Tema 13

El número complejo.

13.1. Introducción.

13.1.1. Un poco de historia

La primera referencia conocida a raíces cuadradas de números negativos proviene del trabajo de matemáticos griegos, como Herón de Alejandría en el siglo I A.C., como resultado de una imposible sección de una pirámide. Los complejos se hicieron más patentes en el siglo XVI, cuando la búsqueda de fórmulas que dieran las raíces exactas de polinomios de grados 2 y 3 fueron encontrados por matemáticos italianos como Tartaglia o Cardano.

En 1545 Cardano se planteó el siguiente problema: dado un segmento de longitud 10 unidades, dividirlo en dos partes de forma que el rectángulo que se forma tenga un área de 40 unidades cuadradas. Para resolverlo, Cardano operó formalmente: Sea x la longitud de una división y $10 - x$ la de la otra. Entonces,

$$(10-x)x = 40 \Rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 + \sqrt{-15}\,,\; x_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

Además, formalmente verificó la solución:

$$A = (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40.$$

Es decir que la solución venía dada por una raíz cuadrada de un número negativo. Tales soluciones se denominaron *imposibles* o *imaginarias*. Fue Euler el primero en introducir la notación $\sqrt{-1} = i$.

13.1.2. Definiciones y primeras propiedades

Definición 13.1.1. *Un* número complejo *es un par ordenado de números reales, es decir, un elemento de* $\mathbb{R}^2$*. Sobre este conjunto de números, establecemos dos operaciones. La* suma*, que es la habitual* $(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$*; y el* producto*, que tiene una forma peculiar* $(a,b)\cdot(a',b')=(aa'-bb',ab'+ba')$*.*

Denotaremos por $\mathbb{C}$ *al conjunto de números complejos dotados con las operaciones anteriores.*

Proposición 13.1.2. $\mathbb{C}$ *tiene estructura de* cuerpo*, es decir, se cumplen las siguientes propiedades:*

- *Asociativas: para cada* $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{C}$ *se tiene que*
  - $(a,b)+[(c,d)+(e,f)]=[(a,b)+(c,d)]+(e,f)$
  - $(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]=[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)$
- *Conmutativas: para cada* $(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$ *se tiene que*
  - $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$
  - $(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$
- *Elementos neutros:*
  - *existe un elemento* $(0,0)\in\mathbb{C}$ *tal que para cada* $(a,b)\in\mathbb{C}$*, se tiene que* $(a,b)+(0,0)=(a,b)$*.*
  - *existe un elemento* $(1,0)\in\mathbb{C}$ *tal que para cada* $(a,b)\in\mathbb{C}$*, se tiene que* $(a,b)\cdot(1,0)=(a,b)$*.*
- *Elementos simétricos:*
  - *para cada* $(a,b)\in\mathbb{C}$*, existe* $(-a,-b)\in\mathbb{C}$ *tal que* $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$*.*
  - *Si* $(a,b)\neq(0,0)$*, existe* $(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\in\mathbb{C}$*, tal que* $(a,b)\cdot(a,b)^{-1}=(1,0)$*.*
- *Distributiva: para cada* $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{C}$*, se tiene que* $(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$

Nota 13.1.3. *Con la definición anterior, el conjunto* $\mathbb{R}\times 0=\{(a,0)\,:\,a\in\mathbb{R}\}$*, es identificable con el conjunto* $\mathbb{R}$ *de los números reales, pues podemos establecer una biyección*

$a \in \mathbb{R} \leftrightarrow (a,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$, *que es un isomorfismo del cuerpo* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R} \times \{0\}$ *que es un subcuerpo de* $\mathbb{C}$*; de esta forma, se puede entender que* $\mathbb{C}$ *es una ampliación de* $\mathbb{R}$.

Más aún, las operaciones suma y producto de números complejos extienden, con la identificación anterior, a la de los números reales.

Definición 13.1.4. *Llamaremos* unidad imaginaria *al número complejo* $i = (0,1)$.

Nota 13.1.5. *Evidentemente se verifica la relación* $i^2 = -1$, *pues* $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0, 0 \cdot 1) = (-1,0) = -1$, *por lo tanto, podemos entender que* $i = \sqrt{-1}$.

13.1.3. Orden en $\mathbb{C}$.

Definición 13.1.6. *Un conjunto cualquiera* A *se dice que es un* conjunto ordenado *si existe una* relación de orden $\leq$ *que cumple los siguientes propiedades:*

(*1*) *Reflexiva:* $\forall a \in A$, *se tiene que* $a \leq a$.

(*2*) *Antisimétrica:* $\forall a, b \in A$, *si* $a \leq b$ *y* $b \leq a$, *entonces* $a = b$.

(*3*) *Transitiva:* $\forall a, b, c \in A$, *si* $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces* $a \leq c$.

(*4*) *Total:* $\forall a, b \in A$, *o bien* $a \leq b$ *o bien* $b \leq a$.

Si, además, A *tiene estructura de* cuerpo, *la relación de orden* $\leq$ *debe ser* compatible con las dos operaciones $(+)$ *y* $(\cdot)$ *que definen a* A *como cuerpo, es decir, se deben cumplir los dos siguientes axiomas:*

(*5*) *Compatibilidad con* $(+)$*:* $\forall a, b, c \in A$, *si* $a \leq b$, *entonces* $a + c \leq b + c$.

(*6*) *Compatibilidad con* $(\cdot)$*:* $\forall a, b \in A$, *si* $0 \leq a$ *y* $0 \leq b$, *entonces* $0 \leq a \cdot b$, *(donde* 0 *es el elemento neutro de la operación* $+$*).*

Teorema 13.1.7. $\mathbb{C}$ *no es un cuerpo ordenado.*

13.1.4. Forma binómica y operaciones elementales.

Definición 13.1.8. *Se llama* forma binómica *de un número complejo a*

$$z = (a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi,$$

donde a *es la* parte real *de* z, *y se escribe* $a = \Re(z)$, *y* b *es la* parte imaginaria *de* z *y se escribe* $b = \Im(z)$.

El número z *es* real *cuando* $\Im(z) = 0$*; por contra, si* $\Re(z) = 0$ *se dice que* z *es* imaginario puro.

Nota 13.1.9. *Escritos los complejos de esta forma, y teniendo en cuenta que* $i^2 = -1$*, es muy sencillo reescribir las operaciones elementales.*

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ *y* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *dos números complejos cualesquiera. Entonces:*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

mientras que teniendo en cuenta que $i^2 = -1$ *y agrupando partes reales e imaginarias se obtiene que*

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \ = \ (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i.$$

Definición 13.1.10. *Dado un número complejo* $z = a + bi$*, se llama complejo* conjugado *de* z*, y se denota por* $\overline{z}$*, al complejo* $\overline{z} = a - bi$*.*

Proposición 13.1.11. *Sean* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *entonces*

(*1*) $\overline{\overline{z}} = z$.

(*2*) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(*3*) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

(*4*) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$.

(*5*) $\Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$.

(*6*) $\Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2}$.

(*7*) $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = z$.

Nota 13.1.12. *Como* $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$*, podemos efectuar fácilmente el cociente entre números complejos de la siguiente forma*

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{1}{a^2 + b^2}\, w \cdot \overline{z}.$$

13.1.5. Módulo, argumento y forma polar.

Definición 13.1.13. *Sea* $z = a + ib$ *un número complejo cualquiera. Se llama* módulo *de* z *al número real positivo*

$$r = \mid z \mid = \ +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Proposición 13.1.14. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

(*1*) $|z| \geq 0$ *para cada* $z \in \mathbb{C}$.

(*2*) $|z| = 0$ *si y sólo si* $z = 0$.

(*3*) $|z| = z \cdot \overline{z}$.

(*4*) $|z| = |\overline{z}|$.

(*5*) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(*6*) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Definición 13.1.15. *Dado un número complejo no nulo $z = a + bi$, se llama* argumento principal *de z al único número real* $\arg_p(z) := \theta \in (-\pi, \pi]$ *tal que*

$$\cos\theta = \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{\Re(z)}{|z|}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\Im(z)}{|z|}.$$

Se llama argumento *de z a cada uno de los ángulos* $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ *con $k \in \mathbb{Z}$.*

Lema 13.1.16. *Si $z \neq 0$, llamando $r = |z|$ y $\theta = \arg z$, se verifica que:*

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

Definición 13.1.17. *El lema anterior sugiere expresar un número complejo en función de su módulo y argumento. Para mayor brevedad, escribiremos $z = r_\theta$.*

La expresión $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, se llama forma trigonométrica*, mientras que la abreviada $z = \rho_\theta$ suele conocerse como* forma módulo–argumental*. En conjunto, ambas se conocen como* forma polar *de z.*

Nota 13.1.18. *Al expresar los números complejos en forma módulo–argumental, se cumple que si $z = r_\theta$ y $w = s_\alpha$, entonces $z = w$ si y sólo si $r = s$ y $\theta - \alpha = 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.*

Proposición 13.1.19. *Sean $z = r_\theta$ y $w = s_\alpha$. Se cumple lo siguiente:*

(1) $z \cdot w = (r \cdot s)_{\theta+\alpha}$.

(2) $\frac{z}{w} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\theta-\alpha}$.

(3) (Fórmula de Moivre) Para cada $n \in \mathbb{N}$, es $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))$.

Definición 13.1.20. *Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se dice que $\omega \in \mathbb{C}$ es una* raíz n-ésima *de z si $\omega^n = z$; la expresión $\sqrt[n]{z}$ representa al* conjunto *de las raíces n-simas de z o (abusando de la notación) a una cualquiera de ellas.*

Proposición 13.1.21. *Un número complejo $z = r_\theta$ tiene n raíces n-simas, que son:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Teorema 13.1.22 (Teorema fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, es decir, $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$ (con $a_k \in \mathbb{C}$, $\forall 1 \leq k \leq n$) tiene exactamente n raíces (iguales o distintas) en $\mathbb{C}$.*

13.1.6. Exponenciales, logaritmos y funciones asociadas.

Definición 13.1.23. *Si $t \in \mathbb{R}$, se define la* exponencial *del número imaginario puro it como*

$$e^{it} = \cos t + i\mathrm{sen}t,$$

a esta expresión que se la fórmula de Euler.

Si $z \in \mathbb{C}$, se define la exponencial compleja *de z como*

$$e^z \;=\; e^{\Re(z)}(\cos(\Im(z)) + i\mathrm{sen}(\Im(z)).$$

Es evidente que si z es real, es decir, $\Im(z) = 0$, la exponencial "compleja" y "real" coinciden, por lo que esta definición es una extensión de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Proposición 13.1.24. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

(1) $e^z \neq 0$ *para cada* $z \in \mathbb{C}$.

(2) Para cada $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se tiene que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

(3) $e^{z_1} = e^{z_2}$ *si y sólo si* $z_1 - z_2 = 2k\pi$ *con* $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 13.1.25. *Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es un* logaritmo *de z si se verifica que $e^w = z$. La notación $\log z$ representa al* conjunto *de todos los logaritmos de z o, abusando de la notación, a uno cualquiera de ellos.*

Lema 13.1.26. *Un número complejo no nulo $z = r_\alpha$ tiene infinitos logaritmos*

$$\log(z) = \ln(r) + i\alpha + 2\pi ki \quad \textit{con } k \in \mathbb{Z},$$

Definición 13.1.27. *Llamaremos* logaritmo principal de z, *y lo denotaremos por $\log_p z$ al único logaritmo de z tal que su parte imaginaria es el argumento principal de z, es decir,* $\log_p(z) = \ln|z| + i\arg_p(z)$.

Definición 13.1.28. *Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $w \in \mathbb{C}$, entonces se define*

$$z^w \;=\; e^{w\log(z)},$$

donde $\log(z)$ representa a alguno de los infinitos logaritmos de z, es decir, el símbolo z^w representa al conjunto de las infinitas posibilidades de $e^{w\log(z)}$.

Definición 13.1.29. *Sea $z \in \mathbb{C}$, se definen las funciones* seno *y* coseno *como:*

$$\mathrm{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Nota 13.1.30. *En el cuerpo de los complejos las funciones seno y coseno* no están acotadas. *En particular, la ecuación* $\operatorname{sen}(z) = 2$ *tiene solución, aunque éstas (pues son infinitas) no son reales (de hecho, las soluciones son* $z = (2 \pm 2\sqrt{3} + 2k\pi) - i$ *con* $k \in \mathbb{Z}$*). De igual modo, aunque en* $\mathbb{R}$ *se tenga que* $e^x > 0$*, en* $\mathbb{C}$ *es posible resolver la ecuación* $e^z = -1$*, aunque las soluciones no pueden ser reales (de hecho, son* $z = 2k\pi i$ *con* $k \in \mathbb{Z}$*).*

Definición 13.1.31. *Sea* $z \in \mathbb{C}$*, se definen las funciones hiperbólicas como:*

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

13.2. El plano complejo. Aplicaciones geométricas.

13.2.1. El plano Complejo.

En esta sección veremos qué se entiende geométricamente por el plano complejo.

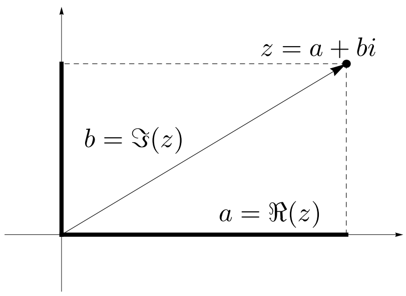
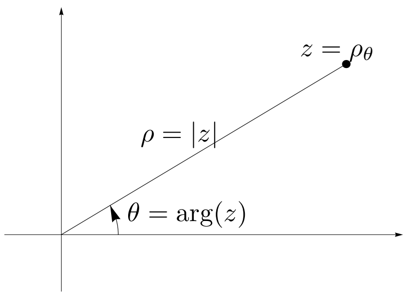


Diagrama de Argand de $z = a + bi$

Definición 13.2.1. *Dado el número complejo* $z = a + bi$*, podemos representarlo por el punto* P *del plano que tiene por coordenadas cartesianas* (a, b) *llamado* afijo *del complejo* z*. También se puede representar por el vector con origen en* O *y extremo* P*. Interpretado de esta manera, el plano cartesiano se denomina plano complejo o* plano de Argand *y a la representación geométrica del número* $z = a + bi$ *por el punto* (a, b) *se la conoce como* Diagrama de Argand*.*



Módulo y argumento de z

Pero también vimos que un número complejo queda unívocamente determinado por su módulo $r = |z|$ y por su argumento $\alpha = \arg(z)$. Geométricamente, el módulo de un número complejo representa la distancia del afijo de z al origen de coordenadas, mientras que α es el ángulo que forma el semieje real positivo con el vector representativo de z.

Definición 13.2.2. *Se define la distancia entre números complejos* $z, w \in \mathbb{C}$ *como*

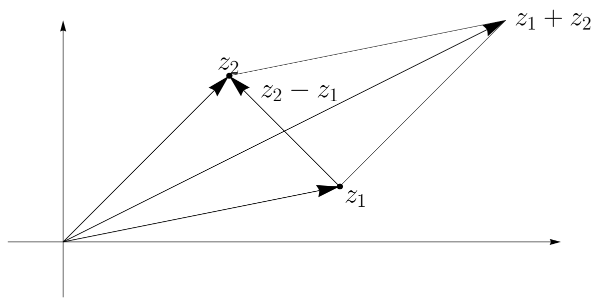
$$d(z, w) = |z - w|.$$

Nota 13.2.3. *Con esta definición, es fácil comprobar que la distancia de z a w se corresponde con la distancia (lineal) entre los afijos de z y w y, por tanto, todas las propiedades de la distancia sobre $\mathbb{R}^2$ se transmiten inmediatamente a $\mathbb{C}$.*

13.2.2. Operaciones elementales.

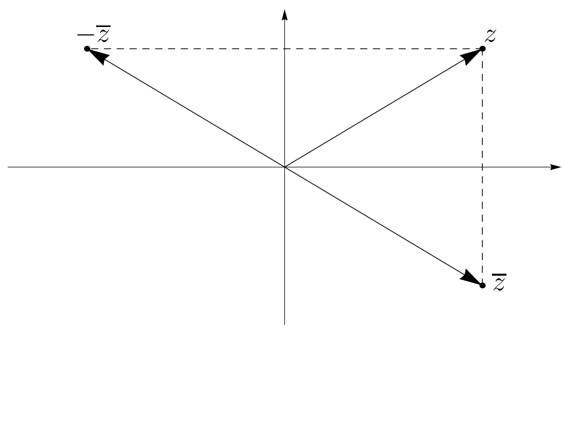
Gracias a la identificación de los números complejos con puntos del plano vista anteriormente, es posible interpretar geométricamente las operaciones elementales de números complejos que ya hemos definido, dando lugar a diversas aplicaciones de eminente carácter geométrico.

- La suma o diferencia de complejos es geométricamente, la suma o diferencia de vectores.



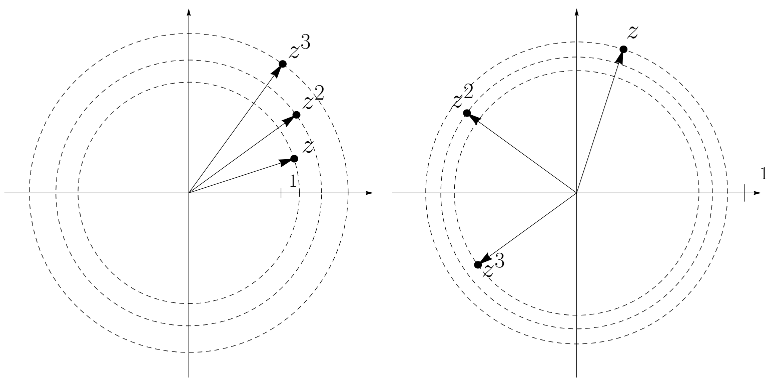
- El producto y el cociente de números complejos, sólo tenemos que aplicar su expresión en coordenadas polares para ver que el producto es el producto de módulos y suma de argumentos (cociente de módulos y diferencia de argumentos para el cociente).

- Si P es el afijo de z, su conjugado tiene por afijo P' simétrico de P respecto del eje de abscisas, mientras que el simétrico respecto del eje de ordenadas es el punto P'' afijo del complejo $-\overline{z}$.



- La ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio r es elemental. $|z| = r$, mientras que si su centro es el complejo $z_0 = a_0 + b_0 i$, su ecuación sería: $|z - z_0| = r$

- La interpretación geométrica de la potencia n-sima de un número complejo es también sencilla (ver imagen siguiente), basta elevar el módulo a n y multiplicar por el mismo número el argumento.

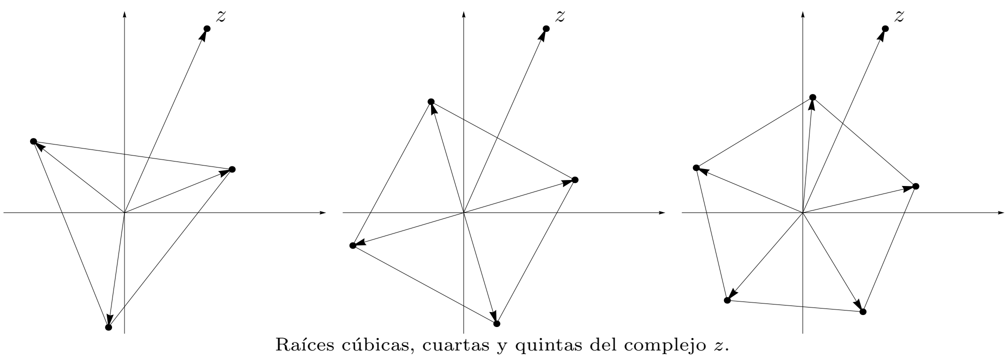


Potencias de un número complejo de módulo mayor y menor que 1

- Observamos que todas las raíces n-simas de un complejo $z = re^{i\theta}$ tienen el mismo módulo, $\sqrt[n]{r}$, y los argumentos de dos raíces obtenidas para $k = p$ y $k = p + 1$, se diferencian en

$$\frac{\theta + 2(p+1)\pi}{n} - \frac{\theta + 2p\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

  Por tanto, los afijos de esas n raíces son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia con centro el origen y radio $\sqrt[n]{r}$.



Raíces cúbicas, cuartas y quintas del complejo z.

13.2.3. Aplicaciones geométricas.

Vamos a considerar ahora expresiones complejas que pueden ser usadas para las transformaciones más sencillas en el plano: traslaciones, homotecias, giros, simetrías y proyecciones ortogonales.

Traslaciones.

Como ya conocemos, la suma de dos vectores $\vec{u}+\vec{v}$ o la suma de dos números complejos $z+w$, se obtiene geométricamente sin más que hacer la traslación, según el vector $\vec{v}$ del punto u (o viceversa). Así, la transformación del plano consistente en desplazar cada punto según un vector (a,b) puede expresarse mediante:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (x',y')=(x,y)+(a,b) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & z+(a+bi) \end{array}$$

Homotecias.

Una homotecia de centro el origen de coordenadas y razón $\rho>0$ es la transformación que a cada vector $\vec{v}$ con origen en el origen de coordenadas lo transforma en el vector $\vec{w}=\rho\vec{v}$, con lo que tenemos las expresiones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (x',y')=\rho(x,y)=(\rho x,\rho y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & w=\rho z=\rho x+\rho y i \end{array}$$

Giros.

Si un punto P del plano tiene como coordenadas polares r_θ, entonces sus coordenadas cartesianas son

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

y es fácil obtener las coordenadas cartesianas del punto que se obtiene al hacer un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo ϕ, pues es el punto cuya distancia al origen es r (coincide con la de P) y cuyo vector de posición forma con el semieje positivo de abscisas un ángulo $\theta+\phi$, es decir, el punto cuyas coordenadas cartesianas son:

$$\begin{cases} x' &= r\cos(\theta+\phi) = r(\cos\theta\cos\phi-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi) \\ y' &= r\operatorname{sen}(\theta+\phi) = r(\operatorname{sen}\theta\cos\phi-\cos\theta\operatorname{sen}\phi) \end{cases}$$

y teniendo en cuenta las relaciones (1), se obtiene

$$\begin{cases} x' &= x\cos\phi-y\operatorname{sen}\phi \\ y' &= x\operatorname{sen}\phi+y\cos\phi \end{cases}$$

Las relaciones anteriores las podemos expresar en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

donde la matriz involucrada se denomina matriz del giro. Hacer la transformación anterior sobre el vector de coordenadas (x, y) es lo mismo que multiplicar al número complejo $z = x + yi$ por el número complejo de módulo 1 y argumento ϕ, es decir, por $e^{i\phi}$. Así, tenemos la expresión del giro en forma compleja

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \to & w = ze^{i\theta} \end{array}$$

Desde el punto de vista geométrico, la multiplicación por el número complejo de módulo ρ y argumento ϕ, es decir, $\rho e^{i\phi}$, consiste en un giro de centro el origen y radio ϕ, y una homotecia de centro el origen y razón ρ.

Proyecciones ortogonales.

Sabemos que calcular la parte real de un número complejo consiste simplemente en proyectar el punto que lo representa sobre el eje OX, y calcular la parte imaginaria consiste en proyectar sobre el eje OY. Así tenemos representaciones con números complejos para dichas transformaciones.

.	$\mathbb{R}^2$	$\to$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{C}$	$\to$	$\mathbb{C}$
Proyección sobre OX	(x, y)	$\to$	$(x', y') = (x, 0)$	z	$\to$	$w = \Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
Proyección sobre OY	(x, y)	$\to$	$(x', y') = (0, y)$	z	$\to$	$w = \Im(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$

Simetrías.

Podemos considerar dos tipos de simetrías, respecto de un punto y respecto de una recta. Yendo a la situación más simple, tenemos la simetría respecto del origen de coordenadas, que podemos expresar en forma compleja como

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \to & w = -z \end{array}$$

La simetría respecto del eje OX tiene una expresión simple compleja como

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \to & w = \overline{z} \end{array}$$

Y respecto del eje OY

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \to & w = -\overline{z} \end{array}$$

Inversión.

La inversión respecto del círculo unidad viene dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z = \rho e^{i\phi} & \to & w(z) = \dfrac{e^{-i\phi}}{\rho} \end{array}$$

Dicha transformación se conoce como inversión respecto del círculo unidad y verifica:

$$|z| < 1 \Rightarrow |w(z) > 1; \quad |z| = 1 \Rightarrow |w(z) = 1 \quad |z| > 1 \Rightarrow |w(z) < 1$$