = f(0).$$

Esto quiere decir que f es continua en 0. Para estudiar la derivabilidad en 0,

$$f'_+(0) \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (-1 - \log x) = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^{1/x}}{x^2} = 0 = f'_-(0).$$

f no es derivable en 0.

c)

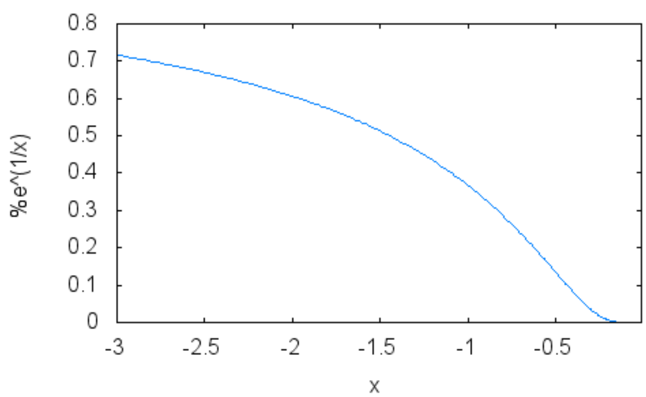
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x|\log x| = (+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

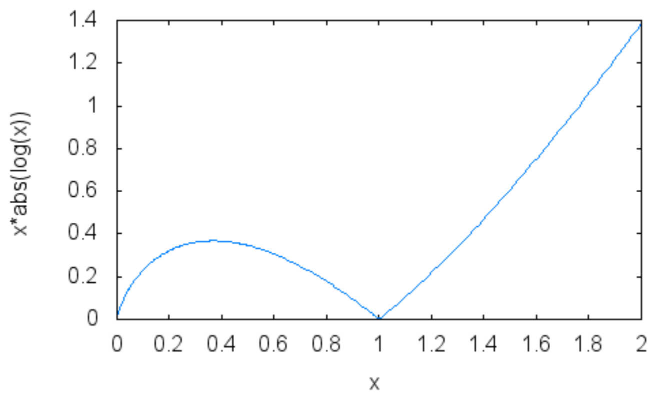
d) Para estudiar el crecimiento y extremos de f, recapitulamos los valores de f' donde existe:

$$f'(x) = \begin{cases} 1+\log x, & x>1; \\ -1-\log x, & 0<x<1; \\ \frac{-e^{1/x}}{x^2}, & x<0. \end{cases}$$

Esto nos dice que $f'(x) = \frac{-e^{1/x}}{x^2} < 0$ en $(-\infty, 0)$, con lo que f es decreciente.



Para $x > 1$, $f'(x) = 1 + \log x > 0$, y f es creciente, ya que $\log x > 0$. Para $0 < x < 1$, $f'(x) = -1 - \log x$. Para estudiar su signo, observamos que $f'(x) = 0$ si y solo si $\log x = -1$, es decir, $x = 1/e$. f' es decreciente, con lo que para $0 < x < 1/e$, $f'(x) > 0$; y para $1/e < x < 1$, $f'(x) < 0$. Luego si $0 < x < 1/e$, f es creciente; y para $1/e < x < 1$, f es decreciente. En $x = 1/e$, f tiene un máximo no absoluto pues $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, y f tomará valores mayores que cualquier



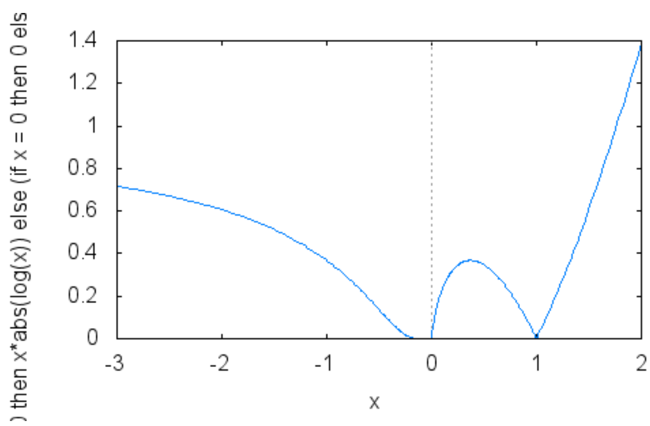
número real.

Para los puntos donde f no es derivable, que son $x = 0$ y $x = 1$, $f(0) = f(1) = 0$; mientras que $f \geq 0$, con lo que son mínimos absolutos.

e) Para estudiar la concavidad y convexidad de f, calculamos la derivada segunda.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1; \\ \frac{-1}{x}, & 0 < x < 1; \\ \frac{(1+2x)e^{1/x}}{x^4}, & x < 0. \end{cases}$$

Con ello concluimos que f es convexa para $0 < x < 1$ ($f'' < 0$). f es cóncava para $x > 1$ ($f'' > 0$). En $x = -1/2$ tiene un punto de inflexión; si $x < -1/2$ es convexa ($f'' < 0$) y si $-1/2 < x < 0$, f, es cóncava ($f'' > 0$). Recordad que la terminología sobre cóncava y convexa depende de los autores.



4. Demostrar que si $x \in [-\pi, \pi]$, $x \neq 0$,

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Deducir que la desigualdad es cierta en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Solución.

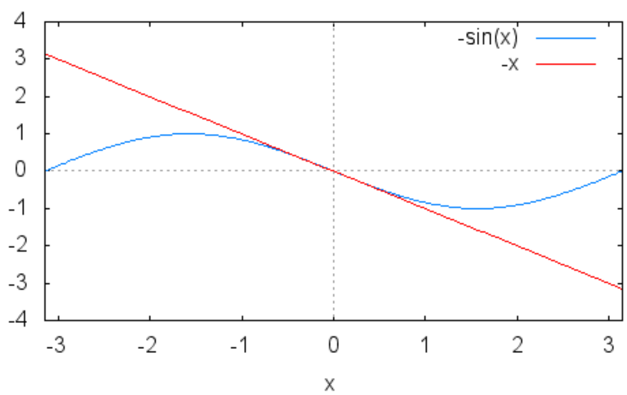
Sea $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Ambas funciones son continuas y derivables en $\mathbb{R}$. Coinciden en el punto 0 ya que $f(0) = g(0) = 1$. Calculamos ahora las derivadas de f y g:

$$f'(x) = -\sin x \qquad\qquad g'(x) = -x.$$

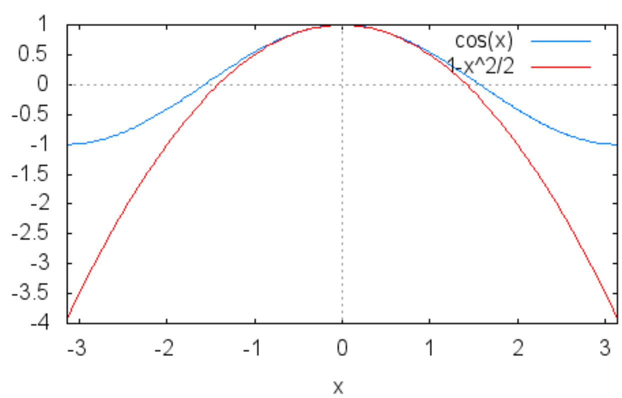
Tampoco es inmediato comparar f' y g'. Pero son de nuevo funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$ que coinciden en el punto 0 ya que $f'(0) = g'(0) = 0$. Aplicamos el mismo razonamiento y derivamos de nuevo:

$$f''(x) = -\cos x \qquad\qquad g''(x) = -1.$$

Ahora sí es claro que $f''(x) > g''(x)$ en $(0, \pi)$ (derecha de 0). Luego $f'(x) > g'(x)$ en $(0, \pi)$.

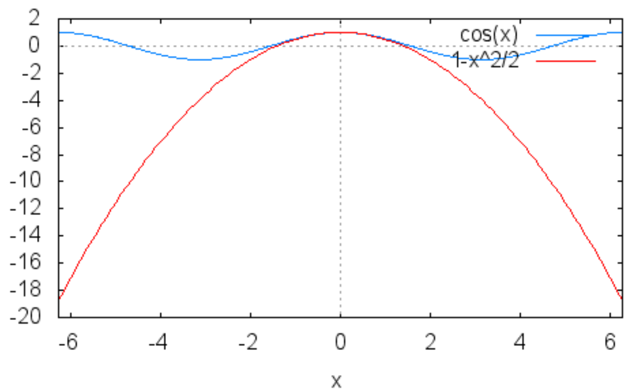


Aplicando el mismo razonamiento a la derecha de 0, obtenemos que $f(x) > g(x)$ en $(0, \pi]$.



A la izquierda de 0, en $(-\pi, 0)$, $f''(x) > g''(x)$ con lo que $f'(x) < g'(x)$ en este intervalo. Seguimos el mismo razonamiento y $f(x) > g(x)$ en $[-\pi, 0)$. Este paso se hubiera ahorrado observando que las funciones implicadas son pares y basta probar la desigualdad a la derecha de 0.

Para deducir que la desigualdad es cierta en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(\pi) = \cos(\pi) = -1$, el punto más bajo de la función. Como g es decreciente, queda siempre por debajo de f en $(0, +\infty)$. El mismo raonamiento, o la paridad de f, prueban la desigualdad en $(-\infty, 0)$



5. Estudiar los extremos de $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$ en $[-2, 2]$.

Solución. $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$ es una función continua (producto del valor absoluto y exponencial compuesta con valor absoluto de $x - 1$). Como el dominio es un intervalo cerrado y acotado, f alcanzará máximos y mínimos absolutos en virtud del Teorema de Weierstrass. Eliminamos los valores absolutos teniendo en cuenta que cambian de signo donde se anulan estos valores absolutos:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-|x-1|}, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2; \\ -xe^{-|x-1|}, & \text{si} \quad -2 \leq x < 0. \end{cases} = \begin{cases} xe^{1-x}, & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2; \\ xe^{x-1}, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1; \\ -xe^{x-1}, & \text{si} \quad 2 \leq x < 0. \end{cases}$$

En los intervalos abiertos donde f tiene una definición, se deriva según las fórmulas habituales.

$$f'(x) = \begin{cases} (1-x)\, e^{1-x}, & \text{si} \quad 1 < x < 2; \\ (x+1)\, e^{x-1}, & \text{si} \quad 0 < x < 1; \\ (-x-1)\, e^{x-1}, & \text{si} \quad 2 < x < 0. \end{cases}$$

Tenemos que $f'(x) = 0$ solo para $x = -1$. En $x = 1$ no será derivable ya que $f'_+(1) = 0$ y $f'_-(1) = 2$. En $x = 0$ tampoco será derivable ya que $f'_+(0) = e^{-1}$ y $f'_-(0) = -e^{-1}$. Los puntos que son posibles extremos son entonces los extremos del intervalo, es decir, -2 y 2; junto con -1, 0 y 1.

En $(-2, -1)$, $f' > 0$, y f es creciente, con lo que -2 es mínimo. En $(-1, 0)$, $f' < 0$, y f es decreciente. Como a la izquierda de -1 la función crece y a su derecha decrece, -1 es máximo. Para el intervalo $(0, 1)$, $f' > 0$ y f es creciente con lo que 0 es mínimo. Como $f(0) = 0$ y $f \geq 0$, será mínimo absoluto. Para el intervalo $(1, 2)$, $f' < 0$ y f es decreciente con lo que 1 es máximo. Igualmente, al decrecer f en $(1, 2)$, 2 es mínimo.

Para estudiar si estos extremos son absolutos o relativos, vemos los valores de f en los extremos. En los mínimos, $f(-2) = 2/e^3$; y $f(2) = 2/e$. Como $f(0) = 0$, -2 y 2 son mínimos relativos no absolutos. En los máximos, $f(-1) = e^{-2}$ y $f(1) = 1 > e^{-2}$, con lo que -1 es máximo relativo y 1 es máximo absoluto (existe por el Teorema de Weierstrass y es el único candidato).