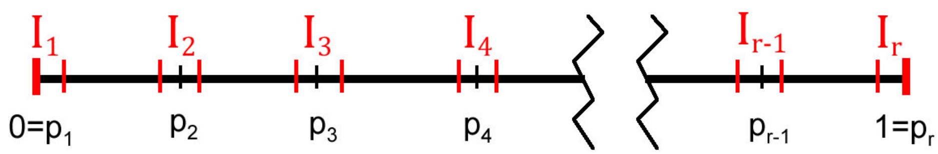
Integral de Riemann. Problema 3. *Sea $f : [0,1] \to R$ la función definida por $f(x) = 0$ si x es irracional y $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ fracción irreducible, $f(0) = 1$. Probar que f es integrable en $[0,1]$ y además $\int_0^1 f(x)dx = 0$.*

Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $m \in N$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sólo hay, pues, un número finito de puntos $0 = p_1 < p_2 < \cdots < p_r = 1$ donde $f(p_k) \geq \frac{1}{m}$.

Construimos intervalos cerrados disjuntos $I_1, I_2, \cdots, I_{r-1}, I_r$ con p_k puntos interiores de I_k para $k = 2, 3, \cdots, r-1$, con 0 extremo inferior de I_1 y con 1 extremo superior de I_r, y tal que la suma de las longitudes de estos r intervalos sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.



Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ la partición de $[0,1]$ obtenida tomando los extremos de dichos intervalos $I_1, I_2, \cdots, I_n$. Es entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \text{long}(I_k) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Entonces

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{r} \text{long}(I_k) + \frac{\varepsilon}{2}\,\text{long}\left([0,1] - \cup_{k=1}^{r} I_k\right) < \varepsilon,$$

pues $0 < \frac{1}{q} \leq 1$ en I_r, y fuera de I_r es $M_k = \frac{1}{q} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por consiguiente $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \Rightarrow f$ es integrable Riemann en $[0,1]$, según la condición de Riemann.

Luego existe $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sup_P\{L(f,P)\} = 0$.