1. Calcular las siguientes integrales ($a, b \neq 0$):

a) $\int (x^{-3} + 4x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{4}})\, dx; \int \frac{x}{x-1}\, dx; \int \operatorname{sen}^2 x\, dx; \int \cos^2 x\, dx; \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}; \int \tan^2 x\, dx.$

b) $\int \sqrt{ax+b}\, dx \ ; \ \int \frac{dx}{x^2+a^2} \ ; \ \int 3x\sqrt{1-2x^2}\, dx \ ; \ \int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}}\, dx \ ; \ \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$

$\int \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x\, dx \ ; \ \int x e^{x^2}\, dx \ ; \ \int \cot x\, dx \ ; \ \int \frac{\log^3 x}{x}\, dx \ ; \ \int \frac{x}{\cos^2 x^2}\, dx$

$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx \ ; \ \int e^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} 2x\, dx \ ; \ \int \sqrt{1-x^2} \ ; \ \int \sqrt{16-x^2}\, dx.$

c) $\int \log x\, dx \ ; \ \int \arctan x\, dx \ ; \ \int x \operatorname{sen} x\, dx \ ; \ \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx \ ; \ \int e^{ax} \cos bx\, dx.$

d) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+2)}\, dx; \int \frac{x^4 - x^3 - (x+1)}{x^3 - x^2}\, dx; \int \frac{x}{(2+3x)^2}\, dx; \int \frac{x^2}{1-x^4}\, dx; \int \frac{dx}{4-x^2}.$

2. Obtener las siguientes primitivas: $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \ ; \quad \int \frac{3x^4+4x^2+2x+1}{x(x^2+1)^2}\, dx \ ; \quad \int \frac{dx}{(x^3-1)^2} \ ;$

$\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)}\, dx \ ; \quad \int \frac{x}{(x-1)^3(x+1)^2}\, dx \ ; \quad \int \frac{x^2+3}{(x+1)(x-1)}\, dx.$

3. Calcular las primitivas: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} \ ; \ \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx \ ; \ \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \ ; \ \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-9x)} \ ; \ \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\, dx;$

$\int \frac{x}{(x+2)^{\frac{2}{3}} - (x+2)}\, dx; \int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}} (1+x)^{-2}\, dx; \int \frac{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}}}{x + x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}\, dx; \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+\sqrt{x})}\, dx.$

4. Calcular las primitivas: $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}} \ ; \ \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \ ; \ \int \sqrt{2ax-x^2}\, dx \ ; \ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} \ .$

5. Calcular las siguientes primitivas: $\displaystyle\int \frac{\log 2x}{x \log 4x}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+4\cos^2 x}\,dx$; $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$; $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x+2\cos^2 x \operatorname{sen} x}\,dx$; $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x+\tan x}{1-2\tan x}\,dx$; $\displaystyle\int \sqrt{1-\cos x}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}\,dx$.

1. Sean $f(x) = 3x - 2,\ g(x) = x^2$. Usando la condición necesaria y suficiente de integrabilidad Riemann, probar que f y g son integrables Riemann en $[0, 1]$, calculando el valor de cada integral.

2. Sea $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$. Demostrar que f no es integrable Riemann en el intervalo $[0, 1]$.

3. Sea $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 0$ si x irracional y $f(x) = \dfrac{1}{q}$ si $x = \dfrac{p}{q}$ fracción irreducible. Probar que f es integrable en $[0, 1]$ y además $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

4. Acotar las siguientes integrales usando el teorema de la media:

   a) $\displaystyle\int_0^1 (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{8 + x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-x^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$

5. Demostrar que

   a) $\displaystyle\frac{1}{7\sqrt{2}} \le \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx \le \frac{1}{7}$,

   b) $\displaystyle\frac{3}{8} \le \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx \le \frac{\sqrt{3}}{4}$.

6. Calcular las siguientes integrales definidas:

$$\int_{-3\pi}^{-\pi} (\mathrm{sen}^2 x + x^3 + \frac{1}{x+1})\,dx \qquad \int_0^5 \frac{7 + 5x - 2x^2}{(x+1)^2}\,dx \qquad \int_0^2 (1 + x^2)^3\,dx$$

$$\int_1^2 (1 + \sqrt{x})^3\,dx \qquad \int_{-k\pi}^{n\pi} |\mathrm{sen} x|\,dx \ (k, n \in \mathbb{N}) \qquad \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos x^2\,dx$$

$$\int_{-2}^2 |x^2 - 1|\,dx \qquad \int_0^3 |x - \sqrt{x}|\,dx \qquad \int_{-1}^1 \frac{x^2 \mathrm{sen} x}{1 + \cos^{10} x}\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} |\mathrm{sen}^3 x|\,dx \qquad \int_0^1 \sqrt{3 + 2x - x^2}\,dx \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{sen} nx \cos kx\,dx \ (k, n \in \mathbb{Z})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{sen}^3 x}{x^2}\,dx \qquad \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{9 - 3x^2}\,dx \qquad \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos^2 x}\,dx$$

$$\int_0^3 [x^2]\,dx \qquad \int_0^3 [x]^2\,dx \qquad \int_0^{2\pi} [\mathrm{sen} x]\,dx$$

7. Demostrar que si f es integrable en $[a,b]$ existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Interpretar geométricamente el resultado y calcula c para las siguientes funciones en los intervalos indicados:

$$\text{sen}x, \quad [0,\pi]; \qquad 3x, \quad [0,2]; \qquad 3x-1, \quad [-1,3]; \qquad [3x-1], \quad [-1,3].$$

8. Calcular las derivadas de las siguientes funciones (sin calcular la integral):

$$a)\ f(x) = \int_1^{\log(1+x^2)} e^{-t^2}\,dt \qquad b)\ g(x) = \int_{-\cos x^2}^{x^4} \frac{1}{(1+t^2)^3}\,dt$$

$$c)\ h(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^8}\,dt \qquad d)\ k(x) = \int_{2^x}^{\text{sen}x \cos x} \frac{\arctan x}{1+t^2}\,dt$$

9. Hallar

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt}{x - \text{sen}x}$$

10. Calcular por medio de una integral definida los siguientes límites:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n^2+k^2} \qquad \text{c)}\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{k/n}}{n}$$

1. En la recta real, dar ejemplos de:
   a) Intersección de familia de abiertos que no es abierto;
   b) Unión de familia de cerrados que no es cerrado;
   c) Cerrado que no es compacto;
   d) Acotado que no es compacto.

2. Usando la definición de compacidad, demostrar que el conjunto formado por los términos de una sucesión convergente y su límite es un conjunto compacto. Hacerlo también usando el teorema de Heine-Borel.

3. Decidir cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas en el intervalo $[0, \infty)$.
   a) $f(x) = x^{1/3}$,
   b) $f(x) = x^{1/2}$,
   c) $f(x) = x$,
   d) $f(x) = x^2$,
   e) $f(x) = x^3$.

4. *a*) Hallar una función f que sea continua y acotada en $(0, 1]$ pero no uniformemente continua.
   b) Hallar una función f que sea continua y acotada en $[0, \infty)$ pero no uniformemente continua.

5. *a*) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable en (a, b). Demostrar que si f' está acotada en (a, b), entonces f es uniformemente continua en (a, b).
   b) Probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan x$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

6. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua y tal que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es uniformemente continua en su dominio.

7. *a*) Sea $a \leq c \leq b$ y sea $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ la función definida por la expresión
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq c \\ 1, & \text{si } x = c. \end{cases}$$
   Probar que f es integrable en $[a, b]$ y además $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.
   b) Sean $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que f es integrable y $f(x) = g(x)$ salvo en una cantidad finita de puntos. Probar que entonces g es integrable y además $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.

8. *a*) Supongamos que $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y que f es continua en todo punto de $[a, b]$ con la excepción de $c \in (a, b)$. Probar que entonces f es integrable en $[a, b]$.

b) Supongamos que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y que f es continua en todo punto de $[a,b]$ con la excepción de una cantidad finita de puntos $a < c_1 < \cdots < c_n < b$. Probar que entonces f es integrable en $[a,b]$.

9. Demostrar que si f es continua en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ entonces se tiene que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ si y sólo si $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

10. En relación con el ejercicio anterior, dar un ejemplo de una función continua tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ pero que no cumpla $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$. Y un ejemplo de una función discontinua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ pero que tampoco cumpla $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

11. ¿Tiene primitiva la función signo definida como $f(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $f(x) = -1$ si $x < 0$?

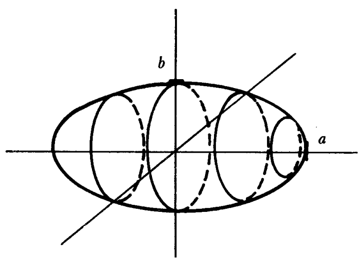
1. Calcular el área de las siguientes regiones planas:
   a) Círculo de radio r.
   b) Elipse de semiejes a y b.
   c) Región limitada por la parábola $y = 6 - x^2$ y la recta $y = -2x + 3$.
   d) Región limitada por la parábola cúbica $y = x^3$ y las rectas $y = -x/2$, $y = x + 6$.
   e) Región limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.
   f) Rosa de tres pétalos $\rho = a \cos 3\alpha$

2. Calcular los volúmenes de los siguientes sólidos:
   a) Cilindro circular de radio r y altura h.
   b) Cono de radio r y altura h.
   c) Esfera de radio r.
   d) Pirámide recta de altura h y base cuadrada de lado a.

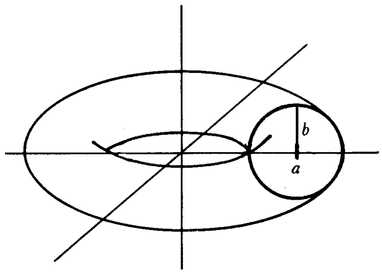
3. *a*) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor del eje de abscisas la región comprendida entre las curvas $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$.
   b) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor del eje de ordenadas la misma región.

4. Hallar el volumen de los siguientes sólidos:
   a) Aquél que tiene una base circular de radio 4 y que toda sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un triángulo equilátero.
   b) El engendrado al girar el área acotada por la parábola $y = x^2 + 2x$ y el eje OX alrededor de la recta $y = 2$.

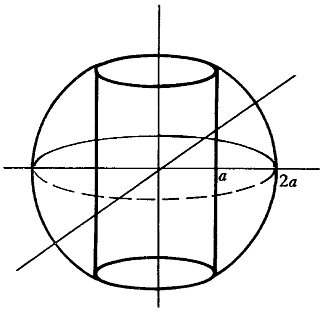
5. Hallar el volumen del elipsoide de revolución que se obtiene al hacer girar la región limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje de abscisas.



6. Hallar el volumen del toro obtenido al hacer girar la circunferencia $(x-a)^2+y^2=b^2$ (donde $0<b<a$) alrededor del eje de ordenadas.



7. Se abre un agujero cilíndrico de radio $a>0$ a través del centro de una esfera de radio $2a$. Hallar el volumen del sólido restante.



8. Calcular las longitudes de las siguientes curvas planas:
   a) Circunferencia de radio r.
   b) Un arco de la catenaria $y=\cosh x$ entre las abscisas 0 y b.
   c) Un arco de la parábola $y=x^2$ entre las abscisas 0 y b.
   d) Un arco de $y=\log x$ entre las abscisas 1 y e.
   e) Un arco de $y=x^3+\frac{1}{12x}$ entre las abscisas 1 y 2.

9. Calcular las áreas de las siguientes superficies de revolución:
   a) Cilindro circular de radio r y altura h.
   b) Cono de radio r y altura h.
   c) Esfera de radio r.
   d) Toro generado al girar la circunferencia $(x-a)^2+y^2=R^2$ en torno de la recta $x=0$, con $a>R$.

10. Calcular la longitud y el área encerrada por la curva cardioide, de ecuación en polares $\rho=a(1+\cos\alpha)$, $a>0$.

11. Hallar la longitud de la curva astroide, de ecuación

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \ , \ a > 0.$$

12. Hallar el área de la superficie obtenida al girar la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ en torno al eje OX, $(a > 0)$.

1. Sea $A \subset \mathbb{N}$ cuyo complementario es finito. Demostrar que una sucesión $\{x_n\}$ converge si y sólo si converge la subsucesión asociada a A, y en ese caso tienen el mismo límite.

2. Sea (a_n) una sucesión acotada de números reales y sea $\sigma_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$. Demostrar que entonces
$$\liminf_{n\to\infty} \; a_n \le \liminf_{n\to\infty} \sigma_n \le \limsup_{n\to\infty} \sigma_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

3. Probar que si $a > 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$. Indicación: Si $n > 2a$ entonces
$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}$$

4. Sea (a_n) una sucesión de números positivos. Demostrar que entonces se tiene
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

5. Sea $a_n = n^n/n!$. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = e$. Usar el problema anterior para concluir que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

6. Demostrar que
$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$$
y dar un ejemplo en el que no se dé la igualdad.

7. Calcular los límites de oscilación de las siguientes sucesiones indicando para cada límite una subsucesión que converja hacia él:
$$\frac{(-1)^n}{e^{-1/n}}; \qquad \frac{1}{n} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}; \qquad \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{(-1)^n + 2}; \qquad \frac{3n}{4} - [\frac{3n}{4}].$$

8. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales es contractiva de constante $\alpha \in (0,1)$ si $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le \alpha |x_{n+1} - x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que toda sucesión contractiva es una sucesión de Cauchy.

9. Dada una sucesión, demostrar que el conjunto formado por sus términos y sus límites de oscilación es cerrado.

10. Construir una sucesión que tenga 10 límites de oscilación. Y otra que tenga infinitos.

1. **1.** Estudiar el carácter de las series de término general:

a) n^4e^{-2n} b) $\dfrac{n^3}{n!}$ c) $\dfrac{n!}{n^n}$ d) $\dfrac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

f) $\dfrac{n^2}{(n+1)!}$ g) $\dfrac{n+1}{(2n-1)^n}$ h) $\dfrac{e^n n!}{n^n}$ i) $\dfrac{n^x}{n^{3x}+1}$, $x>0$ j) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$

k) $1-\cos\dfrac{1}{n}$ l) $\dfrac{(-1)^n}{n^2+n+1}$ m) $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ n) $\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$

2. a) Sea $\sum a_n$ convergente de suma A. ¿puede asegurarse la convergencia de la serie de término general $b_n = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$? ¿cuál sería su suma? b) De la convergencia de $\sum b_n$, ¿puede asegurarse la de $\sum a_n$?

3. Sea $\sum a_n$una serie de términos positivos.

   a) Probar que si $\sum a_n$ es convergente de suma S, también $\sum\sqrt{a_n a_{n+1}}$ es convergente, y acotar su suma.

   b) Probar que la serie $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ tiene el mismo carácter que $\sum a_n$.

4. Sea $q>0$. Demostrar que la serie

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^p(\log n)^q}$$

   es convergente si $p>1$, o bien, si $p=1$ y $q>1$, y es divergente si $p<1$ o bien si $p=1$ y $q\leq 1$.

5. Estudiar la convergencia de las siguientes series, según los valores de los parámetros:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\ \ (a\neq -1) \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{na^n}\ \ (a>0) \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n-q^n}\ \ (p>q>0)$$

$$d)\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^p\ \ (p\in\mathbb{R}) \qquad e)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p-n^q}\ \ (p>q>0) \qquad f)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha(\log n)^3}\ \ (\alpha>0)$$

6. Calcular cuántos términos habrá que sumar para que la suma parcial aproxime a la suma de las siguientes series con un error menor que una milésima:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!};\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n}.$$

7. **7.** Entre las curvas $y = \dfrac{1}{x^3}$ e $y = \dfrac{1}{x^2}$, a la derecha de su punto de intersección, se han construido segmentos paralelos al eje OY y que guardan entre sí distancias iguales. ¿Será finita la suma de las longitudes de estos segmentos? ¿Será finita la suma de las longitudes de los segmentos anteriores si la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ se sustituye por la curva $y = \dfrac{1}{x}$?

8. Demostrar que las siguientes series convergen y calcular su suma:

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^3-n}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)!}$ $\quad$ (sabiendo que $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$)

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a^n$, $|a| < 1$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$

9. Demostrar que la función $y = \dfrac{x^2+2x+3}{x^3+50}$ decrece en el intervalo $[5, +\infty)$. Aplicar este hecho al estudio de la convergencia de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n^2+2n+3}{n^3+50}$ ¿Converge absolutamente?

10. Probar que la serie infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ converge cuando $0 < x < e$ y diverge cuando $x > e$.

1. Expresar en forma binómica los siguientes números complejos:

$$\frac{1}{5+3i} \qquad \frac{-1-i\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-i)^4} \qquad i^5+i^{16} \qquad 3_{\pi/3} \qquad 3_{-\pi/3} \qquad 3_{2\pi/3} \qquad 3_{\pi/6} \qquad 3e^{-i3\pi/4} \qquad 3e^{-i5\pi/4}$$

2. Si $z=1+3i$ y $w=4+i$, calcular

$$|2w-5z|^2 \qquad |z\overline{w}+\overline{z}w| \qquad \mathrm{Im}\,(3z^2-iw^2) \qquad (w-i\overline{w})^5 \qquad \mathrm{Im}\,(2iz^3+3w^2)$$

3. Escribir en forma polar los siguientes números complejos:

$$-3 \qquad 2i \qquad -4i \qquad 3+3i \qquad 3i-3 \qquad 3-3i \qquad \sqrt{3}-i \qquad 1+\sqrt{3}i \qquad 1-\sqrt{3}i$$

4. Deducir de la fórmula de Moivre las siguientes igualdades:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\,\mathrm{sen}^2 x, \qquad \mathrm{sen} 3x = 3\cos^2 x\,\mathrm{sen} x - \mathrm{sen}^3 x.$$

Dar las fórmulas análogas para los senos y cosenos de $4x$, $5x$, $6x$ y $7x$.

5. Probar la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}}.$$

6. Calcular:

$$\sqrt{-4-4i} \qquad \sqrt[6]{1} \qquad e^{3+\frac{\pi}{4}i} \qquad \log i \qquad \sqrt[3]{-1} \qquad \log\left(-e\frac{\sqrt{2}}{2}+ie\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \sqrt{8-6i}.$$

7. Calcular $(\sqrt[4]{4})^2$ y $\sqrt[4]{4^2}$. Comprobar que no coinciden.

8. Encontrar las raíces complejas de las siguientes ecuaciones:

a) $\cos z = 2$ b) $\mathrm{sen} z = i$ c) $e^{iz} = 1+2i$ d) $e^z = -\dfrac{1}{e}$ e) $\log z = 1 + \dfrac{\pi}{2} i$.

9. Demostrar que todo número complejo z de módulo 1, $z \neq -1$, puede escribirse en la forma $\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$, donde λ es un número real. Hallar λ en función del argumento del número complejo.

10. a) Resolver la ecuación $z^4 = -1+i$, $z \in \mathbb{C}$.

    b) Sea A el conjunto de puntos del plano complejo formado por las soluciones de la ecuación anterior. Determinar razonadamente el máximo de las distancias entre los puntos de A.