Tema 12

Series numéricas.

12.1. Definiciones y propiedades generales.

12.1.1. Definiciones y primeros ejemplos.

Definición 12.1.1. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, definimos* $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$*. Al par* $(\{a_n\}, \{S_n\})$ *se le llama* serie *de término general* a_n *y se suele representar por* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ó* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ *Los términos de la sucesión* $\{S_n\}$ *se llaman* sumas parciales *de la serie.*

Si la sucesión $\{S_n\}$ *es convergente, es decir, si* $\exists S \in \mathbb{R}$ *tal que* $S = \lim_{n\to\infty} S_n$*, se dirá que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* convergente*, al valor* S *se le llama* suma de la serie*, y se escribirá* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$*.*

Si la sucesión $\{S_n\}$ *es divergente, es decir, si* $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty\,(\pm\infty)$*, se dirá que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* divergente *y se escribirá* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty\,(\pm\infty)$*.*

Si la sucesión $\{S_n\}$ *es oscilante, es decir, no tiene límite, la serie también se dirá* oscilante*.*

Ejemplo 12.1.2. Consideremos la *serie geométrica* (progresión geométrica indefinida) de *razón* $a \in \mathbb{R}$, es decir, $1 + a + \cdots + a^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$.

Las sumas parciales de esta serie, son:

$$S_n = \begin{cases} 1 + a + \cdots + a^{n-1} = \dfrac{1 - a^{n-1} \cdot a}{1 - a} = \dfrac{1 - a^n}{1 - a} & \text{si } a \neq 1 \\ 1 + \overset{(n)}{\ldots\ldots} + 1 = n & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

(1) Si $|a| < 1$, es $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - a^n}{1 - a} = \dfrac{1}{1 - a}$. Luego la serie es convergente y su suma es $S = \dfrac{1}{1 - a}$.

(2) Si $|a| > 1$, es $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - a^n}{1 - a} = \infty$. Luego la serie es divergente.

(3) Si $a = 1$, es $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. Luego la serie es divergente.

(4) Si $a = -1$, se tiene que $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, pues $S_{2n-1} = 1$ y $S_{2n} = 0$. Luego la serie es oscilante.

Ejemplo 12.1.3. Una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice telescópica cuando su término general puede escribirse como diferencia de dos términos consecutivos de otra sucesión, es decir, si existe $\{b_n\}$ tal que $a_n = b_n - b_{n+1}$. El comportamiento de la serie telescópica, viene determinado por el de la sucesión $\{b_n\}$.

Teorema 12.1.4. *En las condiciones anteriores, la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente (repect. divergente) si y sólo si la sucesión* $\{b_n\}$ *es convergente (respect. divergente). En caso de convergencia,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - l$, *donde* $l = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Demostración. Las sumas parciales son $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$.

Por tanto, $\{S_n\}$ es convergente (respect. divergente) si y sólo si $\{b_n\}$ es convergente (respect. divergente). Además, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - l$, siempre que estemos en el caso convergente. □

Ejemplo 12.1.5. Consideremos la *serie armónica*, es decir, la serie de los inversos de los naturales: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Vamos comprobar que esta serie es divergente. Para ello, sea $k \in \mathbb{N}$ y consideremos $n = 2^k$. Entonces:

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \overset{(k)}{\ldots\ldots} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2} \xrightarrow{k\to\infty} +\infty \end{aligned}$$

Es evidente que $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1} > S_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que la sucesión de sumas parciales es estrictamente creciente. Pero por lo anterior, la subsucesión $\{S_{2^k}\}_k$ es divergente, por lo que la sucesión completa debe ser divergente.

También podemos ver la divergencia de la serie armónica, a través de la integral de Riemann. En efecto,

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = S_{n-1} < S_n$$

Por tanto, como $\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$, se deduce que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ y la serie armónica es divergente.

12.1.2. Algunas propiedades generales.

Teorema 12.1.6. *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series numéricas.*

(a) *Si las dos series son convergentes, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *es convergente y* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(b) *Si una serie es divergente y la otra convergente, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *es divergente.*

Teorema 12.1.7 (Propiedad distributiva)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie numérica.*

(a) *Si la serie es convergente, entonces* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ *es convergente y se verifica que* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) *Si la serie es divergente, entonces* $\forall \lambda \neq 0$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ *es divergente.*

Definición 12.1.8. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie numérica y sea* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una aplicación* *estrictamente creciente. Definimos*

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + \cdots + a_{g(1)} \\ b_2 = a_{g(1)+1} + a_{g(1)+2} + \cdots + a_{g(2)} \\ \quad\vdots \\ b_{n+1} = a_{g(n)+1} + a_{g(n)+2} + \cdots + a_{g(n+1)} \end{cases}$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *se dice que se ha obtenido a partir de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ asociando términos consecutivos.

Teorema 12.1.9 (Propiedad asociativa)**.** *En una sucesión convergente o divergente se pueden asociar términos consecutivos sin que varíe el carácter de la serie ni su suma, si es convergente.*

Nota 12.1.10. *Esta propiedad no es cierta series oscilantes. Tampoco es cierta, en general, la propiedad* disociativa*, es decir, del hecho de que una serie obtenida asociando términos consecutivos sea convergente o divergente, no significa que la serie original también lo sea, ya que ésta puede ser oscilante. Por ejemplo, la serie de término general* $a_n = (-1)^n$ *es oscilante, pero asociando términos consecutivos de dos en dos, es decir, tomando* $b_1 = a_1 + a_2$*,* $b_2 = a_3 + a_4$*,...,*$b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$*, la serie resultante es convergente a 0.*

Teorema 12.1.11. *Si intercalamos (o suprimimos) en una serie un número finito de términos cuya suma sea* A*, la nueva serie mantiene el carácter de la original y, caso de ser convergente de suma* S*, la nueva suma será* $S + A$ *(o* $S - A$ *si se suprimen términos).*

Teorema 12.1.12 (Condición necesaria de convergencia)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie convergente. Entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Teorema 12.1.13 (Condición general de convergencia de Cauchy)**.** *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente si y sólo si* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n, m \geq n_o$ *con* $m > n$ *se tiene que* $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$.

12.2. Series de términos positivos.

12.2.1. Definición y propiedades generales.

Definición 12.2.1. *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice que es una* serie de términos positivos *cuando* $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 12.2.2. *Una serie de términos positivos es convergente o divergente a* $+\infty$*, pero nunca oscilante.*

Corolario 12.2.3. *Una serie de términos positivos es convergente si y sólo si su sucesión de sumas parciales está acotada (superiormente).*

12.3. Criterios de convergencia.

Teorema 12.3.1 (Criterio general de comparación)**.** *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series de términos positivos.*

(*a*) *Si* $\exists n_0$ *y* $c > 0$ *tales que* $b_n < c \cdot a_n\ \forall n \geq n_0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es convergente.*

(*b*) *Si* $\exists n_0$ *y* $c > 0$ *tales que* $b_n < c \cdot a_n\ \forall n \geq n_0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es divergente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

Corolario 12.3.2. *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series de términos positivos. Si* $\exists \alpha, \beta > 0$ *y* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tales que* $\alpha a_n < b_n < \beta a_n\ \forall n \geq n_0$ *entonces ambas series tienen el mismo carácter.*

Teorema 12.3.3 (Criterio de comparación por paso al límite)**.** *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series de términos positivos tales que* $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = l \in [0, +\infty]$.

(*a*) *Si* $l \in (0, +\infty)$*, entonces ambas series tienen el mismo carácter.*

(*b*) *Si* $l = 0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es convergente.*

(*c*) *Si* $l = +\infty$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es divergente.*

Teorema 12.3.4 (Criterio de condensación de Cauchy)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que la sucesión* $\{a_n\}$ *es decreciente. Entonces las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ *tienen el mismo carácter.*

Ejemplo 12.3.5. Como aplicación del criterio anterior, vamos a estudiar el carácter de la *serie armónica generalizada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

En primer lugar, si $\alpha < 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty \neq 0$ y la serie debe ser divergente; y si $\alpha = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$ y la serie también será divergente.

Así pues nos centraremos en el caso $\alpha > 0$, por lo que la sucesión $\left\{a_n = \frac{1}{n^\alpha}\right\}$ es decreciente. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$, que es una serie geométrica de razón $2^{1-\alpha}$. Por consiguiente, si $\alpha > 1$, es $2^{1-\alpha} < 1$ y la serie será convergente. Mientras que si $0 < \alpha < 1$, es $2^{1-\alpha} > 1$ y la serie será divergente. En resumen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ es } \begin{cases} \text{convergente} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{divergente} & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Teorema 12.3.6 (Criterio de Pringsheim)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos. Entonces*

(*a*) *Si* $\exists\, \alpha > 1$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} n^\alpha\, a_n \in [0, +\infty)$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

(*b*) *Si* $\exists\, \alpha \leq 1$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} n^\alpha\, a_n \in (0, +\infty]$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Teorema 12.3.7 (Criterio de la raíz)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que* $\exists\, \lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Entonces*

(*a*) *Si* $\lambda < 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

(*b*) *Si* $\lambda > 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

(*c*) *Si* $\lambda = 1$ *no se puede afirmar nada.*

Teorema 12.3.8 (Criterio del cociente)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que* $\exists\, \lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Entonces*

(*a*) *Si* $\lambda < 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

(*b*) *Si* $\lambda > 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

(*c*) *Si* $\lambda = 1$ *no se puede afirmar nada.*

Teorema 12.3.9 (Criterio de Raabe)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que* $\exists\lambda = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Entonces*

(*a*) *Si* $\lambda > 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

(*b*) *Si* $\lambda < 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

(*c*) *Si* $\lambda = 1$ *no se puede afirmar nada.*

12.3.1. Series alternadas

Definición 12.3.10. *Se dice que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es una* serie alternada *cuando sus términos van alternando de signo, es decir, cuando* $b_n \cdot b_{n+1} < 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el primer término es positivo, en cuyo caso, una serie alternada será de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *con* $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ *(si el primer término fuese negativo, bastaría con multiplicar la serie anterior por* -1*).*

Teorema 12.3.11 (Criterio de Leibnitz)**.** *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión decreciente y convergente a 0. Entonces la serie alternada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *es convergente. Además, si las suma de la serie es* S *y* S_n *es la n-ésima suma parcial, se cumple que* $|S - S_n| < a_{n+1}$.

Ejemplo 12.3.12. La serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente.

12.3.2. Convergencia absoluta y condicional: reordenaciones.

En esta sección se estudiarán series numéricas cuyos términos no son necesariamente positivos. En realidad, trabajaremos con series en las que haya infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, pues en otro caso, el estudio puede reducirse a las series de términos positivos. En efecto, si hay una cantidad finita de términos negativos, se puede prescindir de ellos sin alterar el carácter de la serie; mientras que si hay una cantidad finita de términos positivos, multiplicando por -1 la serie, estaríamos en el caso anterior.

Definición 12.3.13. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie numérica. Se dice que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* absolutamente convergente *si la serie de términos positivos* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente. Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, pero* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverge, se dirá que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* condicionalmente convergente.

Proposición 12.3.14. *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Nota 12.3.15. *El recíproco no es cierto en general, pues* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *es divergente pero* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *es convergente, es decir, la serie armónica alternada es condicionalmente convergente.*

Definición 12.3.16. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie numérica. Definimos las siguientes series asociadas* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$*, donde* $p_n = \max\{a_n, 0\}$ *y* $q_n = \min\{a_n, 0\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$*, de modo que* $a_n = p_n + q_n$ *y* $|a_n| = p_n - q_n$*. De esta forma,* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *es una serie de términos no negativos (luego convergente o divergente a* $+\infty$*) y* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ *es una serie de términos no positivos (luego convergente o divergente a* $-\infty$*).*

Teorema 12.3.17. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie numérica. Entonces*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente si y sólo si las series* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ *son convergentes. En tal caso* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$.

(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es condicionalmente convergente, entonces las series* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ *son divergentes.*

Nota 12.3.18. *El recíproco del apartado (b) del teorema anterior no es cierto en general.*

Definición 12.3.19. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie numérica y sea* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una aplicación biyectiva. Entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *donde* $b_n = a_{g(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *se dice que es una* reordenación *de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Lema 12.3.20. *Cualquier reordenación de una serie de términos positivos tiene el mismo carácter que la original y la misma suma, caso de ser convergente.*

Teorema 12.3.21 (Dirichlet)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie numérica absolutamente convergente de suma* S. *Entonces cualquier reordenación suya también es absolutamente convergente de suma* S.

Teorema 12.3.22 (de reordenación de Riemann)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie numérica condicionalmente convergente. Entonces,* $\forall \alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *existe una reordenación* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$.

Corolario 12.3.23. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie numérica tal que todas sus reordenaciones son convergentes, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente y todas convergen a la misma suma.*

Definición 12.3.24. *Una serie numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice* incondicionalmente convergente *cuando todas sus reordenaciones son convergentes.*

Teorema 12.3.25. *Una serie numérica es incondicionalmente convergente si y sólo si es absolutamente convergente.*