Examen de Cálculo infinitesimal. 11-1-2013. Grupo D.

PROBLEMAS

1. Estudia la continuidad en $(-1,1)$ de la función

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3x-\log(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}}, & \text{si } x\in(-1,0);\\ x+a, & \text{si } x\in[0,1).\end{cases}$$

Solución. En $(0,1)$ (intervalo abierto), la función vale $f(x)=x+a$, que es un polinomio y, por tanto, continua en este intervalo.

En $(-1,0)$ (intervalo abierto), $f(x)=\dfrac{3x-\log(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}}$. El numerador es la diferencia de un polinomio (cuyo dominio es $\mathbb{R}$) y un logaritmo compuesto con $1+x$ (cuyo dominio es $\{x\in\mathbb{R}:1+x>0\}=(-1,+\infty)$). Esto implica que $3x-\log(1+x)$ es continua en $(-1,0)$. Sea $g(x)=\sqrt{1-\cos x}$. Como el dominio de la raíz cuadrada es $[0,+\infty)$, y $\cos x\le 1$, g es continua en $\mathbb{R}$. Pero al ser g un denominador, hemos de asegurarnos que no se anula. Pero g se anula cuando $\cos x=1$, que ocurre en $\{n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$ que no intersecta a $(-1,0)$ pues $-\pi<-1$. Estos hechos no llevan a que f es continua en $(-1,0)$.

Para estudiar la continuidad en 0, tenemos que calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$. Al tener f definiciones distintas a la izquierda y a la derecha de 0, calculamos los límites laterales. Como para $x>0$, $f(x)=x+a$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+a)=a=f(0),$$

lo que implica la continuidad a la derecha de 0. Para $x<0$, $f(x)=\dfrac{3x-\log(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}}$, y

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x-\log(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}}$$

que es una indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Pero $1-\cos x$ es un infinitésimo equivalente a $\dfrac{x^2}{2}$ cuando $x\to 0$. Usando este hecho,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1-\cos x}}\,\frac{3x-\log(1+x)}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}}\,\frac{3x-\log(1+x)}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}.$$

El primer factor tiende a 1 y usando que $\sqrt{x^2}=|x|=-x$, para $x<0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x-\log(1+x)}{\frac{-x}{\sqrt{2}}}=\lim_{x\to 0^-})(-\sqrt{2})\frac{3x-\log(1+x)}{x}.$$

Ahora usamos que $\log(1+x)$ es un infinitésimo equivalente a x cuando $x\to 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-\sqrt{2})\left(3-\frac{\log(1+x)}{x}\right)=(-\sqrt{2})(3-1)=-2\sqrt{2}.$$

Esto quiere decir que f es continua en 0 si y sólo si $a=-2\sqrt{2}$.

2. Calcular el límite de la sucesión definida por

$$\frac{1 + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!}{(n+1)!}.$$

Solución.

Sea $x_n = 1+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!$, $y_n = (n+1)!$. Es claro que $y_n \to +\infty$ de manera estrictamente creciente. Aplicamos el criterio de Stolz y

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{1 + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! + (n+1)(n+1)! - (1 + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!)}{(n+2)! - (n+1)!} =$$

$$\frac{(n+1)(n+1)!}{(n+2)(n+1)! - (n+1)!} = \frac{(n+1)(n+1)!}{(n+1)!(n+2-1)} = \frac{(n+1)}{(n+1)} \to 1.$$

Luego

$$\frac{1 + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!}{(n+1)!} \to 1.$$

3. Sea la sucesión definida por recurrencia mediante $0 < x_1 < 1$ y $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$, para $n \in \mathbb{N}$.

a) Demostrar que $0 < x_n < 1$, que es monótona y que converge a 0.

b) Demostrar que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to \dfrac{1}{2}$.

Solución.

a) En primer lugar probaremos por inducción que x_n está bien definida y que $0 < x_n < 1$ para $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, es cierto por hipótesis ya que partimos de $x_1 \in (0, 1)$.

Supongamos ahora que tenemos definido el término x_n y que se tiene $0 < x_n < 1$. Es claro que $0 < 1 - x_n < 1$, lo que permite definir $\sqrt{1 - x_n}$ y, por tanto, x_{n+1}. Como $0 < 1 - x_n < 1$, tenemos que $0 < \sqrt{1 - x_n} < 1$ y también $0 < 1 - \sqrt{1 - x_n} < 1$, es decir, $0 < x_{n+1} < 1$. Nótese que hemos usado varias veces que $0 < x < 1$ equivale a que $0 < 1 - x < 1$. Usando el Principio de inducción hemos probado que x_n está bien definida y que $0 < x_n < 1$ para $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que x_n es una sucesión acotada.

Vamos a probar ahora que x_n es monótona. Realmente, si el enunciado nos dice que la sucesiónconverge a 0, debe ser decreciente. Luego vamos a probar que $x_{n+1} < x_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $1 - \sqrt{1 - x_n} < x_n$. O lo que es lo mismo, $1 - x_n < \sqrt{1 - x_n}$. Esto es cierto ya que para $t \in (0, 1)$, $\sqrt{t} < t$. Otra altervativa de ver esto es elevar al cuadrado la desigualdad y obtenemos que equivale a probar $(1 - x_n)^2 < 1 - x_n$. Esta última desigualdad es cierta debido a que $(1 - x_n)^2 = (1 - x_n)(1 - x_n) < 1 - x_n$.

Una vez que x_n es decreciente y acotada, sabemos que es convergente a $L \in \mathbb{R}$. Luego $x_{n+1} \to L$ y sería $L = 1 - \sqrt{1 - L}$, que implica $(1 - L)^2 = 1 - L$. Esto nos dice que $L = 0$ o bien $L = 1$. como $x_1 < 1$ y x_n decrece, debe ser $L = 0$.

b)Para probar que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to \dfrac{1}{2}$, usamos la fórmula de recurrencia.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - \sqrt{1 - x_n}}{x_n} = \frac{(1 - \sqrt{1 - x_n})(1 + \sqrt{1 - x_n})}{x_n(1 + \sqrt{1 - x_n})} =$$

$$\frac{1 - (1 - x_n)}{x_n(1 + \sqrt{1 - x_n})} = \frac{x_n}{x_n(1 + \sqrt{1 - x_n})} = \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - x_n})} \to \frac{1}{2},$$

ya que $x_n \to 0$.