Tema 8

Cálculo de Primitivas.

8.1. Definición y propiedades

Definición 8.1.1. *Sea* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Una* **primitiva** *de* f *en* I *es una función* $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivable en* I *y tal que* $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in I$.

Proposición 8.1.2. *Si* F *es una primitiva de* f *en* I*, entonces* **todas** *las primitivas de* f *en* I *son de la forma* $F(x) + C$ *con* $C \in \mathbb{R}$

Definición 8.1.3. *Se llama* **integral indefinida** *de* f *al conjunto de todas sus primitivas y se denotará por* $\displaystyle\int f(x)dx$. *Así, si* $F(x)$ *es una primitiva de* $f(x)$ *en* I*, se cumple que*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

o equivalentemente, $f(x)dx = dF(x)$.

Propiedades 8.1.4. (Propiedades de la integral indefinida)

(a) $\displaystyle\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

(b) $\displaystyle\int F'(x)dx = F(x) + C$.

(c) $\displaystyle\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Las propiedades (c) y (d) aseguran que la integral indefinida es una operación **lineal**.

8.2. Integrales Inmediatas

Las siguientes integrales se obtienen directamente a través de las derivadas de las funciones elementales y de la regla de la cadena.

$\int k dx = kx + c, \qquad k \in \mathbb{R}$	
$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \qquad k \neq -1$	$\int f(x)^k \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{k+1}}{k+1} + c, \qquad k \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln \lvert f(x) \rvert + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} f'(x) = e^{f(x)} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \qquad a > 0$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c, \qquad a > 0$
$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + c$	$\int \operatorname{sen}(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x)) + c$
$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + c$	$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \operatorname{sen}(f(x)) + c$
$\int \left(1 + \tan^2(x)\right) dx = \tan(x) + c$	$\int \left(1 + \tan^2(f(x))\right) f'(x) dx = \tan(f(x)) + c$
$\int -\left(1 + \cot^2(x)\right) dx = \cot(x) + c$	$\int -\left(1 + \cot^2(f(x))\right) f'(x) dx = \cot(f(x)) + c$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen}(x) + c$	$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen}(f(x)) + c$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arg\,senh}(x) + c$	$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arg\,senh}(f(x)) + c$
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$	$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \arctan(f(x)) + c$

8.3. Métodos generales de integración

8.3.1. Método de descomposición

Este método se basa en la linealidad de la integral. Si $f(x)$ se puede escribir como una combinación lineal de funciones, es decir, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$, entonces

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\,dx,$$

donde las integrales de las funciones $f_i(x)$ son, *a priori*, más sencillas que la original.

8.3.2. Método de sustitución

Este método se basa en la regla de la cadena. Supongamos que tenemos una integral indefinida $\int f(x)dx$ y que queremos realizar un cambio de variables $x = \varphi(t)$ (o equivalentemente, $t = \varphi^{-1}(x)$). Entonces

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

En efecto, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, es claro que $F'(x) = f(x)$ y por tanto

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = [F(\varphi(t))]' = F'(x) = f(x).$$

8.3.3. Método de integración por partes

Este método se basa en la regla de la derivación del producto. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables, Entonces $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, y por lo tanto

$$u(x)v(x) = \int (u(x)v(x))'dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx,$$

por lo que

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx,$$

o escrito en forma de diferencial,

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

8.4. Integración de funciones racionales

Sea $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ una función racional tal que el grado del polinomio $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. Si fuese $\mathrm{gr}(p) \geq \mathrm{gr}(q)$, dividiendo obtendríamos: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$ y el grado del resto es menor que el del divisor.

Descomponiendo $q(x)$ en factores, puede ocurrir:

(a) $q(x)$ sólo tiene raíces reales simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, entonces existen $A_1, A_2, \ldots A_N \in \mathbb{R}$ tales que $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{A_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \dfrac{A_n}{x-\alpha_n}$, luego

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{A_i}{x-\alpha_i}\, dx,$$

que son integrales inmediatas.

(b) $q(x)$ tiene raíces reales múltiples, por ejemplo, raíz β con multiplicidad $n \in \mathbb{N}$. En este caso se procede a la descomposición de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ en fracciones simples en la misma forma que en el caso (a), pero con la particularidad que al factor $(x-\beta)^n$ le corresponderían los sumandos

$$\frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(x-\beta)^n}.$$

La única novedad con respecto al caso anterior son integrales de la forma $\displaystyle\int \frac{B_i}{(x-\beta)^i}\, dx$ $(i = 2, \cdots, n)$, que son inmediatas también.

(c) $q(x)$ tiene raíces complejas (conjugadas) simples. Supongamos que $q(x)$ tiene la raíz compleja $z_1 = \alpha + \beta i$, por consiguiente, tendrá también la raíz conjugada $\overline{z_2} = \alpha - \beta i$. Como $[x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)] = (x - \alpha)^2 + \beta^2$, en la descomposición en fracciones al par de raíces complejas le corresponderá la fracción

$$\frac{Mx + N}{(x - \alpha)^2 + \beta^2},$$

cuya integral se reduce a dos inmediatas (un logaritmo y un arcotangente), sin más que tener en cuenta que

$$\frac{Mx + N}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = M \frac{x - \alpha}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + (M\alpha + N) \frac{1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

(d) $q(x)$ tiene raíces complejas múltiples. En esta situación hay dos opciones:

(I) Actuar como en el caso de raíces reales múltiples.
Si las raíces complejas (como las del apartado (c)) tienen multiplicidad $n \in \mathbb{N}$, se añaden a la descomposición las siguientes fracciones:

$$\frac{M_1 x + N_1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{M_2 x + N_2}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^2} + \cdots + \frac{M_n x + N_n}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^n}.$$

Las nuevas fracciones se integran por partes (reduciendo en cada paso un grado en el denominador), o bien mediante el cambio $x = \alpha + \beta \tan t$.

(II) Utilizar el *Método de Hermite*.
Este método consiste en descomponer la función racional de la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)' + C(x),$$

donde

- $B(x)$ es un polinomio con las mismas raíces que $q(x)$ pero con una multiplicidad menos cada una.
- $A(x)$ es un polinomio de coeficientes indeterminados, cuyo grado es una unidad menos que $B(x)$.
- $C(x)$ es la descomposición en fracciones simples correspondientes a las raíces de $q(x)$ consideradas todas como simples.

8.5. Integrales reducibles a racionales

En esta sección trataremos de integrales de funciones irracionales (es decir, que no son racionales) pero que mediante un cambio de variables adecuado, la transformamos en una integral de tipo racional.

8.5.1. Integrales trigonométricas

Sea $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ una función racional en de senos y cosenos. Podemos reducir su integral a una racional mediante el cambio de variables $t = \tan(x/2)$:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx = \begin{bmatrix} t = \tan(x/2) & dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\ \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Existen casos particulares en que la integral trigonométrica re puede racionalizar mediante casos más sencillos.

(a) Si R es *impar en seno*, es decir, $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, hacemos el cambio $\cos x = t$.

(b) Si R es *impar en coseno*, es decir, $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t$.

(c) Si R es *par en seno y coseno* (a la vez), es decir, $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, hacemos el cambio $\tan x = t$.

8.5.2. Integrales con radicales de polinomios de grado 1

Son integrales del tipo

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx$$

donde R es una función racional en cada una de sus variables, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $(c, d) \neq (0, 0)$ y $m, n, p, q, \dots, r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

En esta situación, si llamamos $N = \text{m.c.m.}(n, q, \dots, s)$, es decir, el mínimo común múltiplo de los índices de las raíces implicadas, basta efectuar el cambio:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$$

para transformar la integral en una del tipo racional. En efecto, basta tener en cuenta que el cambio implica que $x = \dfrac{dt^N - b}{a - ct^N} =: f(t)$, es decir, una función racional en t, por lo que

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx =$$
$$= \int R\left(f(t), t^{Np/q}, t^{Nr/s}, \dots, t^{Nr/s}\right) f'(t)dt.$$

8.5.3. Integrales con radicales de polinomios cuadráticos

Se trata de integrales del tipo

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx.$$

Estas integrales las podemos integrar de dos formas diferentes.

Integrales Abelianas

Se trata de realizar un cambio de variables que la transforme en una integral de tipo racional.

(I) Si $a > 0$, se hace el cambio $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$.

(II) Si $c > 0$, se hace el cambio $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx$.

(III) Si $a < 0$ y $c \leq 0$, se hace el cambio $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$, donde α es una raíz real de ax^2+bx+c

Completando cuadrados

En este caso, vamos a realizar un cambio de variables trigonométrico que nos reduzca a una integral racional trigonométrica (que se resolverá mediante otro cambio de variables adecuado). En primer lugar, veamos los siguientes casos particulares:

(I) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2-b^2x^2}\right) dx$. Realizamos el cambio $bx = a\,\mathrm{sen}\, t$ (o $bx = a\cos t$).

(II) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{b^2x^2-a^2}\right) dx$. Realizamos el cambio $bx = a\sec t$.

(III) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2+b^2x^2}\right) dx$. Realizamos el cambio $bx = a\tan t$.

En el caso general, tenemos que *completar cuadrados*, es decir, escribir la función cuadrática de la forma $ax^2+bx+c = a(x-A)^2+B$ y en función de los signos de a y B, realizar el cambio trigonométrico adecuado.