Grado en Matemáticas

“CÁLCULO INFINITESIMAL”

Grupo B. Curso 2015/2016, 1er cuatrimestre

Índice

Prof. Renato Álvarez Nodarse
Dpto. Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla
Despacho Módulo 15, 1er piso, 15-07.

E-mail: `ran@us.es`
WWW: `http://euler.us.es/~renato/` & `http://euler.us.es/~renato/clases.html`

Resumen de temas a tratar

1. *Números y funciones*

   a) Números y operaciones: Los números reales y sus propiedades. Operaciones con números. El valor absoluto y la distancia. Intervalos. El método de inducción. El axioma del supremo.

   b) Funciones elementales: Las funciones elementales, sus propiedades y sus gráficas: polinomios, funciones racionales, funciones trigonométricas y sus inversas, el logaritmo, la función exponencial y las funciones hiperbólicas.

2. *Introducción al concepto de límite*

   a) Introducción a las sucesiones numéricas: Límite de sucesiones numéricas. Convergencia y sucesiones monótonas. Primeras propiedades.

   b) Límite de funciones: Límites de funciones: definición y propiedades.

3. *Continuidad y derivabilidad*

   a) Continuidad: Funciones continuas. Tipos de discontinuidades: funciones monótonas. Propiedades de las funciones continuas: teoremas de Bolzano y Weierstrass.

   b) Derivadas: Definición de la derivada de una función. Reglas de derivación. Cálculo de derivadas. Propiedades de las funciones derivables: teoremas de Rolle y del valor medio.

   c) Aplicaciones de las derivadas: Aplicación el estudio del crecimiento de funciones y de sus extremos relativos. Aplicación al cálculo de límites: la regla de L'Hopital. Derivadas sucesivas: el polinomio de Taylor. Aplicación: estudio de la concavidad y convexidad de funciones.

4. *Complementos:* Manejo de un programa de cálculo simbólico como herramienta.

Símbolos.

• Dado un conjunto A, si el elemento a es miembro del conjunto A, diremos que a pertenece a A y lo denotaremos por $a \in A$. Si a no pertenece a A lo denotaremos por $a \notin A$.
• Si una condición se cumple para cualquiera sea el elemento a de A lo denotaremos por $\forall a \in A$, donde $\forall$ significa "para todo".
• Si existe un valor a del conjunto A para el cual se cumple determinada condición *cond* escribimos $\exists a \in A$ tal que se cumple *cond*, donde $\exists$ significa "existe". Si existe un sólo elemento a del conjunto que cumpla con la condición *cond* (el elemento es único) se escribe $\exists! a$.

Otros símbolos son:

• "Supongamos" se denota por $\sqsupset$.
• "Implica" se denota por $\Longrightarrow$ o $\longrightarrow$.
• "si y sólo si" (implicación en ambos sentidos) $\Longleftrightarrow$ o $\longleftrightarrow$.
• La unión de dos conjuntos A y B que es el conjunto C de elementos que o pertenecen a A o pertenecen a B lo denotaremos por $C = A \cup B$.
• La intersección de dos conjuntos A y B que es el conjunto C de elementos que pertenecen a A y pertenecen a B al mismo tiempo lo denotaremos por $C = A \cap B$.

1. El cuerpo ordenado de los números reales.

Los números naturales, enteros y racionales. Principio de inducción completa. Introducción axiomática del cuerpo ordenado de los números reales: axioma del supremo. Propiedad arquimediana. Intervalos de $\mathbb{R}$. Teorema de Cantor de los intervalos encajados. Módulo de un número real. Entornos. Conjuntos abiertos y cerrados: propiedades. Conjuntos compactos. Teoremas de Heine-Borel y de Bolzano-Weierstrass.

Concepto de función. Composición de funciones. Algunos tipos particulares de funciones: Polinomios y funciones racionales, funciones exponenciales y logaritmos, funciones trigonométricas y funciones hiperbólicas. Función inversa.

Los conjuntos de números que vamos a utilizar en este curso son los siguientes:

1. Los números naturales que denotaremos por $\mathbb{N}$ que es el conjunto de los números $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

2. Los números enteros que denotaremos por $\mathbb{Z}$ que es el conjunto de los números $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$.

3. Los números racionales que denotaremos por $\mathbb{Q}$ que es el conjunto de los números $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ \text{donde } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$.

Los números irracionales, que denotaremos por $\mathbb{I}$, es el conjunto de los números que no se pueden expresar de la forma $\dfrac{p}{q}$, donde $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$.

1.1. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Definición 1.1 *Definiremos al conjunto de los números reales, y lo denotaremos por $\mathbb{R}$, al conjunto de todos los números racionales $\mathbb{Q}$ e irracionales $\mathbb{I}$, o sea $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Veamos ahora la defінción axiomática de los números reales.*

Definición axiomática del conjunto numérico $\mathbb{R}$.

Definición 1.2 *Un conjunto de elementos es un cuerpo si se cumple que cualesquiera sean $a, b \in A$ el elemento suma "+" $a + b$ y el elemento multiplicación "·" $a \cdot b$ son elementos de A. Además las operaciones "+" y "·" satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Propiedades de la suma:*

   a) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(ley asociativa)*

   b) *Existe un elemento $0 \in A$ tal que para todo $a \in A$, $a + 0 = 0 + a = a$ (elemento nulo de la suma)*

   c) *Para todo $a \in A$, existe un elemento $(-a) \in A$ tal que $(-a) + a = a + (-a) = 0$ (elemento inverso de la suma)*

   d) $a + b = b + a$ *(ley commutativa)*

2. *Propiedades de la multiplicación:*

   a) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *(ley asociativa)*

   b) *Existe un elemento $1 \in A$ tal que para todo $a \in A$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (elemento nulo de la multiplicación)*

c) *Para todo $a \neq 0$ existe un elemento $(a^{-1}) \in A$ tal que $(a^{-1}) \cdot a = a \cdot (a^{-1}) = 1$ (elemento inverso de la multiplicación)*

d) *$a \cdot b = b \cdot a$ (ley commutativa)*

3. *Propiedades de la suma y multiplicación:*

    a) *$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (ley distributiva)*

Si un conjunto de elementos satisface los axiomas anteriores se le denomina cuerpo. De la definición anterior deducimos que los números naturales y los enteros no conforman un cuerpo pues para cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ o $n \in \mathbb{Z}$ no necesariamente existe el inverso respecto a la multiplicación por ejemplo, si $n = 2$ el inverso sería $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Es fácil comprobar que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo.

Como consecuencia de los axiomas anteriores podemos probar fácilmente que para todo $x \in A$, $0 \cdot x = 0$, $(-1) \cdot x = (-x)$, que el elemento nulo 0 es único que el elemento inverso de la suma es único, entre otras muchas:

1. Dados $a, b \in A$, la ecuación $a + x = b$ tiene solución única, es decir sólo hay un valor de $x \in A$ que cumpla con la ecuación.
2. Existe un único elemento neutro 1 respecto a la multiplicación.
3. Para todo $x \in A$, $x \neq 0$ existe un único inverso x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.
4. Dados $a, b \in A$, $a \neq 0$, la ecuación $a \cdot x = b$ tiene solución única, es decir sólo hay un valor de $x \in A$ que cumpla con la ecuación.
5. Si $x \cdot y = 0$, entonces ò $x = 0$ ò $y = 0$.
6. Para todo $x \in A$, $(-1) \cdot (-x) = x$.
7. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Una propiedad importante que debemos considerar es el *orden*. Dentro de los números naturales es evidente que existe cierto orden. Por ejemplo, 1 es menor que 2. Además sólo hay un natural que sea mayor o igual que 3 y menor igual que 3: el 3. Por tanto definamos una operación de orden que ha de cumplir ciertos requisitos.

Definición 1.3 *Diremos que un conjunto de elementos A es un conjunto ordenado si existe una relación de orden $\leq$ tal que cualesquiera sean a y b números reales se tiene que se cumple que $a \leq b$ o no se cumple y además se deben cumplir las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $a \in A$, $a \leq a$*
2. *Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.*
3. *Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.*
4. *Para todos $a, b \in A$, o $a \leq b$ o $b \leq a$.*

Si además, A es un cuerpo, entonces para cualesquiera sean a, b y c de A se tiene que

5. Si $a \leq b$ *entonces* $a + c \leq b + c$.

6. Si $0 \leq a$ *y* $0 \leq b$ *entonces* $0 \leq a \cdot b$.

Es fácil comprobar que los números racionales son un cuerpo ordenado. No obstante hemos visto que existen algunos otros números que no son racionales. Es decir, ¡la recta de los números racionales tiene huecos vacíos! Ello nos conduce a tener que imponer algún axioma más que nos permita incluir los números irracionales. Existen distintas formas de hacerlo. La primera de ellas se debió al matemático alemán Richard Dedekind que introdujo la noción de *cortaduras*. Nosotros vamos a introducir otra forma más sencilla conocida como el axioma de continuidad o completitud que nos ayudará a definir con más precisión el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Definición 1.4 *Se denomina al conjunto* $\mathbb{R}$ *conjunto de los números reales, y sus elementos números reales, al cuerpo ordenado no nulo que cumplen los axiomas descritos en las definiciones 1.2 (axiomas de cuerpo) y 1.3 (axiomas de orden) y que además satisfagan el siguiente axioma de completitud o continuidad, comúnemnete denominado como propiedad de las cortaduras de Dedekind:*

Si A *y* B *son dos subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *no nulos tales que cualquiera sean* $a \in A$ *y* $b \in B$ *se tiene que* $a \leq b$*, entonces existe un* $c \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $a \in A$ *y* $b \in B$*,* $a \leq c \leq b$.

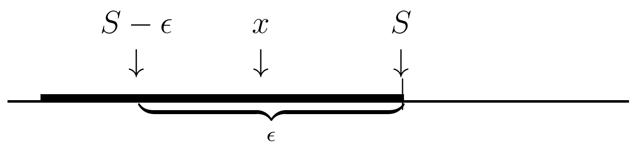
Definición 1.5 *Llamaremos supremo de un conjunto acotado superiormente, y lo denotaremos por* $\sup A$*, a la menor de las cotas superiores de* A*. Llamaremos ínfimo de un conjunto acotado inferiormente, y lo denotaremos por* $\inf A$*, a la mayor de las cotas inferiores de* A.

El axioma de completitud es equivalente al siguiente teorema:

Teorema 1.1 *(Axioma del supremo) Todo conjunto acotado superiormente tiene un supremo.*

Proposición 1.1 *Sea* A *un conjunto acotado superiormente. Para todo* $\varepsilon > 0$ *(tan pequeño como se quiera) existe un* $x \in A$ *tal que* $x > \sup A - \varepsilon$.

Gráficamente:



Es fácil comprobar que todo subconjunto acotado superiormente de $\mathbb{N}$ tiene un elemento máximo. Como consecuencia se tiene que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente y que $\mathbb{Z}$ es no acotado inferiormente y superiormente.

Proposición 1.2 *Sea* $x > 0$ *un número real cualquiera. Entonces siempre existe un número natural* n *tal que* $x < n$.

Teorema 1.2 *(Propiedad arquimediana de los números reales) Sea* $a > 0$ *un número real cualquiera (tan pequeño como se quiera) y sea* $b > 0$ *otro número real (tan grande como se quiera). Entonces existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $b < n\,a$.

Como consecuencia de la propiedad arquimediana de los números tenemos

- **Corolario 1:** Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $x \geq 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \leq 1/n$, entonces $x = 0$.

- **Corolario 2:** Sea $x \geq 0$. Si para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $x < \epsilon$, entonces $x = 0$. Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$
- **Corolario 3:** (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) Cualesquiera sean a, $b \in \mathbb{R}(a < b)$, existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.

El método de inducción: El método de inducción matemática se utiliza para probar que cierta afirmación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ comenzando por cierto n_0. Para ello hay que demostrar que:

1. La afirmación es válida para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$,
2. Suponiendo que es cierta para **cualquier** $k \in \mathbb{N}$ **con** $k \geq n_0$ probar que es cierta para $k + 1$.

Finalmente mencionaremos dos teoremas de gran importancia.

Teorema 1.3 *(Lema de los intervalos encajados de Cantor)*
Sea $\{I_k\}$ una sucesión de intervalos cerrados tales que $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset I_n = [a_n, b_n]$, para todo n natural (sucesión de intervalos encajados). Entonces existe al menos un punto $\xi \in \mathbb{R}$ que pertenece a todos los intervalos. Si además, para todo $\epsilon > 0$, en la sucesión de intervalos encajados existe al menos un intervalo cuya longitud $|I_k| = b_k - a_k$ es menor que ϵ, entonces el punto ξ es único.

Teorema 1.4 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass para los conjuntos númericos)*
Cualquier subconjunto infinito acotado de $\mathbb{R}$ tiene por lo menos un punto de acumulación

1.2. Problemas complementarios.

Problema 1.1 *Demuéstrese por inducción las siguientes fórmulas:*

$$2^n \leq n!, \qquad \textit{para todo} \;\; n \geq 4$$
$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$$
$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

Problema 1.2 *Demuestra las siguientes igualdades:*

1. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
3. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Problema 1.3 *Demuéstrese que $n^5 - n$ es múltiplo de 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Problema 1.4 *Dígase si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:*

1. *La suma de dos números irracionales es un número irracional.*
2. *El producto de dos números irracionales es un número irracional.*
3. *$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es un número irracional.*

Problema 1.5 *Demuéstrese:*

1. *Entre dos números reales existe otro número real.*
2. *Entre dos números racionales existe un número irracional.*

Problema 1.6 *Escríbase el conjunto de los x que verifican*

$$\begin{array}{llll} a) & |x-3| \leq 8 & b) & |x-1| + |x-2| > 1 \\ c) & |x-1| \cdot |x+2| = 3 & d) & ||x+1| - |x-1|| < 1. \end{array}$$

Problema 1.7 *Encuéntrese el error en el siguiente razonamiento:*

$$\begin{gathered} x = y \Longrightarrow x^2 = xy \Longrightarrow \\ x^2 - y^2 = xy - y^2 \Longrightarrow (x+y)(x-y) = y(x-y) \Longrightarrow \\ x + y = y \Longrightarrow 2y = y \Longrightarrow 2 = 1. \end{gathered}$$

Problema 1.8 *Hállese el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos, indicando en su caso si son máximo o mínimo:*

$$\begin{array}{ll} A = \{-1\} \cup [2,3) & B = \{3\} \cup \{2\} \cup \{-1\} \cup [0,1] \\ C = \{2 + (1/n) : n \in \mathbb{N}\} & D = \{(n^2+1)/n : n \in \mathbb{N}\}. \end{array}$$

Problema 1.9 *Hállese el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos, indicando en su caso si son máximo o mínimo:*

1. $A = \{2^{-p} + 3^{8q} + 5^{-r}, \quad p, q, r \in \mathbb{Z}\}$,
2. $B = \{x \in \mathbb{R}, \quad 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$,
3. $C = \{x \in \mathbb{R}, \quad (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0, \quad a < b < c < d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$,

Problema 1.10 *Demuéstrese que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \text{máx}(x,y) &= (x + y + |x-y|)/2, \\ \text{mín}(x,y) &= (x + y - |x-y|)/2. \end{aligned}$$

Problema 1.11 *Si m, n, r, y s son números enteros, con $n, s > 0$, pruébese que*

$$\frac{m}{n} < \frac{r}{s} \Longrightarrow \frac{m}{n} < \frac{m+r}{n+s} < \frac{r}{s}.$$

2. Funciones de una variable real.

Definición 2.1 *Una función f definida sobre un subconjunto A de los números reales es una regla (aplicación) que a cada elemento de A le hace corresponder uno y sólo un elemento de $\mathbb{R}$.*

El mayor subconjunto de A tal que f esté definida se denomina dominio de f y lo denotaremos por Dom(A).

Dada una función f la denotaremos por $f : A \mapsto \mathbb{R}$, donde, usualmente A coincide con el dominio de f.

Si a $x \in A$ le corresponde un valor $f(x) \in \mathbb{R}$ según la función $f : A \mapsto \mathbb{R}$, diremos que $f(x)$ es la imagen de x según f. Al conjunto de todas las imágenes $f(x)$ para $x \in A$ se le denomina imagen de f y le denotaremos por $f(A)$.

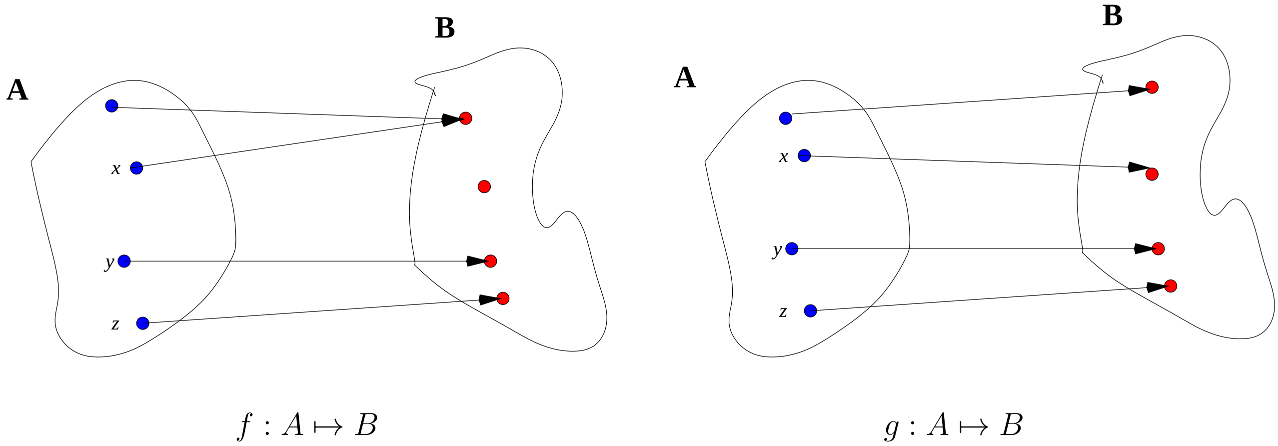


Figura 1: Funciones $f : A \mapsto B$ y $g : A \mapsto B$.

Ejemplo 2.1 *1.* $r : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad r(x) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ *(constante)*

2. $t : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad t(x) = x.$

3. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$

4. $g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2.$ $(\mathrm{Dom}\, g \neq \mathrm{Dom}\, f, \quad \Longrightarrow \quad g(x) \neq f(x))$

5. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \sqrt{x}.$

Usualmente para *representar* una función se usa su gráfica. La gráfica de una función es el conjunto de los puntos (x, y) del plano *cartesiano* tales que $y = f(x)$.

Las funciones del ejemplo anterior están regresentadas en la figura 2.

Dos funciones que tengan el mismo dominio se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Por ejemplo, $f + \beta \cdot t - r$ $(\beta \in \mathbb{R})$, $\dfrac{r}{f+1}$, etc.

Definición 2.2 *Se dice que una función $f(x)$ es monótona creciente en un subconjunto B de su dominio si $\forall x_1, x_2 \in B$ tal que $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.*

Por ejemplo: $t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ es creciente en todo $\mathbb{R}$

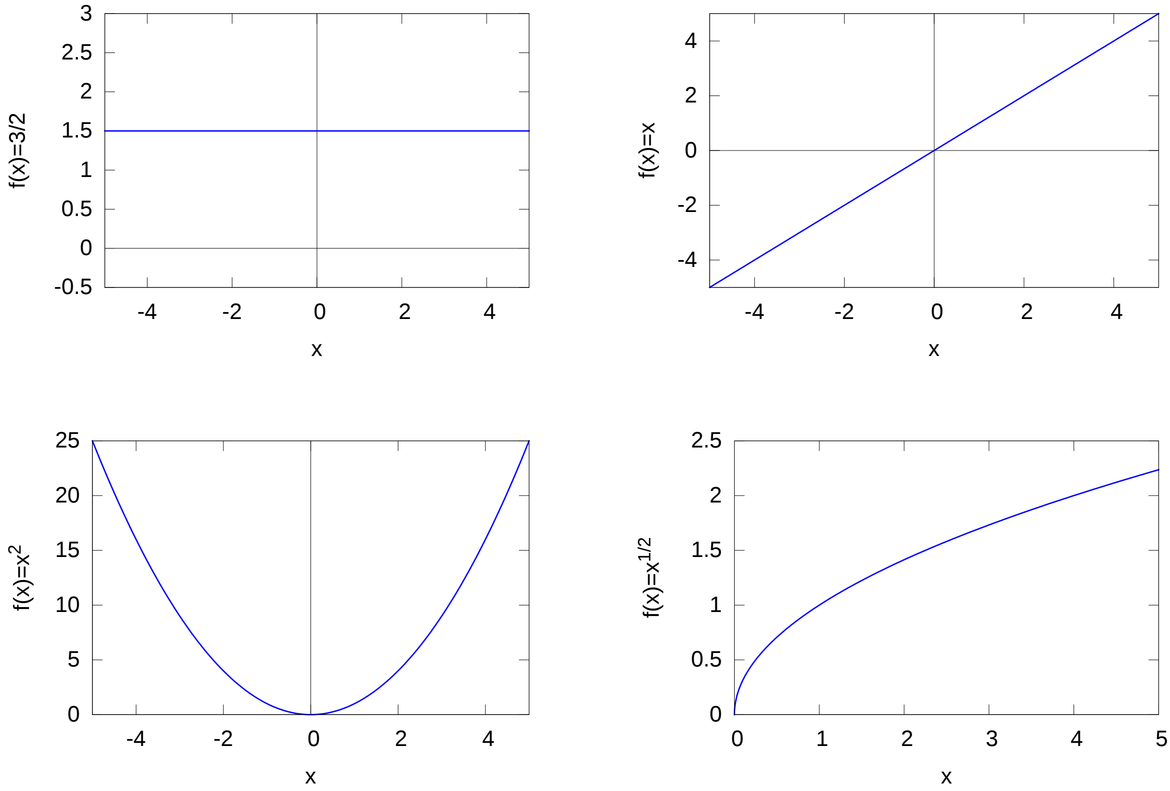


Figura 2: Funciones $f(x) = \alpha$, x, x^2 y $\sqrt{x}$.

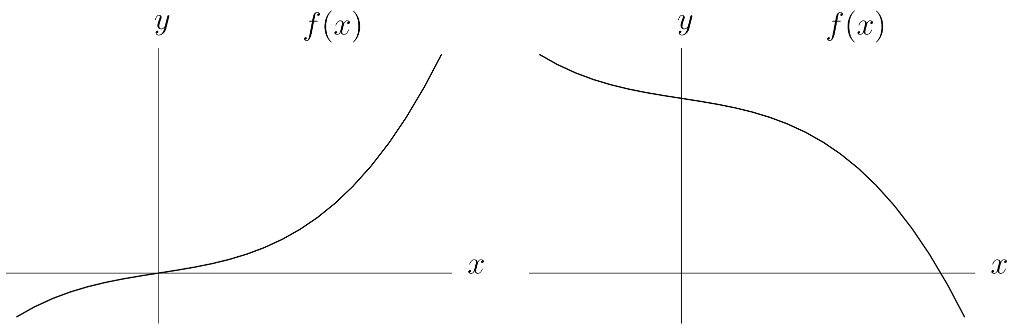


Figura 3: Funciones creciente (izquierda) y creciente (derecha).

Definición 2.3 *Se dice que una función $f(x)$ es monótona decreciente en un subconjunto B de su dominio si $\forall x_1, x_2 \in B$ tal que $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.*

Por ejemplo: $t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ es decreciente en todo $\mathbb{R}$

Definición 2.4 *Se dice que una función $f(x)$ es monótona no decreciente en un subconjunto B de su dominio si $\forall x_1, x_2 \in B$ tal que $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Definición 2.5 *Se dice que una función $f(x)$ es monótona no creciente en un subconjunto B de su dominio si $\forall x_1, x_2 \in B$ tal que $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Definición 2.6 *Se dice que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada superiormente si $\forall x \in A$, existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$.*

Por ejemplo, la función $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ está acotada superiormente pues $g(x) \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$.

Definición 2.7 *Se dice que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada inferiormente si $\forall x \in A$, existe un $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$.*

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ está acotada inferiormente pues $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Definición 2.8 *Se dice que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada, si f es acotada superiormente e inferiormente. Es decir si $\forall x \in A$, existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$.*

Por ejemplo: $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ está acotada pues $|g(x)| = x^2 \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$.

Definición 2.9 *Se dice que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es no acotada si $\forall M \in \mathbb{R}$, existe un $x \in A$ tal que $|f(x)| > M$.*

Por ejemplo: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es no acotada.

Definición 2.10 *Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que si $x \in A$ entonces $-x \in A$ (el dominio tiene que ser un conjunto simétrico respecto al origen) se llama función par si $f(-x) = f(x)$ e impar si $f(-x) = -f(x)$.*

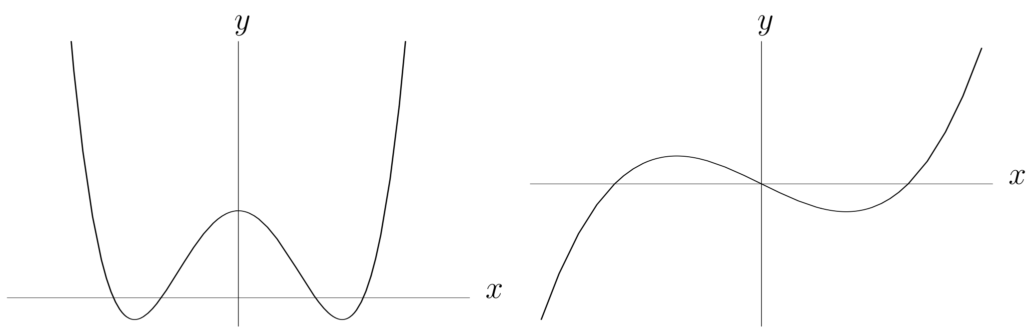


Figura 4: Funciones par (izquierda) e impar (derecha).

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es una funciónpar y la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ es una función impar.

La función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 + x^2$ no es par ni impar pues $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$.

Las funciones $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y $g : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ no son ni pares ni impares.

Definición 2.11 *Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es periódica si existe un $h > 0$, $h \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x+h) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Al menor número h que cumple la condición anterior se denomina periodo de f.

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - E(x)$ es periódica con periodo 1.

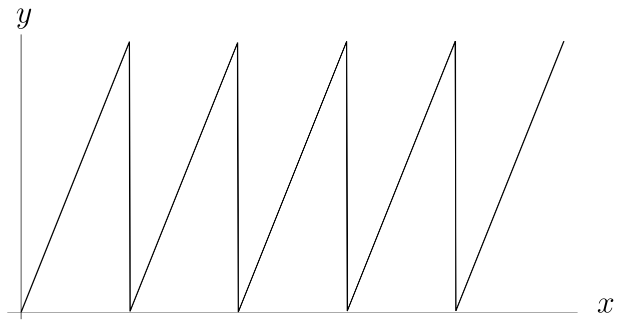


Figura 5: Función periódica $f(x) = x - E(x)$.

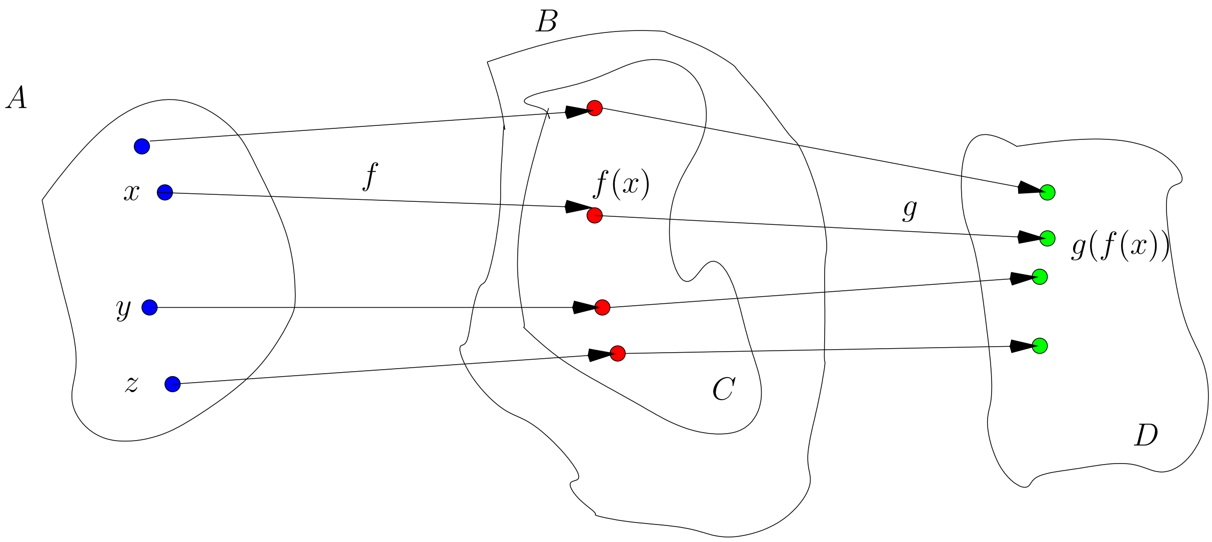


Figura 6: Composición de funciones $g(f(x))$. $f : A \mapsto C = f(A) \quad g : B \mapsto D$, $C = f(A) \subset B$.

Definición 2.12 *(Composición de funciones)*
Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuya imagen es $f(A)$, y sea $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuyo dominio es B. Supongamos que $f(A)$ y B son tales que $f(A)$ está contenido en B, es decir, que todo $y \in f(A)$ pertenece a B. Entonces definiremos la función $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y la denominaremos función compuesta de g en f a la función que le hace corresponder a cada $x \in A$ un número real tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ejemplo: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$. $\operatorname{img} f \subset \operatorname{Dom} g$, $\Longrightarrow$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2.$$

$\operatorname{img} g \subset \operatorname{Dom} f$, $\Longrightarrow$ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2.$$

Nótese que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. Si $\exists (f \circ g)(x) \not\Longrightarrow \exists (g \circ f)(x)$.

Ejemplo: $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ y $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$,

$(f \circ g)(x) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2$ pero $\nexists (g \circ f)(x)$.

Definición 2.13 *Una función se llama sobreyectiva si todo elemento y de $\mathbb{R}$ es imagen de algún elemento x del dominio, es decir $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y, \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Img} f \equiv \mathbb{R}.$$

Definición 2.14 *Una función se llama inyectiva si todo elemento y de la imagen de f es imagen a lo sumo de uno y sólo un elemento x del dominio. Es decir $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que*

$$\forall y_1, y_2 \in \operatorname{Img} f, \text{ tal que } y_1 = f(x_1) = y_2 = f(x_2), \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Definición 2.15 *Una función inyectiva y sobreyectiva se denomina biyectiva.*

Una función es sobreyectiva si, para todo y real, la ecuación $f(x) = y$ tiene al menos una solución.

f es inyectiva si la ecuación $f(x) = y$ tiene o bien una única solución, o bien no tiene solución.

f es biyectiva si para todo y real, la ecuación $f(x) = y$ tiene una y sólo una solución solución.

Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3$ es sobreyectiva

$f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es inyectiva

Teorema 2.1 *Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva entonces existe una y sólo una función g definida sobre la imagen de f tal que $f(g(x)) = x$ para todo x de la imagen de f.*

Definición 2.16 *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva. Llamaremos función inversa de f y la denotaremos por f^{-1} a la función $f^{-1} : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in$ Imagen f, $f(f^{-1}(x)) = x$. Es decir, el dominio de f^{-1} será la imagen de f y la imagen de f^{-1} será el dominio de f.*

Además si f es inyectiva f^{-1} también lo es y por tanto se cumple que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x del dominio de f.

La función $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es inyectiva $\Longrightarrow f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene inversa y ficha inversa es $f^{-1} : [0, +\infty) \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

En la figura 7 mostramos como se puede construir el gráfico de la función inversa a partir de la función original para el caso de $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Teorema 2.2 *Si f es una función monótona (estrictamente) creciente o decreciente en A entonces es inyectiva en A.*

Es importante destacar que las condiciones del teorema son suficientes, es decir que si tenemos monotonía, tenemos inyectividad pero no viceversa, es decir inyectividad no implica monotonía. Un ejemplo puede ser la función (ver figura 8)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

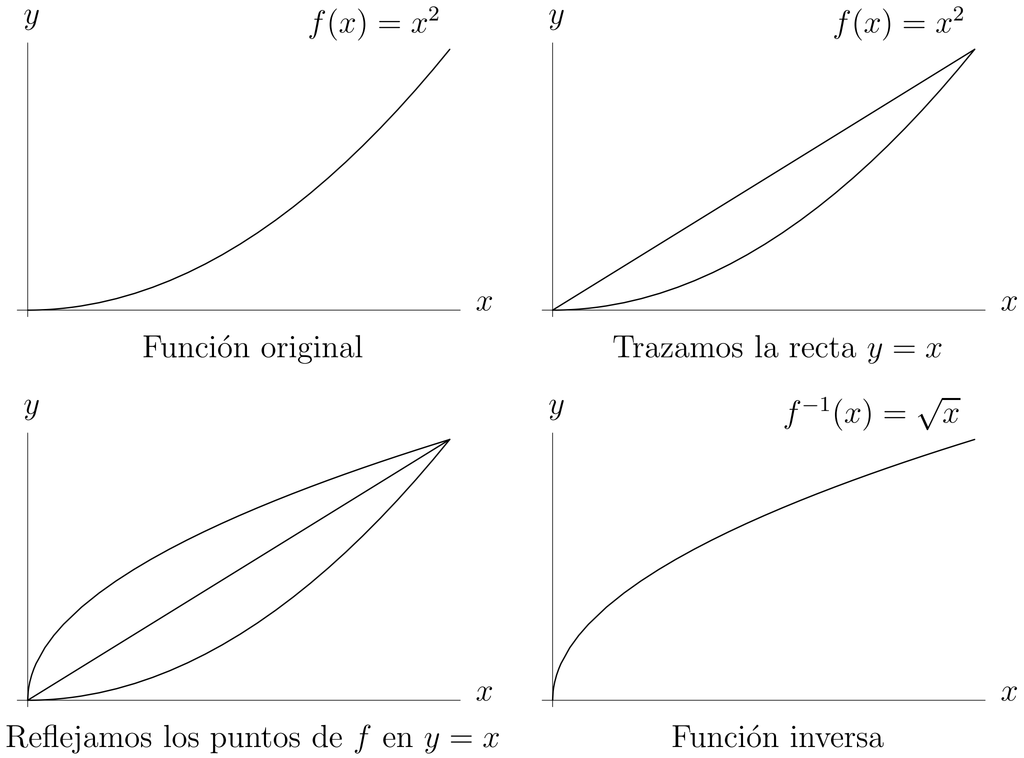


Figura 7: Construcción de la función inversa de x^2 en $[0, 1]$

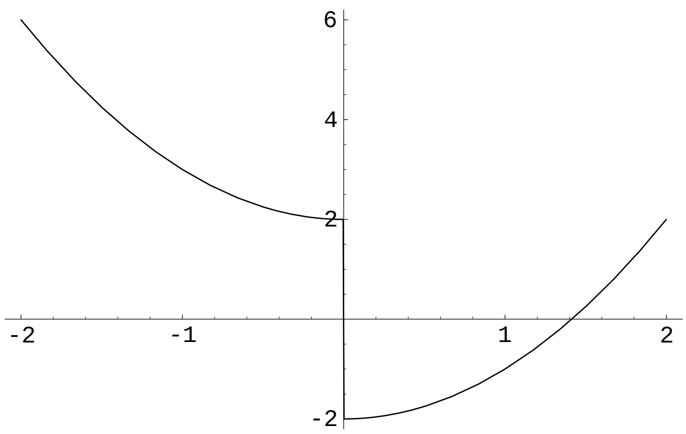


Figura 8: Inyectividad no implica monotonía.

2.1. Funciones elementales.

Función potencial entera.

Comenzaremos con las potencias naturales. Si $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n \equiv \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ veces}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Además, como $x^{-n} = 1/x^n$, podemos definir, para todo $x \neq 0$ la función potencial con exponente entero negativo.

Funciones circulares.

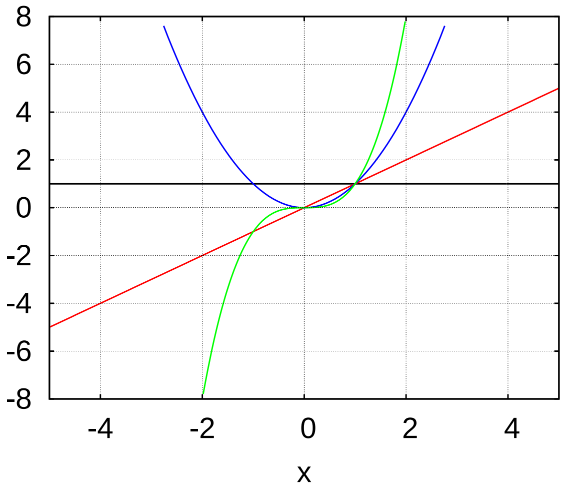


Figura 9: Función potencial: $f(x) = 1, x, x^2, x^3$.

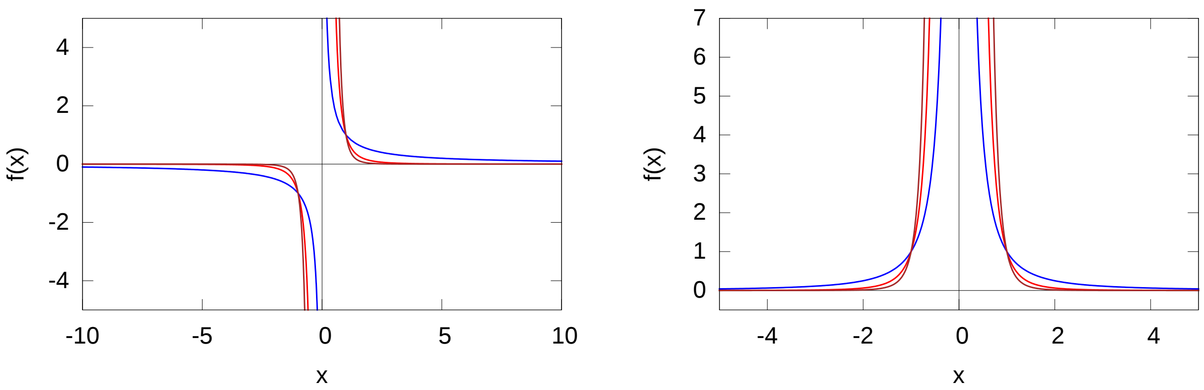


Figura 10: Función potencial: $f(x) = 1/x^5, 1/x^3, 1/x$ (izquierda) y $f(x) = 1/x^4, 1/x^2$ (derecha).

1. Funciones seno y coseno.

Para definir las funciones seno y coseno echaremos manos de la geométria elemental.

Definiremos el seno de el ángulo x como el número cuyo valor absoluto viene dado mediante la razón entre el lado opuesto a x $\overline{AB}$ y la hipotenusa (el radio) del triángulo $\widehat{0AB}$ y cuyo signo es $+$ o $-$ si el segmento $\overline{BA}$ está orientado hacia arriba o hacia abajo, respectivamente, y lo denotaremos por $\operatorname{sen} x$.

El coseno del ángulo x será entonces un número cuyo valor absoluto viene dado mediante la razón entre el lado adyacente a x $\overline{0B}$ y la hipotenusa y cuyo signo corresponde al $+$ si el segmento $\overline{0B}$ está orientado hacia la derecha y $-$ si es a la izquierda y lo denotaremos por $\cos x$.

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

Además, a partir del gráfico 11 fácilmente se verifica que

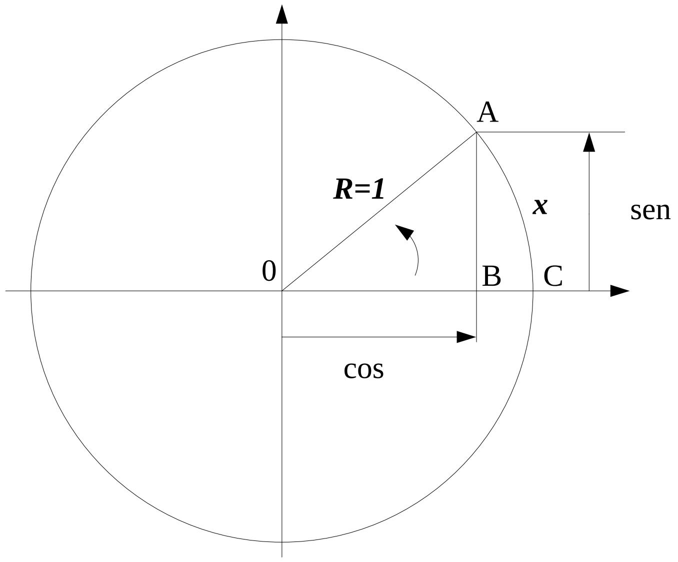


Figura 11: Definición de las funciones seno y coseno.

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, && \\
&\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, && \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x \\
&\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, && \cos(x + 2\pi) = \cos x \\
&\cos(-x) = \cos x, && \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x.
\end{aligned}
$$

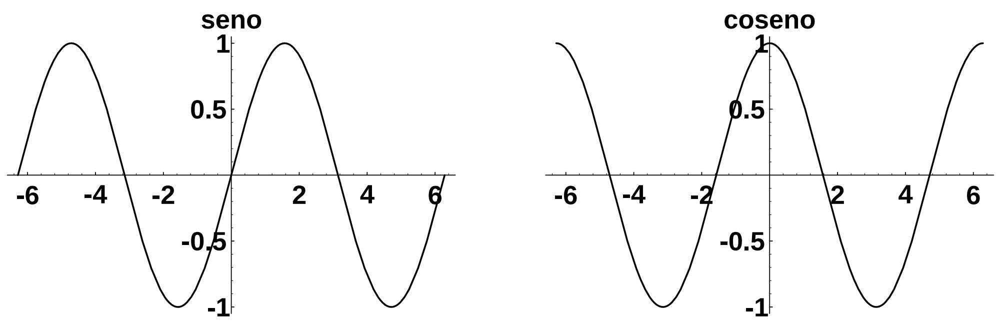


Figura 12: Funciones seno y coseno: $f(x) = \operatorname{sen} x, \cos x$.

Nótese que la gráfica del coseno se obtiene de la gráfica del seno al trasladar ésta última $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

Una de las principales propiedades del seno y el coseno son las denominadas *fórmulas de adición*

Entonces, usando sencillos razonamientos geométricos podemos fácilmente comprobar que

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$$

y

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

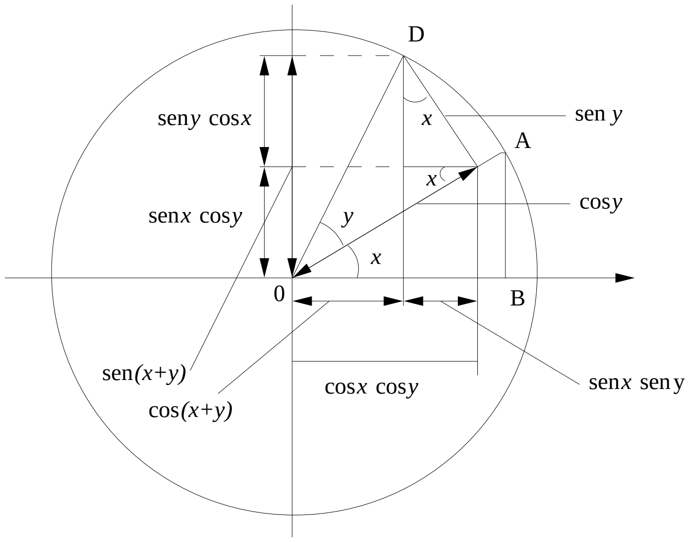


Figura 13: Fórmulas de adición para el seno y el coseno.

Nótese que a partir una cualquiera de las dos fórmulas anteriores se deduce la otra.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+y) = \;& \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) + (-y)\right)\right) \\
= \;& \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cos(-x) - \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{sen}(-y) \\
= \;& \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x.
\end{aligned}$$

De las expresiones anteriores se deducen otras muchas, por ejemplo

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,$$

de donde a su vez tenemos

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

o, equivalentemente,

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \qquad \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

2. Función tangente.
   $f : \mathbb{R} - \{(2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. En fácil comprobar que la tangente es una función periódica con periodo π cuya imagen es todo $\mathbb{R}$.

También podemos definir las funciones cotangente $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, secante $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, cosecante $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Desiguladades

Supongamos que el ángulo x está en el primer cuadrante, es decir $0 \le x \le \pi/2$.

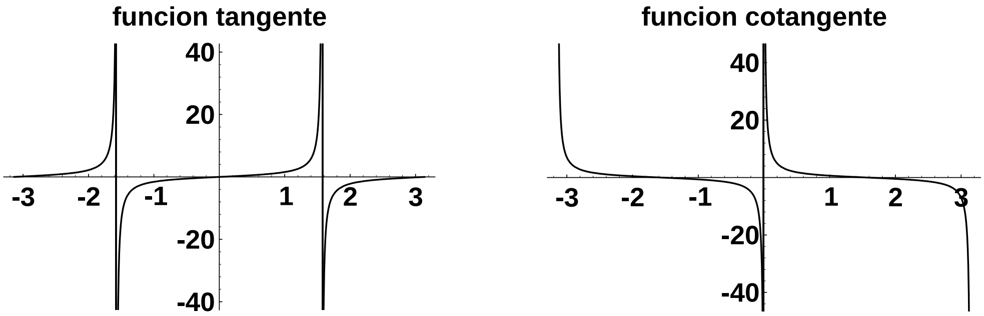


Figura 14: Funciones tangente y cotangente: $f(x) = \tan x$, $\operatorname{ctg} x$.

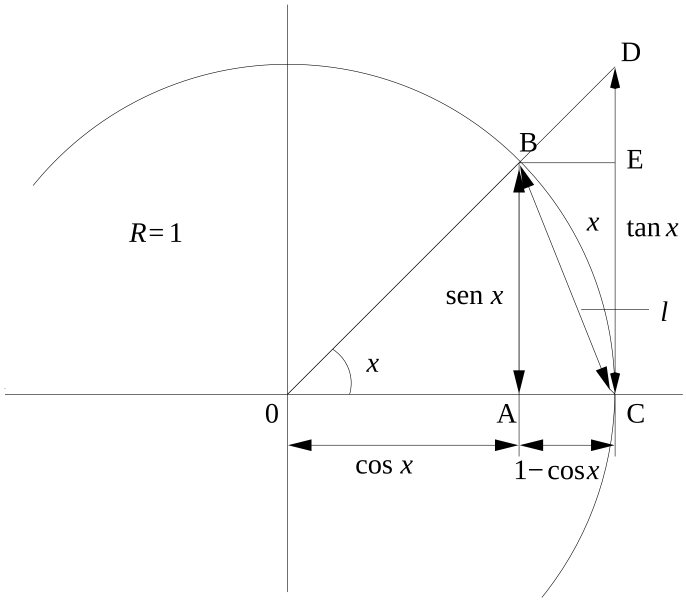


Figura 15: Desigualdades para el seno y el coseno.

$$0 \leq \frac{1 - \cos x}{x} \leq \frac{x}{2}.$$

$$1 - \frac{1 - \cos x}{x} < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

$$\operatorname{sen} x < x < \tan x \quad \Longleftrightarrow \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Funciones circulares inversas.

El seno, en $[-\pi/2, \pi/2]$ es monótona creciente, entonces podemos definir el inverso de la función seno restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Análogamente podemos considerar la función coseno en el intervalo $[0, \pi]$ La tangente en $[-\pi/2, \pi/2]$ obtenemos una función creciente cuya inversa estará definida en todo $\mathbb{R}$.

Así tendremos las siguientes definiciones:

1. Función arcoseno.
   $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$. El arcoseno se define como el único $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\operatorname{sen} y = x$. La imagen del arcoseno es el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
2. Función arcocoseno.
   $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arc\,cos} x$. El arcocoseno se define como el único $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos y = x$. La imagen del arcocoseno es el intervalo $[0, \pi]$.

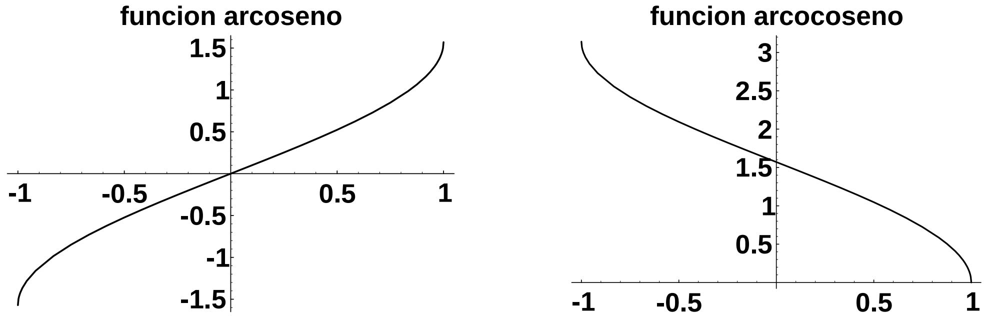


Figura 16: Funciones arcoseno $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ y arcocoseno $f(x) = \operatorname{arc\,cos} x$.

3. Función arcotangente.
   $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$. La arcotangente se define como el único $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\tan y = x$. La imagen de la arcotangente es el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

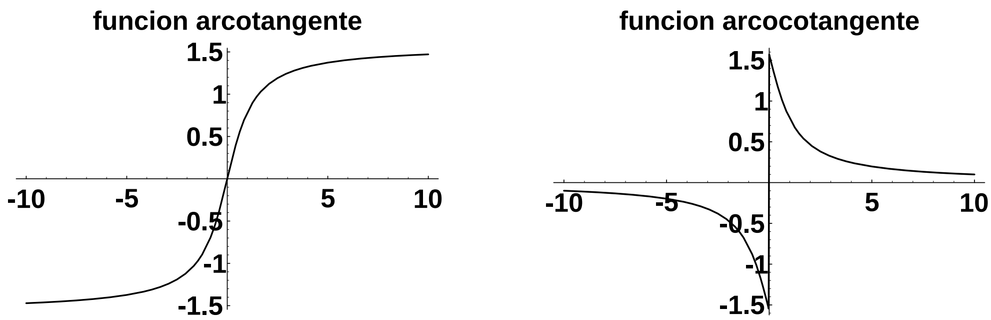


Figura 17: Funciones arcotangente y arcocotangente: $f(x) = \arctan x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Para construir las correspondientes gráficas basta usar el método descrito anteriormente. Como ejemplo lo mostraremos para la función inversa del seno (figura 18) y del coseno (figura 19).

De manera análoga podemos definir las funciones inversas de la $\operatorname{ctg} x$, $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$, $\sec x$, $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x$ y de la $\operatorname{cosec} x$, $f^{-1}(x) = \operatorname{arccosec} x$.

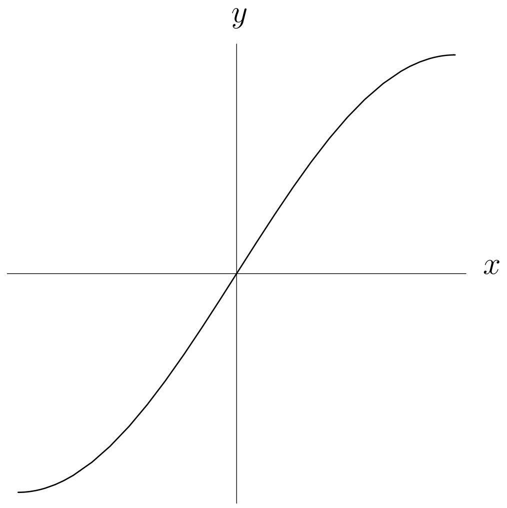
Funciones exponenciales y logarítmicas.

La función exponencial no es sencilla de definir sin usar herramientas más avanzadas del análisis.

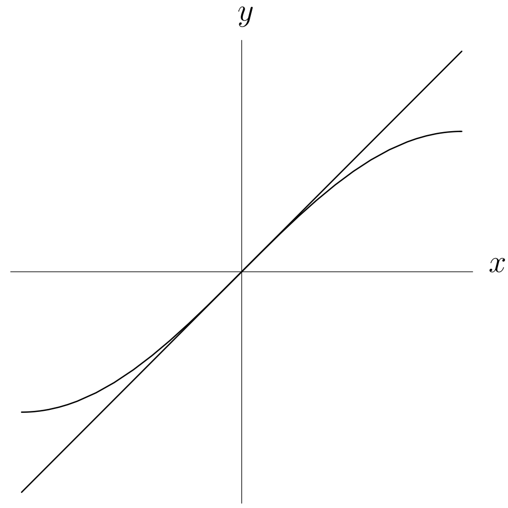
Es fácil comprobar que $a^r > 0$ para todo $r \in \mathbb{Q}$ y además

$$1) \quad a^0 = 1\,. \qquad\qquad 2) \quad \forall r, s \in \mathbb{Q}, \quad a^r\, a^s = a^{r+s}.$$

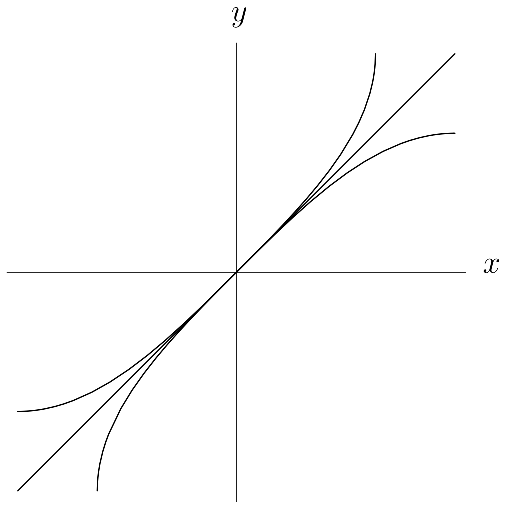
$$3) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$



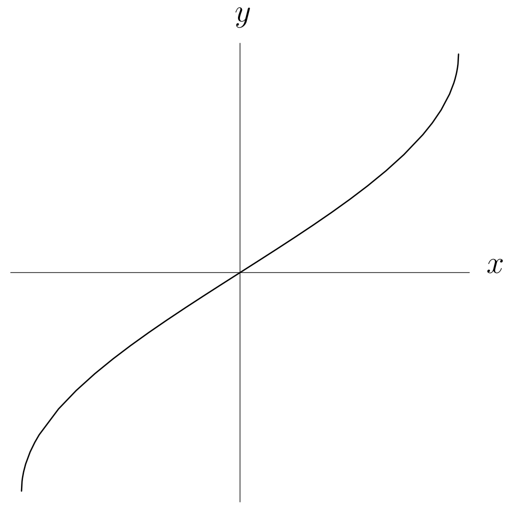
Función $\sin x$ en $[-\pi/2, \pi/2]$



Trazamos la recta $y = x$



Reflejamos los puntos de f en $y = x$



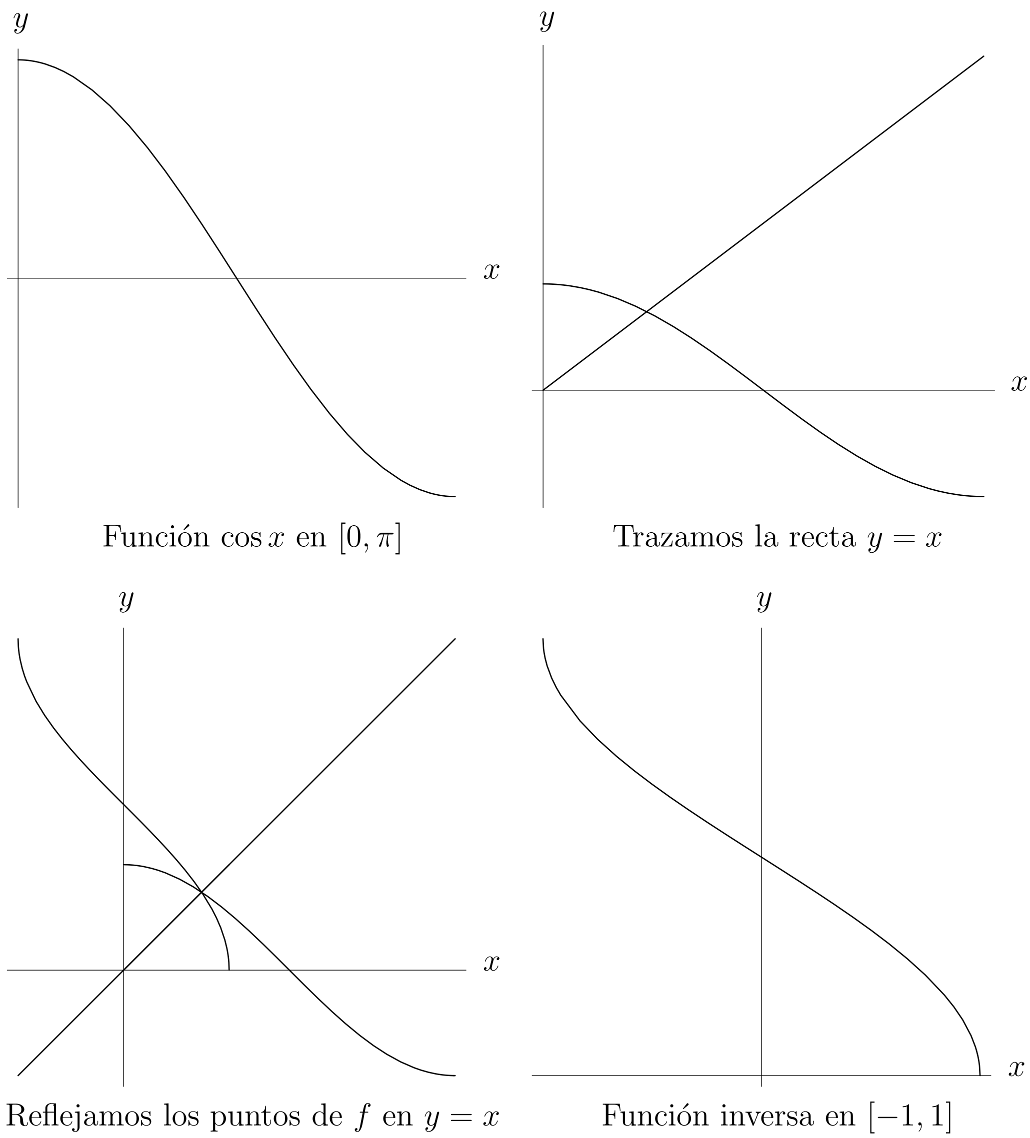
Función inversa en $[-1, 1]$

Figura 18: Construcción de la función inversa del seno.

Extender las propiedades anteriores a todo $\mathbb{R}$ de forma que la imagen de a^x sea el conjunto "continuo" $(0, +\infty)$. El logaritmo lo definiremos simplemente como la inversa de la exponencial.

1. Función exponencial.
   $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, donde $a > 0$. Esta función es creciente en todo su dominio si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$. La imagen de a^x es $(0, +\infty)$.

2. Función logarítmica.
   $f : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, donde la base de logarítmo $a > 0$. Esta función es la la inversa de la función exponencial. Es decir, el $\log_a x$ es el único $y \in \mathbb{R}$ tal que $a^y = x$. El $\log_a x$ es creciente en todo su dominio si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$ y su imagen es $\mathbb{R}$.



Función $\cos x$ en $[0, \pi]$ — Trazamos la recta $y = x$

Reflejamos los puntos de f en $y = x$ — Función inversa en $[-1, 1]$

Figura 19: Construcción de la función inversa del coseno.

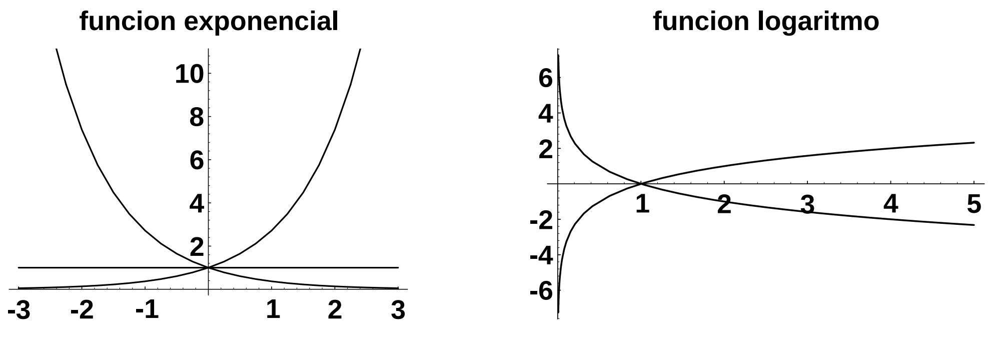


Figura 20: Funciones exponencial y logaritmo: $f(x) = e^x, \log_a x$.

Las funciónes logarítmicas satisfacen las propiedades:

$$1) \quad \log_a 1 = 0\,. \quad 2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

$$3) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \log_a(x^y) = y \, \log_a x.$$

$$4) \quad \forall x, a, b \in (0, +\infty), \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Funciones hiperbólicas.

1. Función seno hiperbólico.
   $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. La imagen de $\operatorname{sh} x$ es $\mathbb{R}$.
2. Función coseno hiperbólico.
   $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. La imagen de $\operatorname{ch} x$ es $[1, +\infty)$.
3. Función tangente hiperbólica.
   $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. La imagen de $\tanh x$ es el intervalo $(-1, 1)$.

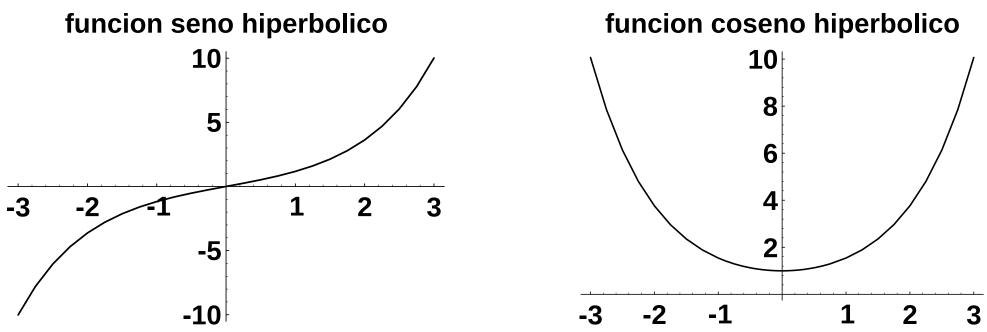


Figura 21: Funciones seno y coseno hiperbólicos: $f(x) = \operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.

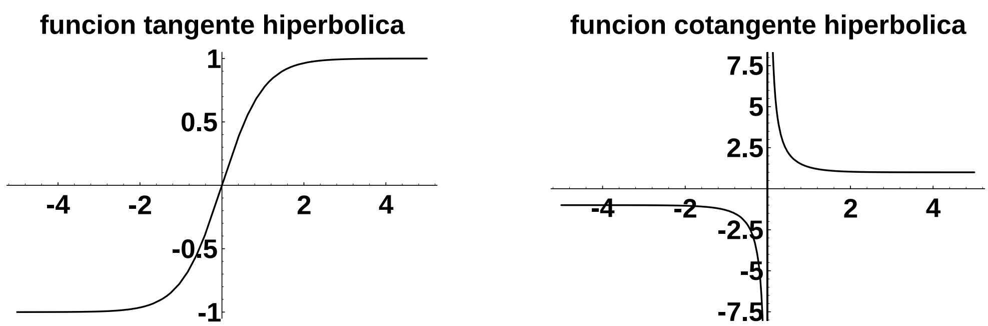


Figura 22: Funciones tangente y cotangente hiperbólicas: $f(x) = \tanh x$, $\operatorname{cth} x$.

También podemos definir las funciones cotangente hiperbólica $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$, secante hiperbólica $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ y la cosecante hiperbólica $\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$.

Las funciones hiperbólicas satisfacen las siguientes propiedades:

$$1) \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1\,.$$

$$2) \quad \operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y\,.$$

$$3) \quad \operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y\,.$$

$$4) \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}\,. \quad 5) \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}\,.$$

3. Sucesiones de números reales.

Sucesiones. Límite de una sucesión: propiedades. Sucesiones monótonas. Subsucesiones y límites de oscilación. Teorema de Bolzano-Weierstrass. El número e. Sucesiones de Cauchy. Completitud de $\mathbb{R}$. Cálculo práctico de límites.

Definición 3.1 *Una sucesión de números reales* $\{a_n\}$ *no es más que una regla que a cada número natural le hace corresponder otro real:*

$$a_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}, \qquad a_n = f(n), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Por ejemplo, $a_n = 1$, una sucesión constante; $a_n = n$, la sucesión de los números naturales; $b_n = \frac{1}{n}$, la sucesión de los inversos de los números naturales; etc.

3.1. Cáracter de las sucesiones: monotonía y acotación.

Definición 3.2 *Se dice que una sucesión* $\{a_n\}$ *es monótona creciente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n^2$ es monótona creciente.

Definición 3.3 *Se dice que una sucesión* $\{a_n\}$ *es monótona decreciente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} < a_n$.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ es monótona decreciente.

Definición 3.4 *Se dice que una sucesión* $\{a_n\}$ *es monótona no decreciente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$.

Definición 3.5 *Se dice que una sucesión* $\{a_n\}$ *es monótona no creciente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$.

Ejemplos de sucesiones no crecientes y no decrecientes son, por ejemplo, las sucesiones $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, ...\}$ y $\{1, 1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, ...\}$, respectivamente. Otro ejemplo es el de las sucesiones constantes.

Definición 3.6 *Se dice que una sucesión* $\{a_n\}$ *está acotada superiormente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, *existe un* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \leq M$.

Por ejemplo, la sucesión $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ está acotada superiormente pues $b_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.7 *Se dice que una sucesión* $\{a_n\}$ *está acotada inferiormente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, *existe un* $m \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \geq m$.

Por ejemplo, la sucesión $b_n = n^2$ está acotada inferiormente pues $b_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.8 *Se dice que una sucesión* $\{a_n\}$ *está acotada, si* $\{a_n\}$ *está acotada superior e inferiormente. Es decir si* $\forall n \in \mathbb{N}$, *existe un* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|a_n| \leq M$.

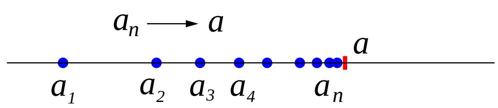
Por ejemplo, la sucesión $b_n = (-1)^n$ está acotada pues $|b_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.9 *Se dice que una sucesión* $\{a_n\}$ *es no acotada si* $\forall M \in \mathbb{R}$, *existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n| > M$.

Por ejemplo, la sucesión $b_n = (-1)^n n^2$ no está acotada. Como veremos más adelante el cáracter de las sucesiones juega un papel muy importante.

3.2. Límite de una sucesión.

Intuitivamente una sucesión a_n de números reales tiene límite $a \in \mathbb{R}$ si a medida que aumentamos n, a_n se acerca cada vez más a a tal y como muestra el siguiente esquema:



Lo anterior se puede formalizar de la siguiente forma:

Definición 3.10 *Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite a si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $|a_n - a| < \epsilon$ y se denota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. O sea,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tal que si } n > N, \quad |a_n - a| < \epsilon.$$

Por ejemplo, la sucesión $a_n = 1/n$ tiene límite 0.

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $+\infty$ si

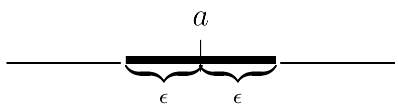
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tal que si } n > N, \quad a_n > M.$$

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n$ tiene límite $+\infty$.

Análogamente se define $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Una sucesión $\{a_n\}$ que tenga límite se denomina convergente y si el límite no existe o es infinito ($\pm\infty$) se llama divergente.

Geométricamente significa que $\forall \epsilon > 0$, en el intervalo $a - \epsilon, a + \epsilon$ (la parte sombreada de la figura) se encuentran todos los términos de la sucesión a partir de un cierto $n = N$, o sea los a_n, $n \geq N$ y por tanto en dicho intervalo hay infinitos términos, y fuera sólo hay un número finito de términos (los N primeros términos) de la misma.



Teorema 3.1 *La manipulación de un número de términos de una sucesión no altera el carácter convergente o divergente de la misma.*

Teorema 3.2 *(Unicidad del límite de una sucesión.)*
Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente entonces tiene un único límite.

Teorema 3.3 *(Condición necesaria para la existencia de límite de una sucesión.)*
Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente entonces es acotada.

Corolario 3.1 *Toda sucesión $\{a_n\}$ no acotada es divergente.*

Lema 3.1 *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones que tienden a cero. Entonces, cualquiera sea $M \in \mathbb{R}$ las sucesiones Ma_n y $a_n + b_n$ son convergentes y también tienen límite cero, o equivalentemente:*

Si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienden a cero, entonces para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la sucesión $\alpha a_n + \beta b_n$ también tiende a cero.

Teorema 3.4 *(Teorema de las tres sucesiones)*
Sean las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tales que $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n \geq N \in \mathbb{N}$. Además $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$. Entonces, $\{c_n\}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l.$$

Se tienen las siguientes propiedades:

1. Una sucesión convergente $\{a_n\}$ de términos no positivos (no negativos) tiene límite no positivo (no negativo). O sea, si $a_n \geq 0 \Rightarrow a_n \to a \geq 0$ y si $a_n \leq 0 \Rightarrow a_n \to a \leq 0$.

2. Si una sucesión tiene todos sus términos mayores (menores) que un cierto m entonces el límite de a_n no puede ser menor (mayor) que dicho m.

3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, y $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces $a \leq b$.

Teorema 3.5 *(Propiedades algebraicas de los límites.)*
Sean dos sucesiones convergentes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$. *En particular,* $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, a$,

3. *Si* $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \neq 0, \quad b \neq 0,$ *entonces,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Teorema 3.6 *(Criterio de Weierstrass para las sucesiones monótonas)*
Para que una sucesión monótona $\{a_n\}$ sea convergente es necesario y suficiente que este acotada. Además, el límite es el supremo o el infímo del conjunto $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de los valores de a_n, o sea,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} inf(A) & si\ a_n\ es\ decreciente \\ sup(A) & si\ a_n\ es\ creciente \end{cases} .$$

Teorema 3.7 *Si $\{a_n\}$ es monótona no decreciente (no creciente) y no acotada superiormente (inferiormente), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \infty$ $(-\infty)$.*

Sea $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, ..., n_k, ...,\ k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto formado por los elementos $\{n_k\}$ de una sucesión **estrictamente creciente** de números naturales. Nótese que como la sucesión n_k es de números naturales y es estrictamente creciente entonces $\mathbf{n_k} \geq \mathbf{k}$. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Construyamos a partir de $\{a_n\}$ una sucesión cuyos elementos sean los elementos de a_n correspondientes a los valores n_k de $\mathcal{N}$. Es decir, construyamos el subconjunto $\{a_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ del conjunto $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. ***La nueva sucesión así obtenida la denotaremos $\{a_{n_k}\}$ y la llamaremos subsucesión de $\{a_n\}$.***

Por ejemplo, sea $a_n = (-1)^n$. Escojamos los los subconjuntos $\mathcal{N}_1 = \{2, 4, ..., 2k, ..., k \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{N}_2 = \{1, 3, ..., 2k-1, ..., k \in \mathbb{N}\}$ y construyamos las subsucesiones a_{2k} y a_{2k-1} de los elementos pares e impares, respectivamente. Es obvio que $a_{2k} = 1$ y $a_{2k-1} = -1$.

Teorema 3.8 *Cualquier subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de una sucesión convergente $\{a_n\}$ es convergente. O sea, si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n_k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Teorema 3.9 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass para las sucesiones) De toda sucesión acotada se puede extraer una subsucesión convergente.*

Teorema 3.10 *(Criterio de Cauchy para las sucesiones) Una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

3.3. Cálculo práctico de límites.

Comenzaremos enunciando un teorema “técnico”.

Teorema 3.11 *(Toeplitz) Sea* $[P_{nk}]_{k=1}^{n}$ *una matriz de elementos no negativos* ($P_{nk} \geq 0$) *tal que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_{nk} = 1$ *y* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_{nk} = 0$ *para todo* k. *Entonces, si* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_{nk} a_n = a$.

Ejemplo 3.1 *Probar que si* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$, *entonces* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} = a$.

Sea $P_{nk} = \frac{1}{n} \geq 0$, $P_{nk} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, además $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_{nk} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$, luego el Teorema de Toeplitz nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k = \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{pero} \quad \sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}.$$

Es decir, la media aritmética de una sucesión convergente es convergente y tiene el mismo límite que la sucesión original.

Ejemplo 3.2 *Sea ahora la media armónica de una sucesión convergente de términos positivos* ($x_n > 0$) $h_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$. *Probar que si* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$, *entonces* $h_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Como $x_n > 0$ es acotada superiormente (es convergente), entonces existe un $M > 0$ tal que $x_n < M$, luego $1/x_n > 1/M$. Escojamos

$$P_{nk} = \frac{\frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} > 0, \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} P_{nk} = 1, \quad 0 \leq P_{nk} \leq \frac{\frac{1}{x_k}}{\frac{n}{M}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

luego aplicando el teorema de Toeplitz tenemos que $h_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Como consecuencia de los dos ejemplos anteriores, el teorema de las tres sucesiones, así como la desigualdad

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

obtenemos que la media armónica de una sucesión convergente de términos positivos ($x_n > 0$) $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ es convergente y tiene el mismo límite, o sea,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a. \tag{3.1}$$

A partir de la igualdad anterior se deduce fácilmente el siguiente

Teorema 3.12 *(Criterio de la raíz)*
Sea $\{a_n\}$ *una sucesión de términos positivos tal que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. *Entonces,* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Ejemplo 3.3 *Calcular los límites* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}}$, $a \in \mathbb{R}$ *y* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Usando el criterio de la raíz tenemos, en el primer caso

$$a_n = \frac{a^n}{n!}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = 0.$$

En el segundo,

$$a_n = n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Una consecuencia de este último límite es que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ cualquiera sea $x > 0$.

Hemos de hacer notar que las condiciones del teorema son sólo suficientes, es decir que si no existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, ello no indica que no exista el de la raíz n-ésima. En efecto, Sea $a_n = 2 + (-1)^n$. Obviamente no existe el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$ (¿por qué?), pero

$$\sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{2 + (-1)^n} \le \sqrt[n]{3},$$

luego por el teorema de las tres sucesiones vemos que $\sqrt[n]{2 + (-1)^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, ya que $\sqrt[n]{3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Como consecuencia del teorema de Toeplitz, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.13 *(Stolz)*
Sea $\dfrac{a_n}{b_n}$ una sucesión tal que b_n es creciente con límite infinito y sea que la sucesión $\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ es convergente con límite l. Entonces $\dfrac{a_n}{b_n}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l.$$

Ejemplo 3.4 *Calcular los límites*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{\log n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

Para el primero podemos usar $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ lo que nos da, en el límite $1/2$, no obstante usaremos el teorema de Stolz. Tomando $a_n = 1 + 2 + \cdots + n$ y $b_n = n$ tenemos que se cumplen todas las condiciones del teorema además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1} - a_n}{b_{n-1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

En el segundo caso tomamos $a_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ y $b_n = \log n$ de forma que se cumplen todas las condiciones del teorema además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1} - a_n}{b_{n-1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\log n - \log(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^n} = 1.$$

Finalmente para el tercero escogemos $a_n = 1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n}$ y $b_n = \sqrt{n}$ y obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1} - a_n}{b_{n-1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = 2.$$

3.4. Límites notables.

En este apartado vamos a encontrar una serie de límites importantes que aparecen en un sinnúmero de ejemplos y problemas: los denominados límites notables.

Teorema 3.14 *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = 1$, *para todo* $x\in\mathbb{R},\ x>0.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, *para todo* $x\in\mathbb{R},\ |x|<1.$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = 0$, *para todo* $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha>0.$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha} = 0$, *para todo* $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha>0.$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$, *para todo* $a>1,\ \alpha>0.$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 0$, *para todo* $x\in\mathbb{R}$. $(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n)$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$. $(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n)$

Definición 3.11 *Dos sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *se denominan equivalentes si* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = 1$, *y se escribe* $a_n\sim b_n$.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n!$ es equivalente a la sucesión $b_n = \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$ y por tanto la siguiente fórmula, conocida como la fórmula de Stirling, es válida:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n\,. \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.5 *Calcular el límite* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}n^ne^{-n}}{2(n!)}$.

Sea $x_n = n!$. Definamos $s_n = \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$. Entonces, como $s_n/x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}n^ne^{-n}}{2(n!)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}n^ne^{-n}}{2x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}n^ne^{-n}}{2s_n}\frac{s_n}{x_n} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}n^ne^{-n}}{2s_n}\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}n^ne^{-n}}{2s_n},\end{aligned}$$

pero

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}n^ne^{-n}}{2s_n}, \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}n^ne^{-n}}{2\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Definición 3.12 *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se denomina infinitesimal si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definición 3.13 *Dos sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *se denominan infinitésimos equivalentes y se escribe* $a_n \sim b_n$ *si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

Teorema 3.15 *Si* $\{a_n\}$ *es una sucesión infinitesimal, entonces:*

1. $\operatorname{sen} a_n \sim a_n$.
2. $\tan a_n \sim a_n$.
3. $\operatorname{arc\,sen} a_n \sim a_n$.
4. $\arctan a_n \sim a_n$.
5. $1 - \cos a_n \sim \dfrac{a_n^2}{2}$.
6. $(1 + a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, a_n$.
7. $e^{a_n} - 1 \sim a_n, \qquad b^{a_n} - 1 \sim a_n \ln b$.
8. $\ln(1 + a_n) \sim a_n, \qquad \log_b(1 + a_n) \sim a_n \log_b e$.

3.5. Problemas complementarios.

Problema 3.1 *Estudiar el carácter (monotonía, acotación), de las siguientes sucesiones:*

$$a)\quad a_n = 1 + \frac{1}{n} \qquad\qquad b)\quad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$c)\quad c_n = n + \frac{1}{n} \qquad\qquad d)\quad d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + (-1)^n \left(1 - \frac{3}{n}\right).$$

Problema 3.2

1. *¿Qué se puede decir de una sucesión de numeros enteros que es convergente?.*
2. *Demostrar que toda sucesión convergente es acotada.*
3. *Demostrar que si* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *entonces* $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = x$ *para toda subsucesión* $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.

Problema 3.3

1. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión acotada y consideremos la sucesión dada por* $b_n = \sup\{a_n,\, a_{n+1}, \cdots\}$. *Demostrar que* $\{b_n\}$ *es convergente.*
2. *Calcular* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *para las sucesiones:*

$$a)\quad a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \qquad\qquad b)\quad a_n = (-1)^n \left(3 + \frac{1}{n}\right).$$

Problema 3.4 *Pruébese que si la sucesión* $\{a_n\}$ *es convergente, entonces* $\{|a_n|\}$ *es también convergente. ¿Es cierto el recíproco?*

Problema 3.5 *Demuéstrese que la sucesión* $a_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ *no es de Cauchy.*

Problema 3.6

1. *Sea* $x_1 = 1$ *y* $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. *Pruébese que la sucesión* $\{x_n\}$ *es convergente y calcúlese* $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Ayuda: *Estudiar si es una sucesión monótona y acotada.*

2. *La misma cuestión para* $z_1 = 1$, $z_{n+1} = \sqrt{1 + 2z_n} - 1$.

3. *Para esta última sucesión (*$\{z_n\}$*) calcular también* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{z_{n+1}}$ *y* $\lim_{n\to\infty} nz_n$.

Problema 3.7 *Calcúlense los siguientes límites:*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$	*b)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{27n^3+3n^2-2} - 3n\right)$
c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-3n}\right)^{\frac{n^2-1}{2n}}$	*d)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{3n+2}{3n}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n}}}$
e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$	*f)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}}{\log n}$
g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$	*h)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Problema 3.8 *Calcúlense los siguientes límites:*

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}, \qquad (a, b > 0),$

2. $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots,$

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \{\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}\},$

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\,,$

5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2},$

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\operatorname{sen} n!}{n+1},$

7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2},$

8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} n\pi,$

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+1} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt[3]{n^3+1}},$

10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$

Problema 3.9 *Demostrar que la sucesión definida por*

$$a_1 = a > 0, \qquad a_n = \frac{1}{n\, e^{a_{n-1}}},$$

es convergente y calcular su límite.

Problema 3.10 *Sea la sucesión recurrente definida por* $u_1 = 0$; $u_{n+1} = 1/(u_n + 1)$.

1. *Calcular el posible límite* l.
2. *Demostrar que se tiene* $|u_{n+1} - l| < \frac{2}{3}|u_n - l| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. *Demostrar que efectivamente* $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

Problema 3.11 *Sea* $\{x_n\}$ *la sucesión de números reales definida por recurrencia mediante la regla*

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}\,, \qquad x_1 = 2\,.$$

1. *Probar que* $\{x_n\}$ *es decreciente y está acotada inferiormente por* $\sqrt{2}$.
2. *Hallar* $lim_{n\to\infty} x_n$.

Problema 3.12 *Sea* x_n *la sucesión definida por*

$$x_1 = 4, \qquad\qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 5}{6}.$$

1. *Probar que* $x_n \geq 1$ *para todo* n *y que* $x_n \leq 5$ *para todo* n.
2. *Demostrar que* x_n *es convergente. Calcular su límite.*

Problema 3.13 *Sea* x_n *la sucesión definida por*

$$x_1 = 5, \qquad\qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 24}{10}.$$

1. *Probar que* $x_n \geq 4$ *para todo* n *y que* $x_n \leq 6$ *para todo* n.
2. *Demostrar que* x_n *es convergente. Calcular su límite.*

Problema 3.14 *Considérese la sucesión definida por recurrencia de la siguiente forma:*

$$3\, a_{n+1} = 2 + a_n^3\,, \qquad a_1 = -\frac{3}{2}\,.$$

Pruébese que tal sucesión es monótona creciente y acotada superiormente por $K = 1$. *Calcúlese su límite.*

Problema 3.15

1. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión convergente, e* $\{y_n\}$ *una divergente. ¿Qué se puede decir de la sucesión producto,* $\{x_n y_n\}$*, suma,* $\{x_n + y_n\}$*, y cociente,* $\{x_n/y_n\}$ *(suponiendo que* $y_n \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*)?*

2. *Si* $\{x_n\}$ *es convergente, entonces* $\{|x_n|\}$ *es convergente. ¿Es cierto el recíproco?*

3. *Prueba que una reordenación de un número finito de término de una sucesión no altera su carácter convergente o divergente.*

Problema 3.16 (examen de noviembre de 1992)

Sea la sucesión definida por

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right),$$

con $u_0 = 1$*. Prueba que:*

1. $u_n \geq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

2. $\{u_n\}$ *es una sucesión monótona decreciente;*

3. *existe* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ *y calcúlalo.*

Problema 3.17 *Sea* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de números reales (*no *necesariamente convergente) que cumple* $0 \leq x_n \leq a$*, con* $a \in \mathbb{R}$*. Para* $\alpha \in \mathbb{R}$ $(0 < \alpha < 1)$ *se define la sucesión*

$$y_n = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{\alpha}}{n}.$$

Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

4. Límite funcional y funciones continuas.

Definición de límite funcional y primeras propiedades. Relación entre límite funcional y secuencial. Teorema general de convergencia de Cauchy. Límites infinitos: propiedades. Asíntotas. Infinitésimos e infinitos: funciones equivalentes. Cálculo práctico de límites. Definición de continuidad: propiedades. Continuidad de la función compuesta. Función inversa. Continuidad de la función inversa. Funciones continuas en intervalos cerrados: teoremas de Weierstrass, Bolzano y Darboux. Funciones monótonas. Continuidad uniforme: teorema de Heine.

4.1. Definición de límite y continuidad de una función.

Definición 4.1 *(Heine) Se dice que una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ tiene límite l cuando x tiende a a (punto de acumulación de A), y se denota $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, si las imágenes de cualquier sucesión $\{x_n\}$ que converja a a con $x_n \neq a$, convergen a l. O sea,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \{x_n\},\ x_n \neq a \text{ y } \lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l\,.$$

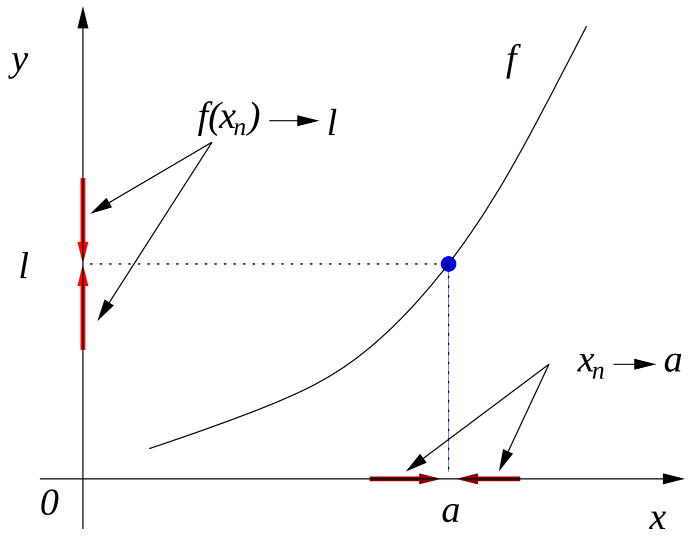


Figura 23: Definición de límite según Heine

Definición 4.2 *(Weiersstras) Se dice que una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ tiene límite l cuando x tiende a a (punto de acumulación de A) si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Es decir que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si y sólo si cualquiera sea el entorno $U(l)$ de l que escojamos, existe un entorno $U_a(a)$ de a, que no contiene a a tal que $f(U_a(a)) \subset U(l)$ (ver la figura 24).

Teorema 4.1 *Las definiciones de Heine 4.1 y Weierstrass 4.2 son equivalentes.*

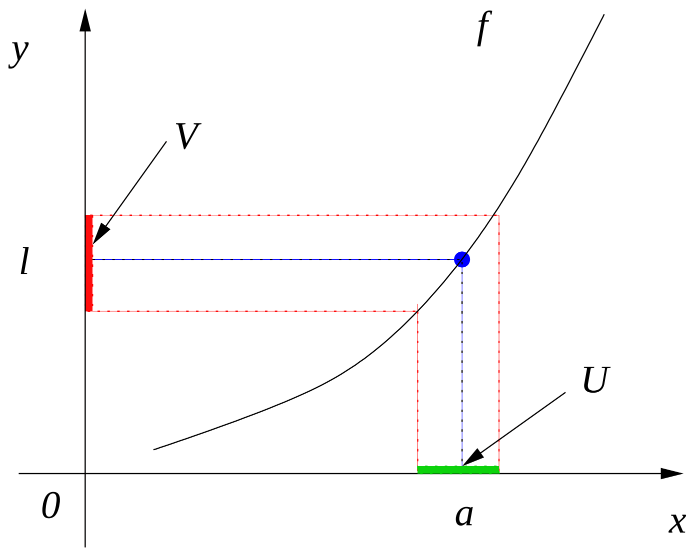


Figura 24: Definición de límite según Weierstrass

Definición 4.3 *Diremos que una función es continua en $x = a$ (punto de acumulación del dominio de f) si f está definida en el punto $x = a$ y*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

En otras palabras, f es continua en a si y sólo si

$$\forall \{x_n\},\ x_n \text{ tal que } \lim_{n \to \infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)\,,$$

o, equivalentemente,
Se dice que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua (según Cauchy) en $x = a$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Es decir, si existe $f(a)$ (la función está definida en el punto $x = a$) y $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definición 4.4 *Si una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ no es continua en un punto $x = a$ se dice que es discontinua.*

Existen cuatro tipos fundamentales de discontinuidad:

Discontinuidad evitable

Esta discontinuidad tiene lugar si existe el límite $\lim_{x \to a} f(x) = l$ pero la función en $x = a$, o no está definida, o $f(a)$ no coincide con el límite l. Es evitable pues en $x = a$ podemos redefinir la función f de la tal forma que $f(a) = l$.

Discontinuidad no evitable (o esencial) de salto finito

Esta discontinuidad tiene lugar si existen los límites laterales $\lim_{x \to a+} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a-} f(x) = l_2$ existen pero son diferentes. Por tanto, no existe el límite de f en $x = a$. Además en este caso es imposible redefinir la función f de la tal forma que $l_1 = l_2$.

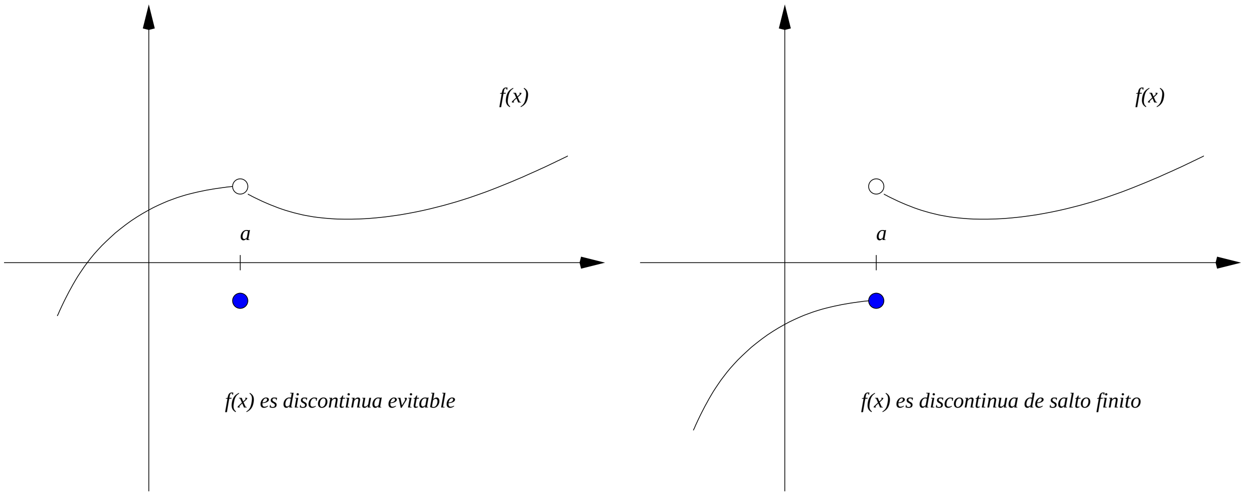


Figura 25: Funciones con discontinuidades evitable (izquierda) y de salto finito (derecha) en $x = a$.

Discontinuidad no evitable (o esencial) de salto infinito

Esta discontinuidad tiene lugar si alguno de los límites laterales es igual a $\pm\infty$, o sea, si $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$. Por tanto, no existe el límite finito de f en $x = a$. Además en este caso también es imposible redefinir la función f.

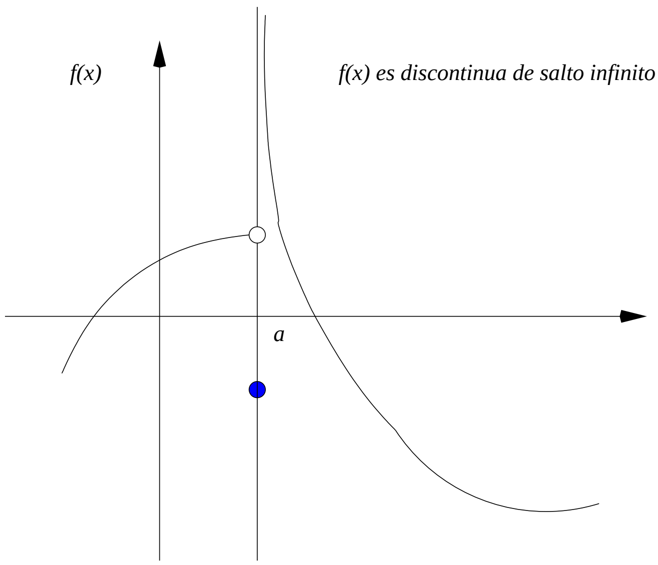


Figura 26: Función con discontinuidad de salto infinito en $x = a$.

Discontinuidad no evitable (o esencial)

Este caso corresponde cuando la función esta bien definida en todo el entorno de a pero no existen los límites laterales (no son siquiera $\pm\infty$).

Muy distinto es el caso de la función $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

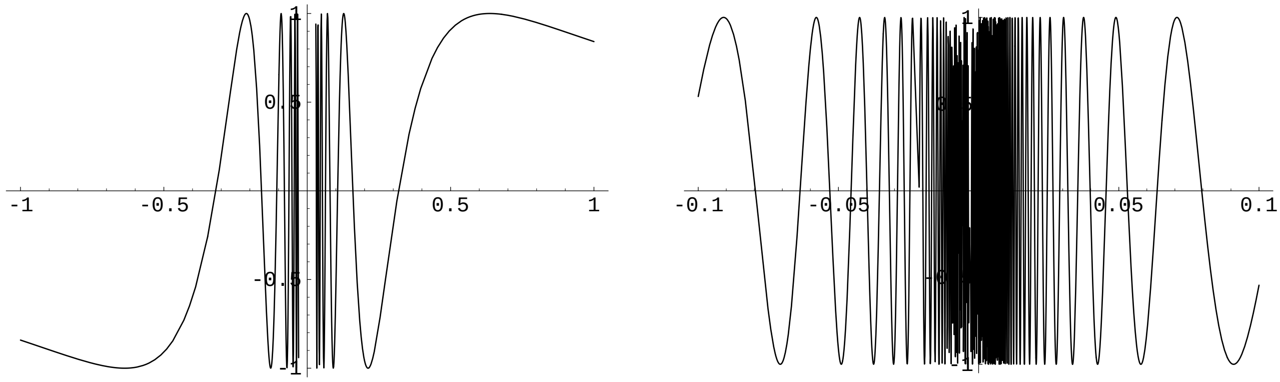


Figura 27: La función $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en $[-1, 1]$ (izquierda) y en $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ (derecha).

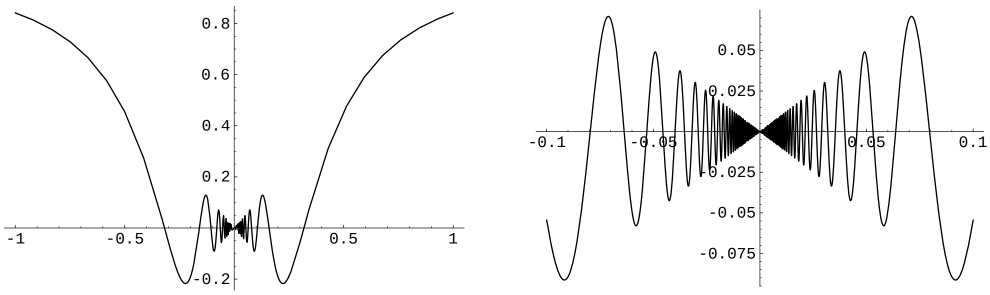


Figura 28: La función $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en $[-1, 1]$ (izquierda) y en $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ (derecha).

4.2. Propiedades de los límites

Como consecuencia de las propiedades de los límites de sucesiones tenemos las siguientes propiedades:

Teorema 4.2 *(Unicidad del límite de una función.)*
Si la función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ tiene límite (o límite lateral) en $x = a$ entonces el límite es único.

Teorema 4.3 *(Condición necesaria para la existencia de límite finito de una función.)*
Si la función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ tiene límite finito en $x = a$ entonces existe un entorno de $x = a$ en la que la función está acotada. Es decir,

$$\lim_{x \to a} f(x) = l, \quad |l| < +\infty \Longrightarrow \exists \delta > 0,\ 0 < |x - a| < \delta, \Longrightarrow\ |f(x)| < \infty.$$

Teorema 4.4 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$1) \quad \lim_{x \to a} f(x) = l. \qquad 2) \quad \lim_{x \to a} f(x) - l = 0.$$

$$3) \quad \lim_{x \to a} |f(x) - l| = 0. \quad 4) \quad \lim_{h \to 0} f(a + h) = l.$$

Teorema 4.5 *(Teorema de las tres funciones)*
Sean las funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$, $g : A \mapsto \mathbb{R}$ y $h : A \mapsto \mathbb{R}$ tales que $f(x) \le h(x) \le g(x)$ para todo x en cierto entorno de $x = a$ y sea que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim_{x \to a} g(x) = l$. Entonces, $h(x)$ tiene límite en $x = a$ y

$$\lim_{x \to a} h(x) = l.$$

Teorema 4.6 *Sea $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) > m$ para todo x en un entorno de a, entonces si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces $l \geq m$.*

Teorema 4.7 *Sea $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una función tal que $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Sea $l > m$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > m$. Es decir si el límite de una función en un punto $x = a$ es mayor que cierto número real m entonces existe un entorno de $x = a$ en el que la función es mayor que dicho m.*

Como una consecuencia de este teorema se tiene que si $m = 0$ y $l > 0$, entonces

$$\exists\delta > 0, \text{ tal que } \forall x \in (a - \delta, a + \delta), \quad f(x) > 0.$$

Teorema 4.8 *Sean $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$. Entonces:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = l + m$,
2. $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$, *y en particular* $\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha\, l$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$,
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$, *si* $g(x) \neq 0, \quad m \neq 0$.

Teorema 4.9 *Sea dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : B \mapsto \mathbb{R}$, tales que $B \subset f(A)$ de forma que existe la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Si existen los límites*

$$\lim_{x\to a} g(x) = m, \quad \lim_{x\to m} f(x) = l, \qquad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(g(x)) = l.$$

Teorema 4.10

1. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$, entonces $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $f(x)/g(x)$ son continuas en $x = a$, donde en el último caso se supone $g(x) \neq 0$.*
2. *Si $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : B \mapsto \mathbb{R}$, tales que $f(A) \subset B$. Supongamos que f es continua en $x = a$ y que g es continua en $x = f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $x = a$. Es decir,*
$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(f(a)).$$
3. *Si $f(x)$ es continua en $x = a$, existe todo un entorno de a, $(a - \delta, a + \delta)$ donde f es acotada. O sea, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, $|f(x)| < \infty$.*
4. *Sea $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una función continua en $x = a$ y m un número real tal que $f(a) > m$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, $f(x) > m$. Es decir si el el valor de una función continua en un punto $x = a$ es mayor que cierto número real m, entonces existe un entorno de $x = a$ en el que la función es mayor que dicho m.*

   En particular, si la función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ entonces existe un entorno de $x = a$ tal que si $f(a) > 0$ entonces $f(x)$ es mayor que cero en todo el entorno y si $f(a) < 0$ entonces $f(x)$ es menor que cero en dicho entorno. O sea, si f es continua en $x = a$
$$\exists\delta > 0, \textit{ tal que } \forall x \in (a - \delta, a + \delta), \quad \textit{signo}[f(x)] = \textit{signo}[f(a)].$$

Como consecuencia del apartado 2 del teorema anterior tenemos que si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ e inyectiva en dicho intervalo, entonces f^{-1} es continua en $f([a, b])$.

Asíntotas de funciones.

Definición 4.5 *La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si cualquiera de los límites laterales de $f(x)$ en $x = a$ es igual a $\pm\infty$, es decir si*

$$\lim_{x\to a\pm} f(x) = \infty.$$

Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene la asíntota vertical $x = 0$.

Definición 4.6 *La recta $y = n$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)$ si cualquiera de los límites de $f(x)$ cuando x tiende a $\pm\infty$ es igual a n, o sea,*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = n \qquad o \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = n.$$

Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{|x|+1}{x}$ tiene dos asíntota horizontales $y = 1$ e $y = -1$.

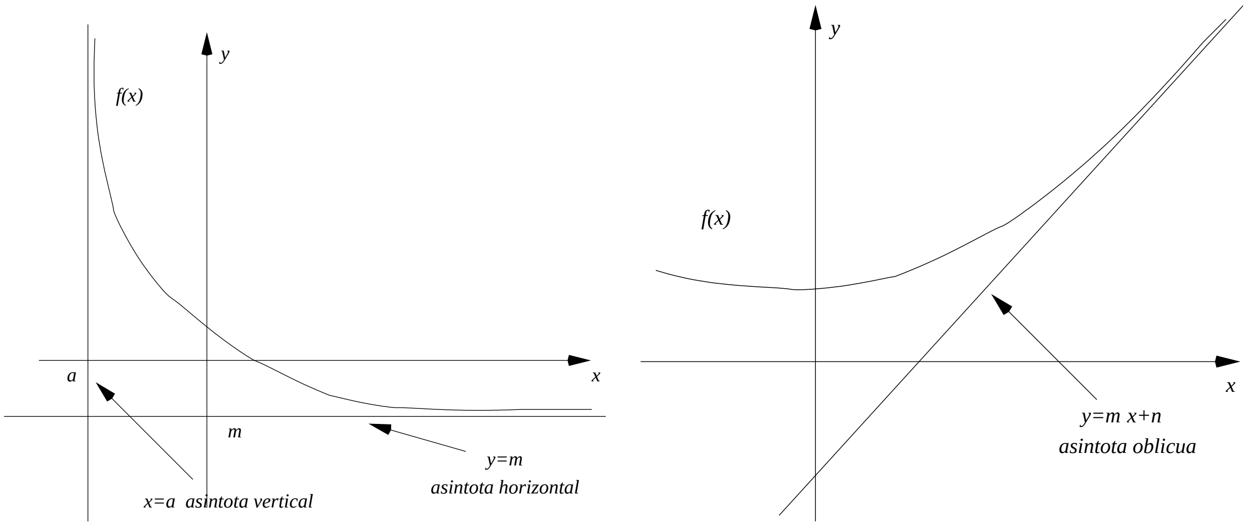


Figura 29: Asíntotas horizontal $y = m$ y vertical $x = a$ (izquierda) y oblicua $y = m\,x + n$ (derecha).

Definición 4.7 *La recta $y = m\,x + n$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ si cualquiera de los límites de $f(x) - (m\,x + n)$ cuando x tiende a $\pm\infty$ es igual a 0, o sea,*

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (m\,x + n)] = 0.$$

Para calcular la pendiente de las posibles asíntotas oblicuas hay que calcular

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},$$

y luego

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - m_1\,x] \qquad \text{y} \qquad n_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - m_2\,x].$$

Las asíntotas horizontales son un caso particular de las oblicuas cuando la pendiente de estas últimas son iguales a cero.

Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ tiene la asíntota oblicua $y = x + 1$ cuando $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$.

Teorema 4.11 *Todas las funciones elementales son continuas en su dominio.*

Definición 4.8 *Dos funciones* $f : A \mapsto \mathbb{R}$ *y* $g : A \mapsto \mathbb{R}$ *se denominan infinitésimos equivalentes en* $x = a$ *si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ *y se escribe* $f(x) \sim g(x)$ *cuando* x *tiende a* a*.*

Definición 4.9 *(o pequeña) Dados dos funciones* f *y* g *infinitésimales en cierto* $x = a$*, diremos que* $g(x)$ *es un infinitésimo de orden mayor que* $f(x)$ *en* $x = a$ *si* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ *y se escribe* $g(x) = o(f(x))$ *cuando* x *tiende a* a*.*

Por ejemplo, la función x^2 es un infinitésimo de mayor orden que x en $x = 0$, es decir $x^2 = o(x)$, y la función x^3 es un infinitésimo de mayor orden que $x^{3/2}$ en $x = 0$, o sea, $x^3 = o(x^{3/2})$.

Utilizando esta notación los infinitésimos tenemos

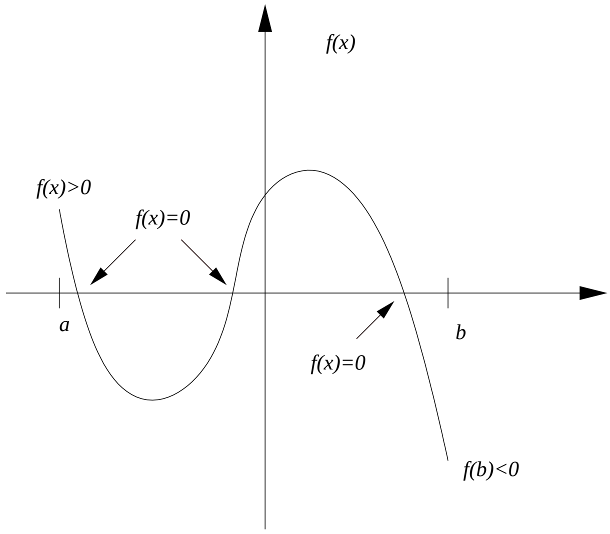
1. $\operatorname{sen} x = x + o(x)$.
2. $\tan x = x + o(x)$.
3. $\operatorname{arc\,sen} x = x + o(x)$.
4. $\arctan x = x + o(x)$.
5. $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
6. $(1 + x)^\alpha - 1 = \alpha\, x + o(x)$.
7. $b^x - 1 = x \ln b + o(x)$.
8. $\log_b(1 + x) = x \log_b e + o(x)$.

4.3. Propiedades de las funciones continuas.

Teorema 4.12 *(Weiestrass)*
Si la función $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *es continua en todo* $[a, b]$ *entonces* f *está acotada en* $[a, b]$ *y además* f *alcanza su máximo y su mínimo en* $[a, b]$*.*

Teorema 4.13 *(Bolzano)*
Sea la función $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *es continua en todo* $[a, b]$ *y sea que los valores en los extremos* $f(a)$*,* $f(b)$ *son de signos distintos. Entonces existe un punto* c *en el interior del intervalo* $[a, b]$*, o sea,* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$*.*

Teorema 4.14 *(Teorema del valor intermedio) Sea* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *una función continua en todo* $[a, b]$*, y sean* m *y* M *su mínimo y máximo respectivamente. Entonces para todo* y *real tal que* $m \le y \le M$*, existe un* $x \in [a, b]$ *tal que* $f(x) = y$*.*



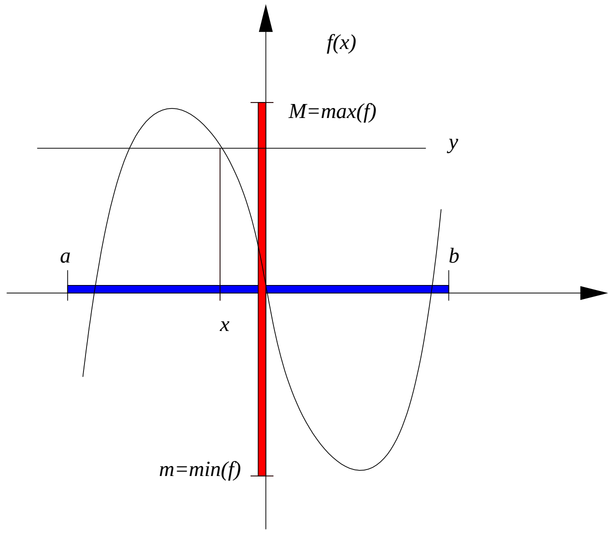


Figura 30: Teorema de Bolzano (izq.) y de los valores intermedios (der.)

4.4. Infinitésimos equivalentes.

Definición 4.10 *Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan equivalentes en $x = a$ si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando x tiende a a.*

Definición 4.11 *Una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ se denomina infinitesimal en $x = a$ si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.*

Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es infinitesimal en $x = 0$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x - 2)$ es infinitesimal en $x = 2$.

Definición 4.12 *Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan infinitésimos equivalentes en $x = a$ si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando x tiende a a.*

Definición 4.13 *(o pequeña) Dados dos funciones f y g infinitesimales en cierto $x = a$, diremos que $g(x)$ es un infinitésimo de orden mayor que $f(x)$ en $x = a$ si $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ y se escribe $g(x) = o(f(x))$ cuando x tiende a a.*

Por ejemplo, la función x^2 es un infinitésimo de mayor orden que x en $x = 0$, es decir $x^2 = o(x)$, y la función x^3 es un infinitésimo de mayor orden que $x^{3/2}$ en $x = 0$, o sea, $x^3 = o(x^{3/2})$.

Obviamente se tiene que:

1. Para todo $m \in \mathbb{R}$, $m \cdot o(x) = o(x)$,
2. La suma de un número finito infinitésimos equivalentes es un infinitésimo,
3. El producto de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo de orden superior.

La demostración de estas propiedades se dejan como ejercicio.

Definición 4.14 *(O grande)*
Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan comparable o del mismo orden en $x = a$ si $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, donde $l \neq 0$, $|l| < \infty$ y se escribe $f(x) = O(g(x))$ o $g(x) = O(f(x))$ cuando x tiende a a.

Si ahora usamos los límites que probamos en el apartado anterior tenemos el siguiente

Teorema 4.15 *Si x tiende a 0, entonces:*

1. $\operatorname{sen} x \sim x$.

2. $\tan x \sim x$.

3. $\operatorname{arc\,sen} x \sim x$.

4. $\arctan x \sim x$.

5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

6. $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha\, x$.

7. $e^x - 1 \sim x, \qquad b^x - 1 \sim x \ln b$.

8. $\ln(1 + x) \sim x, \qquad \log_b(1 + x) \sim x \log_b e$.

Utilizando esta notación los infinitésimos del teorema anterior se podrán reescribir de la forma:

1. $\operatorname{sen} x = x + o(x)$.

2. $\tan x = x + o(x)$.

3. $\operatorname{arc\,sen} x = x + o(x)$.

4. $\arctan x = x + o(x)$.

5. $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

6. $(1 + x)^\alpha - 1 = \alpha\, x + o(x)$.

7. $b^x - 1 = x \ln b + o(x)$.

8. $\log_b(1 + x) = x \log_b e + o(x)$.

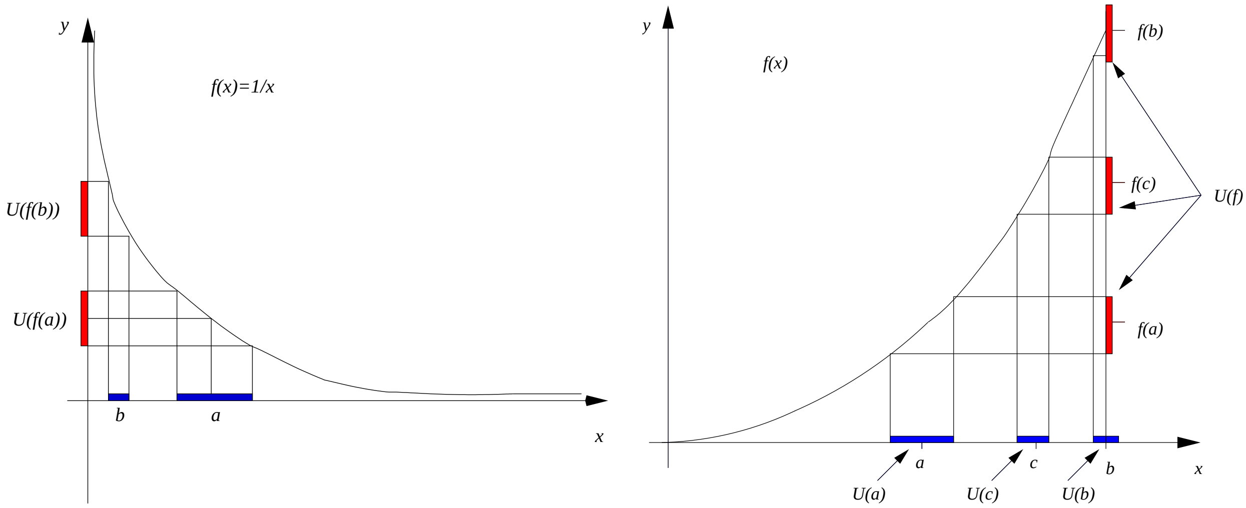


Figura 31: Continuidad uniforme: la función $f(x) = 1/x$ en $(0, b]$ (izquierda) y x^2 en $[0, b]$.

4.5. Continuidad uniforme (opcional)

Definición 4.15 *Se dice que una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \forall y \in [a, b], \quad \exists \delta > 0; \quad t.q. \quad |x - y| < \delta, \quad \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon,$$

Nótese que en este caso el δ depende, en general, no sólo de ϵ sino también de a.

Definición 4.16 *Se dice que una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es uniformemente continua en un intervalo $[a, b]$ si si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si para todos x e y de $[a, b]$, tales que $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Teorema 4.16 *(Heine)*[1]
Si la función $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua en todo $[a, b]$ entonces f es uniformemente continua $[a, b]$.

4.6. Problemas complementarios.

Problema 4.1 *Utilizando la definición ϵ–δ de límite prueba que:*

$$(a) \quad \lim_{x\to 2} x^2 = 4, \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = 0,$$

$$(c) \quad \lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1, \qquad (d) \quad \lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0,$$

$$(e) \quad \lim_{x\to 0-} \frac{x \operatorname{sen} x}{|x|} = 0, \quad (f) \quad \lim_{x\to 0+} \frac{x \operatorname{sen} x}{|x|} = 0.$$

Problema 4.2 *Demuéstrese que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall\{x_n\} \ \textit{con} \ \lim_{n\to\infty} x_n = a, \ \ \textit{se tiene} \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

[1]Este teorema también es atribuido a Cantor.

Problema 4.3 *Sabiendo que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$*, y que* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$*, demuéstrese que*

$$i)\quad \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = l_1 + l_2 \qquad ii)\quad \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = l_1 l_2.$$

Problema 4.4 *Calcúlense los siguientes límites utilizando, si es posible, infinitésimos equivalentes:*

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}, \qquad (b)\quad \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x - a},$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}, \qquad (d)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3},$$

$$(e)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x + \operatorname{sen} 5x - 1}{\log(1+2x)}, \qquad (f)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen}\, x}\right)^{\frac{\operatorname{sen}\, x}{x - \operatorname{sen}\, x}},$$

$$(g)\quad \lim_{x\to \infty}\frac{x^{x-1}}{(x-1)^x}, \qquad (h)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1 + \operatorname{sen} x - e^{2x}}{\arctan x},$$

$$(i)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}, \qquad (j)\quad \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{3}{2\arcsin x}},$$

$$(k)\quad \lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(2x^2 + 3x - 2\right)\tan(\pi x), \qquad (l)\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \tan x},$$

$$(m)\ \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2}, \quad (a > b), \quad (n)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \operatorname{sen} x)^2}},$$

$$(o)\ \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{\tan x}.$$

Problema 4.5 *Sea la función*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1 + x^n}.$$

Estudiar la continuidad de la función en los puntos $x = -1$*,* $x = 0$ *y* $x = 1$*. ¿Es continua dicha función en todo* $\mathbb{R}$*?*

Problema 4.6 *Calcular las asíntotas de las siguientes funciones:*

$$(a)\quad f(x) = 2x + e^{-x}, \qquad (b)\quad g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad (c)\quad h(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

$$(d)\quad l(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}, \qquad (e)\quad p(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \qquad (f)\quad h(x) = \frac{x^3-1}{x^2-4}.$$

$$q(x) = \sqrt{x-a} - \sqrt{x}, \quad a > 0, \qquad r(x) = \sqrt{x^2+1} - x.$$

Problema 4.7 *Estúdiese la continuidad de las siguientes funciones:*

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}, \qquad (b) \quad h(x) = \begin{cases} e^{1/x} & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases},$$

$$(c) \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \\ \dfrac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi\, x & -1 < x < 1 \\ \ln x & x \geq 1 \end{cases}, \quad (d) \quad l(x) = x - E[x].$$

Nota: $E[x] = z \in Z : z \leq x < z + 1$ *(parte entera de* x*).*

Problema 4.8 *Prueba que si* f *es continua en un punto* a *y* g *lo es en* $f(a)$*, entonces* $g \circ f$ *es continua en* a*.*

Problema 4.9 *Demuéstrese que si* f *es continua, entonces lo es* $|f|$*. Es cierto el recíproco?.*

Problema 4.10 *Justifíquese que la ecuación* "$\operatorname{sen} x = x - 1$"*tiene alguna solución.*

Problema 4.11 *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua, tal que* $f(q) = 0 \ \ \forall q \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$*. Demuéstrese que* $f(x) = 0 \ \ \forall x \in [a, b]$*.*

Problema 4.12 *Demuéstrense los siguientes teoremas de punto fijo:*

1. *Sea* $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ *una función continua. Entonces existe* $c \in [0, 1]$ *tal que* $f(c) = c$*.*
2. *Sean* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones continuas tales que* $f(a) \geq g(a)$*,* $f(b) \leq g(b)$*. Entonces existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = g(c)$*.*
3. *Sea* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua, tal que* $f(0) = f(1)$*. Entonces para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $c \in [0, 1]$ *tal que* $f(c) = f(c + 1/n)$*.*

Problema 4.13

1. Demostrar que cualquier polinomio $P_n(x)$ de grado n impar tiene al menos una solución real. ¿es cierto ésto para n par?
2. Demostrar que la ecuación $\tan x = x$ tiene infinitas raíces reales.
3. Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una solución para $x \leq 1$.
4. Sean a, b dos párametros reales tales que $0 < a < 1$ y $b > 0$. Demuestre que la ecuación $x = a \operatorname{sen} x + b$ tiene por lo menos una raíz positiva no mayor que $a + b$.

Problema 4.14 *Demuéstrese que* $\forall\ x > 0$ *se tiene* $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Problema 4.15 *Demuestra que la ecuación* $x^2 = \ln(1/x)$ *tiene al menos una solución en* $x > 0$*.*

5. Funciones derivables.

Definición y primeras propiedades. Derivación de la función compuesta. Derivación de la función inversa. Derivadas laterales. Función derivada. Extremos relativos. Teorema de Rolle. Teoremas del valor medio: consecuencias. Regla de l'Hôpital: aplicación al cálculo de límites. Derivadas de orden superior.

5.1. El Concepto de derivada de una función

Uno de los problemas más antiguo de la Geometría y por tanto de la Matemática era el problema de encontrar las rectas tangentes y normales a una curva dada. Este problema tiene un sinfín de aplicaciones prácticas:

1. Calcular el ángulo entre dos curvas (Descartes)
2. Construir telescopios (Galileo)
3. Encontrar máximos y mínimos (Fermat)
4. Velocidad y aceleración del movimientos de cuerpos (Galileo, Newton)
5. Astronomía, movimiento de los cuerpos celestes (Kepler, Newton)

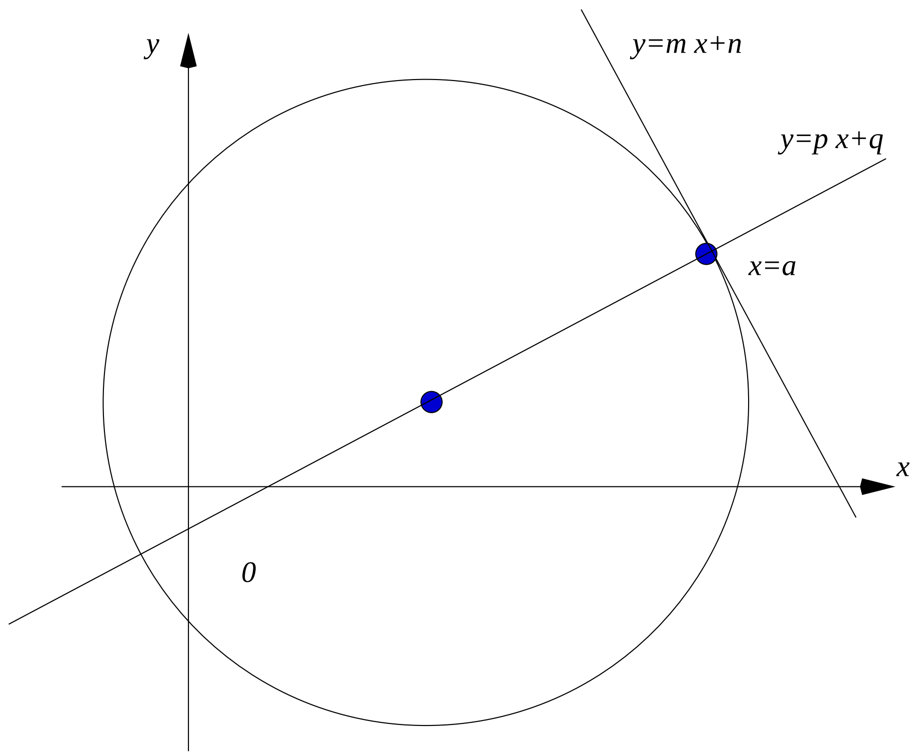


Figura 32: La recta $y = mx + n$ tangente a una curva $f(x)$ y recta normal

Para algunas curvas los griegos sabían como encontrar dichas tangentes. Por ejemplo, la circunferencia.

El problema es más complicado para una curva en general. Intentemos calcular la pendiente m de la recta tangente a una curva dada en un punto $(a, f(a))$.

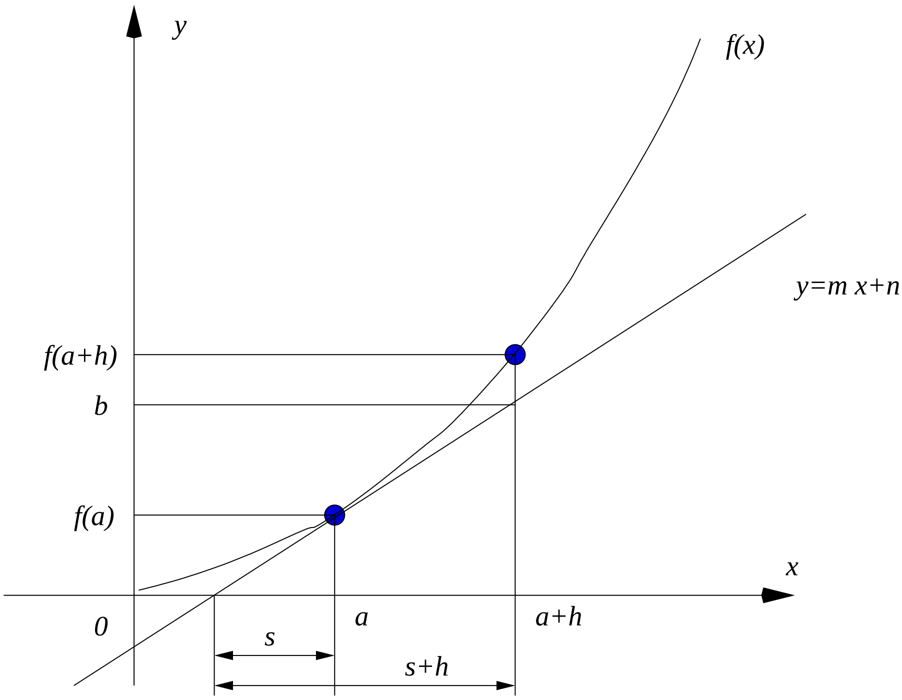


Figura 33: La recta $y = mx + n$ tangente a una curva $f(x)$

De la figura podemos comprobar que dicha pendiente toma el valor:

$$m = \frac{f(a)}{s} = \frac{b}{s+h} = \frac{b - f(a)}{h}.$$

Si h es suficientemente pequeño $b \approx f(a+h)$

$$m \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Por ejemplo, Fermat usaba la fórmula anterior sólo para aquellas curvas donde desaparecía el término h del denominador y luego sustituía $h = 0$. Por ejemplo: Sea la parábola $y = x^2$

$$m \approx \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h \quad \Longrightarrow \quad m = 2a.$$

Esto no funciona para funciones más "complicadas": $f(x) = \sin x$.

Otro genial matemático que consideró el problema fue Barrow

Barrow tenía un método geométrico muy ingenioso para las curvas definidas por la ecuación $f(x, y) = 0$.

Ejemplo: la hipérbola $f(x, y) = xy - p = 0$.

$$f(x+h, y+k) = 0 = (x+h)(y+k) - p = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\underbrace{(x \cdot y - p)}_{=0} + h \cdot y + x \cdot k + h \cdot k = 0,$$

por tanto

$$h \cdot y + x \cdot k \quad \Longrightarrow \quad \frac{k}{h} = -\frac{y}{x}.$$

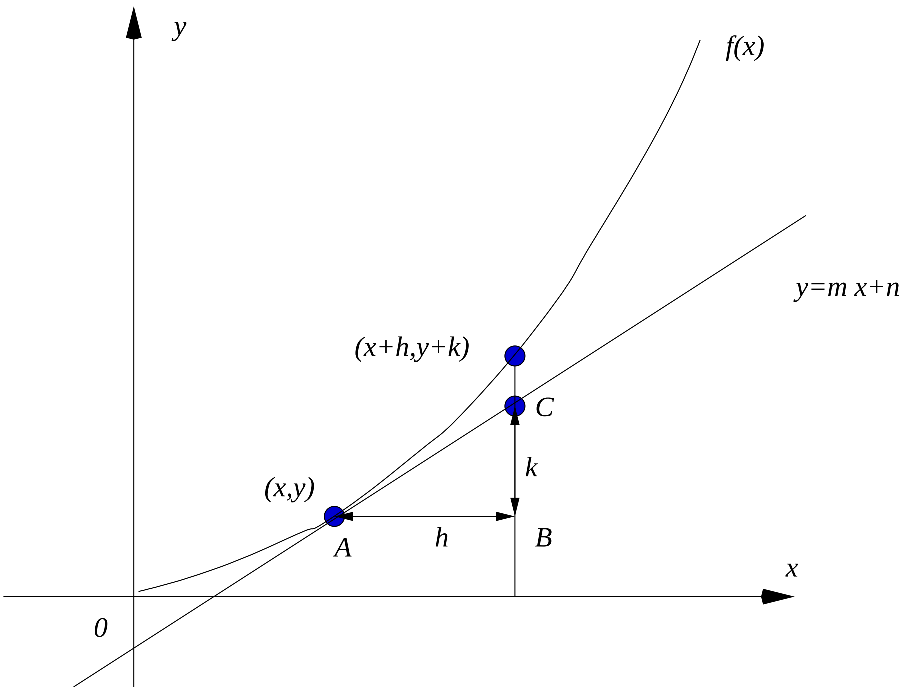
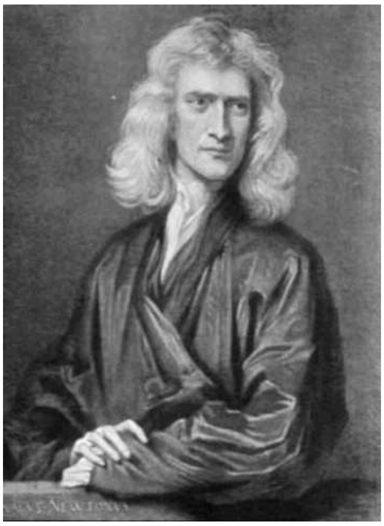


Figura 34: La recta $y = mx + n$ tangente a una curva $f(x)$

Los dos métodos descritos se hace uso de "*cantidades infinitésimales*", pero ¿qué son esas cantidades infinítesimales?



Isaac Newton (izquierda) y Gottfried Leibniz (derecha)

Para evitar el uso de las cantidades infinitesimales Newton considera que las cantidades matemáticas están descritas por un movimiento continuo:

> *Las curvas son descritas y de esta forma generadas, no por una disposición de partes, sino por el continuo movimiento de puntos.*

Newton en *De Methodis serierum et fluxionum* define los dos principales problemas del cálculo:

Problema 1 Dada la relación entre las cantidades fluentes (variables), encontrar la relación de las fluxiones (derivadas),

Problema 2 Cuando una ecuación para las fluxiones (derivadas) de cantidades es dada, determinar la relación de las cantidades.

En *De quadratura curvarum* (1704) describe un método directo para calcular las fluxiones: ejemplo $f(x) = x^n$

Cuando la función x fluyendo se convierta en $x + h$, la función x^n se convierte en $(x + h)^n$, esto es por el método de series infinitas

$$x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1}{2}hhx^{n-2} + \cdots + \text{etc.}$$

Y el incremento h (de x) y

$$nhx^{n-1} + \frac{n(n-1}{2}hhx^{n-2} + \cdots + \text{etc.}$$

(de x^n) es uno a otro como 1 a

$$nx^{n-1} + \frac{n(n-1}{2}hx^{n-2} + \cdots + \text{etc.}$$

Ahora dejemos que estos incrementos (h) se desvanezcan y su última razón será como 1 a nx^{n-1}.

Para resolver los inconvenientes de los infinitesimales se necesitaron más de 200 años. ¡Se necesitaba el concepto de límite!

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

El segundo descubridor del Cálculo diferencial fue Leibniz. La idea original de Leibniz era considerar las curvas como una unión de infinidad de segmentos indivisibles de longitud infinitesimal de forma que la prolongación de estos segmentos daban las rectas tangentes a la curva en los distintos puntos. Leibniz afirmaba

Una figura curvilinea debe ser considerada lo mismo que un polígono con un infinito número de lados.

Se necesitarían otros 100 años más hasta que apareciera en 1960-70 el Cálculo no estándard de A. Robinson que es la fundamentación sólida del cálculo leibniziano.

Hoy día usamos la notación introducida por Leibniz para el diferencial $d\,f(x)$, la derivada $\frac{d\,f(x)}{d\,x}$ y $\int$ para la integral La notación $f'(x)$ para la derivada se debe a Lagrange (1797).

5.2. Derivabilidad de una función.

Definición 5.1 *(Bolzano 1817, Cauchy, 1821) Se dice que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $x = a$ si existe el límite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Dicho límite se denomina derivada *de $f(x)$ en x=a.*

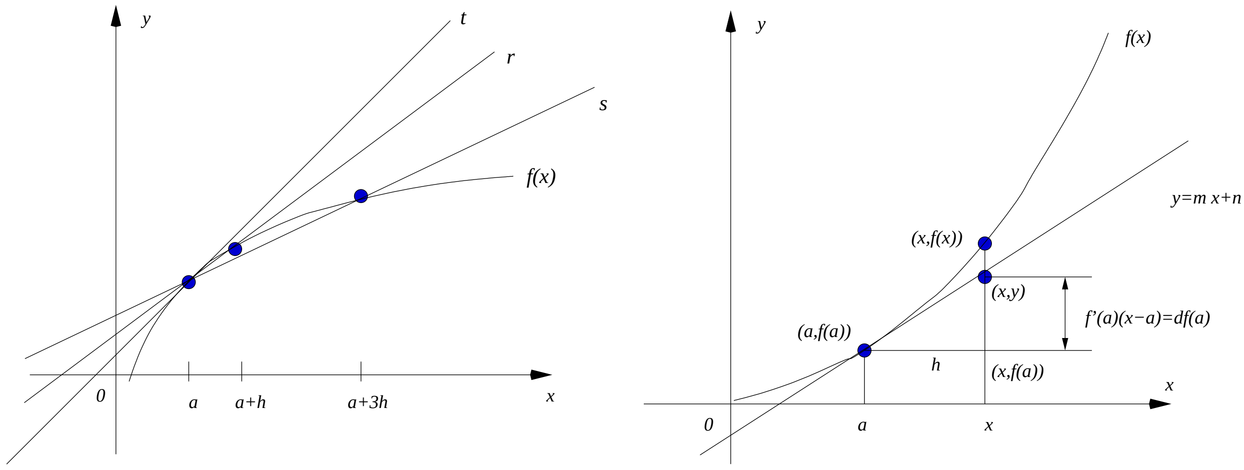


Figura 35: Construcción de la recta t tangente a una curva $f(x)$ en un punto $x = a$ (izquierda). El diferencial $df(a)$ de una función $f(x)$ en el punto $x = a$ (derecha).

Geométricamente significa que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ es igual a $f'(a)$ y por lo tanto la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = a$ se escribe como

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \tag{5.3}$$

Definición 5.2 *Se dice que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable por la izquierda en $x = a$ si existe el límite lateral*

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

que denominaremos derivada por la izquierda en $x = a$. Dicha derivada la denotaremos por $f'(a-)$.

Teorema 5.1 *Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $x = a$ si y sólo si $f(x)$ es derivable por la izquierda y por la derecha en $x = a$.*

Definición 5.3 *Diremos que $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es diferenciable en $x = a$ (punto de acumulación de A) si existe una constante C tal que $f(x) - f(a) = C(x - a) + o(x - a)$. La función $C(x - a)$ se denomina diferencial de f en $x = a$ y se denota por $d\,f(a)$.*

5.3. Propiedades de las funciones derivables

Definición 5.4 *Diremos que una función $f(x)$ tiene un máximo local en el punto $x = a$ si en todo un entorno $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, de $x = a$, $f(x) \le f(a)$.*

Diremos que una función $f(x)$ tiene un mínimo local en el punto $x = a$ si en todo un entorno $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, de $x = a$, $f(x) \ge f(a)$.

Tomemos como ejemplo la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \le x < 2, \\ \\ -2x + 8 & 2 \le x \le 6, \end{cases} \quad ; \qquad g(x) = \sin \pi x, \quad x \in [0, 2].$$

cuya gráfica está representada en la figura 36.

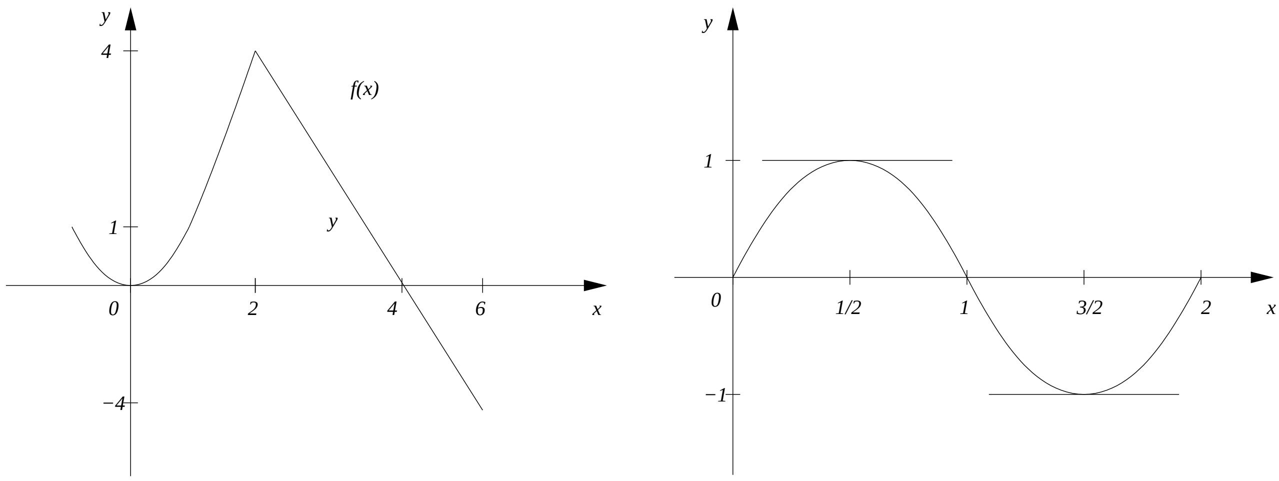


Figura 36: Máximos y mínimos locales.

Teorema 5.2 *(Lema de Fermat) Si una función tiene un extremo local en $x = a$ y $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces, $f'(a) = 0$.*

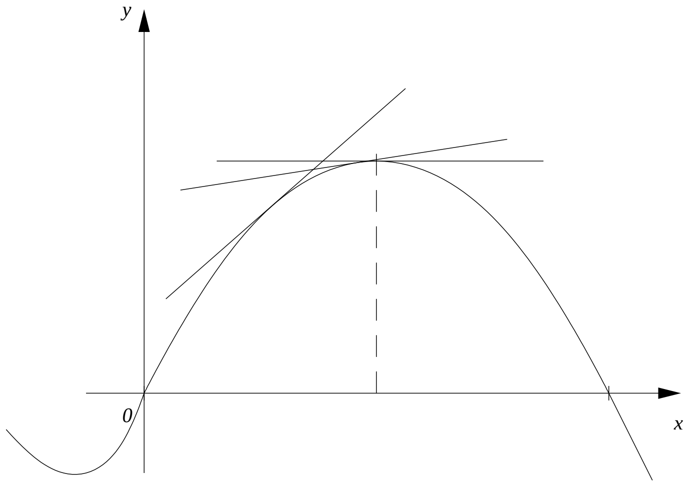


Figura 37: Lema de Fermat.

Teorema 5.3 *(Teorema de Rolle) Sea $f(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$ y derivable (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces, $\exists c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 5.4 *(Teorema del valor medio de Lagrange) Sea la función $f(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en todo el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe un c en el interior de del intervalo $[a, b]$, $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

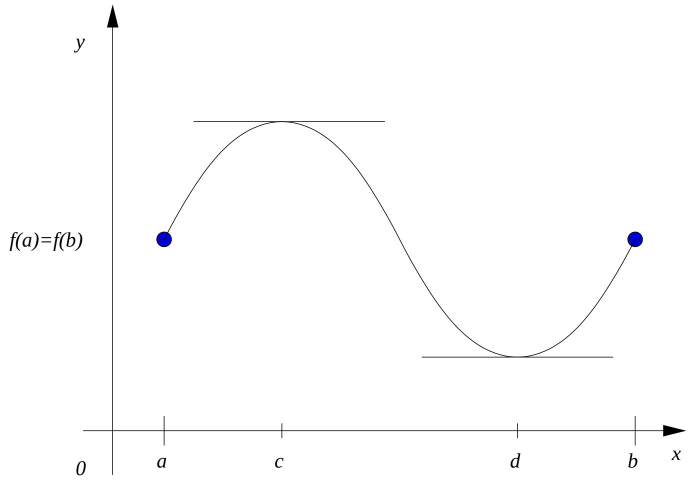


Figura 38: Interpretación geométrica del Teorema de Rolle.

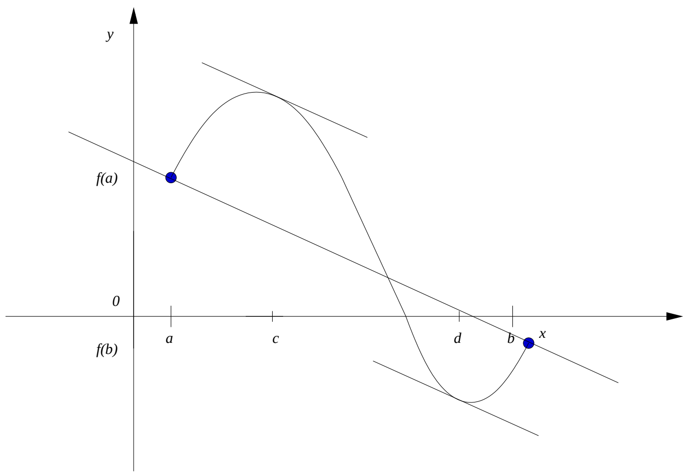


Figura 39: Interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio de Lagrange.

Teorema 5.5 *(Teorema del valor medio de Cauchy)*
Sean dos funciones $f(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continuas en todo el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe un ξ en el interior de del intervalo $[a, b]$, $\xi \in (a, b)$, tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi).$$

Teorema 5.6 *(Regla de L'Hospital para la indeterminación $\frac{0}{0}$ I)*
Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1. *Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y son derivables en un entorno del punto $x = a$ (excepto quizás en el punto $x = a$)*

2. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

3. *$g'(x) \neq 0$ en dicho entorno de $x = a$ (excepto quizás en el punto $x = a$)*

4. *Existe el límite* $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces existe el límite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *y es igual a* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

5.4. Derivadas de orden superior.

Si existe la derivada de una función $f(x)$ en todo un intervalo $[a, b]$ podemos definir una nueva función que coincide con la primera derivada en dicho intervalo. Es evidente que podemos definir la derivada de esta nueva función. Así definiremos la segunda derivada, que denotaremos por $f''(x_0)$ o $\dfrac{d^2 f(x_0)}{d\,x^2}$, de una función en un punto $x = x_0$ la derivada de la función $f'(x)$ en $x = x_0$, o sea,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}.$$

Si existe la segunda derivada para todo x comprendida en un intervalo $[a, b]$ podemos definir la función segunda derivada de f en dicho intervalo. Análogamente, si existe la derivada de orden $n - 1$, $f^{(n-1)}(x)$, podemos definir la función n-ésima derivada de f, que denotaremos por $f^{(n)}(x)$ o $\dfrac{d^n f(x)}{d\,x^n}$, a la función (si existe) definida por

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}, \qquad \forall x_0 \in [a, b].$$

5.5. Problemas complementarios.

Problema 5.1 *Probar que*

1. $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$
2. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \qquad x \in \mathbb{R}$
3. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x, \qquad x \in \mathbb{R}$
4. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}$
5. $(\operatorname{arc\,sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad x \in (-1, 1)$
6. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad x \in (-1, 1)$
7. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$
8. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$
9. $(a^x)' = a^x \ln a, \qquad \forall a > 0, a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}$
10. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \qquad x > 0,\ a > 0$
11. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad x \in \mathbb{R}$
12. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \qquad x \in \mathbb{R}$

13. $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R}$

14. $(\operatorname{cth})' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Problema 5.2 *Calcular las derivadas $f'(x)$ de las siguientes funciones:*

$$(a)\quad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \qquad (b)\quad g(x) = \sqrt{x^2 - a^2},$$

$$(c)\quad h(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x) + \cos^2(\operatorname{sen} x), \qquad (d)\quad l(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x+1}}},$$

$$(e)\quad y(x) = \ln[\ln(\ln x)] \qquad (f)\quad p(x) = \operatorname{arc\,sen}(\cos x).$$

Problema 5.3 *Calcular las derivadas $f'(x)$ de las funciones del problema 4.4.*

Problema 5.4 *Calcular las derivadas $f'(x)$ de las siguientes funciones:*

$$(a)\quad y = e^x \operatorname{sen} x, \qquad (b)\quad y = \sqrt{x^2-1} - 1,$$

$$(c)\quad y = x e^{1/x}, \qquad (d)\quad y = x^2 e^x,$$

$$(e)\quad y = (x-2)x^{2/3}, \qquad (f)\quad y = (x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$(g)\quad y = \frac{x}{\ln x}, \qquad (h) y = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$(i)\quad y = \frac{x+2}{(x-1)^3}, \qquad (j)\quad y = \frac{e^{1/x}}{1-x},$$

$$(k)\quad y = \frac{x^4+1}{x^3-x^2}, \qquad (l)\quad y = \ln[(x-1)(x-2)],$$

$$(m)\quad y = \frac{e^x}{x(x-1)} \qquad (n)\quad y = \log_a(1 + \operatorname{sen}(e^x)).$$

Problema 5.5 *Sean f, g funciones derivables en todo $\mathbb{R}$. Escribir la derivada de las siguientes funciones:*

$$(a)\quad y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, \quad (b)\quad y = \arctan\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right), \quad (g \neq 0)$$

$$(c)\quad f(x)^{g(x)}, \quad f(x) > 0, \quad (d)\quad \log_{f(x)} g(x), \quad f(x), g(x) > 0.$$

Problema 5.6 *Estúdiese la continuidad y derivabilidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}^a \dfrac{1}{x^b} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

para los distintos valores $a, b > 0$.

Problema 5.7 *¿Es derivable la función*

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)e^{\frac{1}{2-x}} & si\ x \neq 2 \\ 0 & si\ x = 2 \end{cases}$$

en $x = 2$*?*

Problema 5.8 *¿En qué puntos la gráfica de la función* $f(x) = x + (\operatorname{sen} x)^{1/3}$ *tiene tangente vertical?.*

Problema 5.9 *¿Para qué valor de a la parábola* $y = ax^2$ *es tangente a la curva* $y = \log x$*?. Escríbase la ecuación de la tangente común.*

Problema 5.10 *La función* $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ *se anula en* -1 *y* 1*, y, sin embargo,* $f'(x) \neq 0$ *en* $(-1, 1)$*. Explicar esta aparente contradicción con el teorema de Rolle.*

Problema 5.11 *Sea la función*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{3-x^2}{2} & si \quad x < 1, \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x \geq 1. \end{array} \right\}.$$

¿Se puede aplicar el teorema del valor medio en [0,2]? En caso afirmativo hállese el punto (o puntos) de la tesis del teorema.

Problema 5.12 *Utilizando el Teorema del valor medio demuéstrese las siguientes desigualdades:*

$$(a) \quad |\operatorname{sen} x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (b) \quad \frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \qquad (x > 0).$$

Problema 5.13

1. *Utilizando el Teorema del valor medio calcule*

$$\lim_{x \to \infty} \left[(1+x)^{1+\frac{1}{1+x}} - x^{1+\frac{1}{x}} \right].$$

2. *Sea* f *una función derivable. Calcula*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+bh) - f(x-ah)}{(a+b)h}$$

con $a, b > 0$*.*

Problema 5.14 *Utilizando el Teorema del valor medio demuestre que:*

1. $\operatorname{sen} x + \tan x > 2x, \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}),$
2. $\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2}, \quad x \neq 0,$
3. La ecuación $e^x = 1 + x$ no tiene ninguna solución real excepto la trivial $x = 0$.
4. Para $|x| << a$ $(|x-a| \to 0)$, $e^{\frac{x}{2}} \approx \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ con una presición hasta orden $(\frac{x}{2})^2$.

Problema 5.15 *Dada la función*

$$y = \frac{x \log^2 x}{1 + \log x},$$

determínese

1. *Su campo de existencia.*
2. *Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
3. *Sus extremos relativos.*

Problema 5.16 *Considérese la función* $f(x) = 2\,x - 3\,x^{2/3}$.

1. *Estúdiese su continuidad y derivabilidad.*
2. *¿Cumple esta función las hipoótesis del Teorema del valor medio en el intervalo* $[-1, 1]$ *?*
3. *Hallar los máximos y mínimos absolutos de esta función en el intervalo* $[-1, 2]$.

Problema 5.17 *Sea*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} A + x + x^2 & si & x < 0 \\ B\,sen\,x & si & x \geq 0 \end{array} \right\}.$$

1. *Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x)$*, cuando* $x < 0$.
2. *Hallar los valores de* A *y* B *que hacen que* f *sea derivable en* $x = 0$.
3. *Para los valores de* A *y* B *calculados en (b), ¿es* f *derivable en toda la recta real?*
4. *Para los valores* $A = -1$ *y* $B = 1$*, ¿alcanza* f *un valor mínimo (absoluto) en la recta real? En caso afirmativo, hallar el valor mínimo (absoluto) y el punto* x *para el que se alcanza ese valor.*
5. *Para los valores* $A = -1$ *y* $B = 1$*, ¿alcanza* f *un valor máximo (absoluto) en la recta real? En caso afirmativo, hallar el valor máximo (absoluto) y el punto* x *para el que se alcanza ese valor.*

Problema 5.18 *Calcule las* $n-$*ésimas derivadas de las siguientes funciones:*

$$(a) \quad f(x) = \operatorname{sen} ax, \quad a \in \mathbb{R} \quad (b) \quad g(x) = \cos(ax), \quad a \in \mathbb{R} \qquad (c) \quad h(x) = \frac{1}{x},$$

$$(d) \quad l(x) = e^{ax}, \quad a \in \mathbb{R}, \qquad (e) \quad p(x) = \log_a(bx), \quad a, b > 0, \quad q(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Problema 5.19 Fórmula de Leibnitz para la derivada n-ésima de un producto. *Si* f, g *son funciones* n *veces derivables en* $\mathbb{R}$ *prueba que* fg *también lo es y que se verifica:*

$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + \cdots + \binom{n}{n} f g^{(n)}.$$

Problema 5.20 *Utilizando la fórmula de Leibnitz calcular las siguientes derivadas:*

$$(a) \quad f^{(n)}(x), \quad f(x) = x^2 \operatorname{sen} x, \quad (b) \quad g^{(3)}(x), \quad g(x) = e^x \cos(x),$$

$$(c) \quad h^{(5)}(x), \quad h(x) = \frac{e^{2x}}{x}, \qquad (d) \quad l^{(4)}(x), \quad l(x) = e^{-x} \ln 2x.$$

Problema 5.21

1. *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivable. Si* f *admite* $k (\geq 2)$ *raíces en* $[a, b]$*, entonces* f' *admite la menos* $k - 1$ *raíces en* $[a, b]$*.*

2. *Si* f *es* n *veces derivable en* $[a, b]$ *y se anula en* $n+1$ *puntos distintos de* $[a, b]$*, prueba que* $f^{(n)}$ *se anula al menos una vez en* $[a, b]$*.*

6. El teorema de Taylor.

Concepto de diferencial en un punto. Polinomio de Taylor. Resto n-ésimo. Teorema de Taylor. Aplicación al cálculo de límites, aproximación de funciones, extremos relativos y convexidad. Aplicación a la representación gráfica de una función en forma explícita.

6.1. El polinomio de Taylor

Definición 6.1 *Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan equivalentes en $x = a$ si $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando x tiende a a.*

Definición 6.2 *Una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ se denomina infinitesimal en $x = a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.*

Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es infinitesimal en $x = 0$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x - 2)$ es infinitesimal en $x = 2$.

Definición 6.3 *Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan infinitésimos equivalentes en $x = a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando x tiende a a.*

Definición 6.4 *(o pequeña) Dados dos funciones f y g infinitésimales en cierto $x = a$, diremos que $g(x)$ es un infinitésimo de orden mayor que $f(x)$ en $x = a$ si $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ y se escribe $g(x) = o(f(x))$ cuando x tiende a a.*

Por ejemplo, la función x^2 es un infinitésimo de mayor orden que x en $x = 0$, es decir $x^2 = o(x)$, y la función x^3 es un infinitésimo de mayor orden que $x^{3/2}$ en $x = 0$, o sea, $x^3 = o(x^{3/2})$.

Obviamente se tiene que:

1. Para todo $m \in \mathbb{R}$, $m \cdot o(x) = o(x)$,
2. La suma de un número finito infinitésimos equivalentes es un infinitésimo,
3. El producto de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo de orden superior.

Usando lo anterior podemos reescribir la definición de función diferenciable.

Definición 6.5 *Diremos que $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es diferenciable en $x = a$ (punto de acumulación de A) si existe una constante C tal que $f(x) - f(a) = C(x - a) + o(x - a)$. La función $C(x - a)$ se denomina diferencial de f en $x = a$ y se denota por $d\,f(a)$.*

Nótese que el diferencial de f en $x = a$ es único pues como $\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \left(C + \frac{o(x - a)}{x - a} \right) = C.$$

El diferencial tiene un significado geométrico muy importante, es justo la distancia entre $f(a)$ y el valor $y(x)$ de la recta tangente a f en $x = a$

Si tenemos en cuenta que el diferencial de la función $f(x) = x$ en cualquier punto $a \in A$ es $d\,x(a) = 1(x - a)$, podemos redefinir el diferencial de una función de la forma $d\,f(a) = f'(a)dx(a)$, así se tiene la siguiente

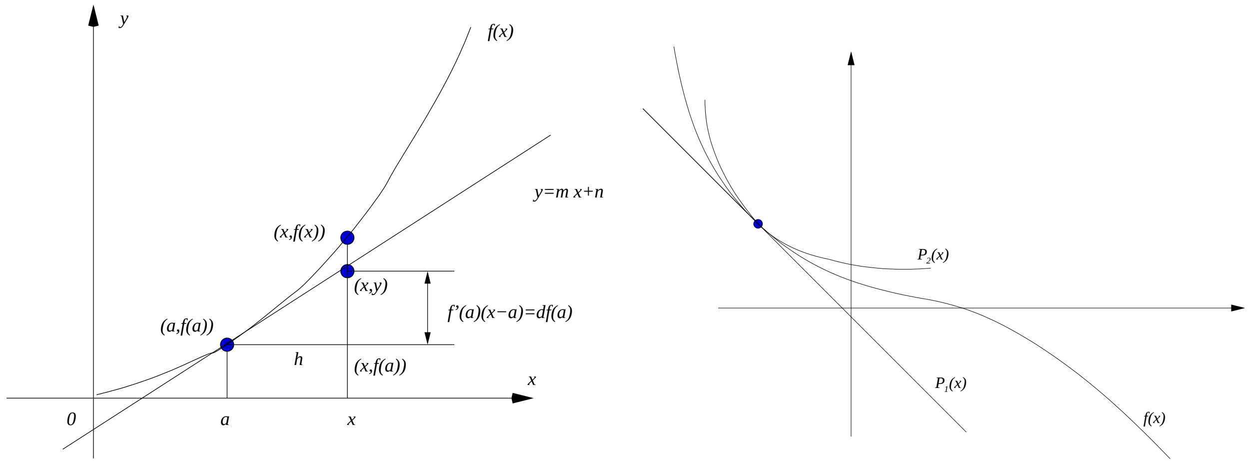


Figura 40: El diferencial $df(a)$ de una función $f(x)$ en el punto $x = a$ (izquierda). La curva $P_2(x, a)$ tangente a $f(x)$ en $x = a$ (derecha).

Definición 6.6 *Se define como diferencial de una función $f(x)$ a la cantidad $d\,f(x)$ definida por*

$$d\,f(x) = f'(x)\,d\,x. \tag{6.4}$$

Con la notación anterior, y de la definición de diferenciabilidad se deduce además que $f(x+h) \approx f(x) + d\,f(x)$. Es decir,

$$f(x+h) = f(x)+d\,f(x)+o(h) = f(x)+f'(x)h+o(h), \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a).$$

Definamos el polinomio $P_1(x, a) = f(a) + f'(a)(x - a)$, entonces

$$f(x) - P_1(x, a) = o(x - a), \implies f(a) = P_1(a, a), \quad f'(a) = P_1'(a, a).$$

¿De qué manera podemos construir un polinomio que aproxime a nuestra función en un entorno de un punto $x = a$ hasta órdenes mayores, digamos $o[(x - a)^n]$?

Probemos con una curva algo más complicada: una parábola

$$P_2(x, a) = A(x - a)^2 + B(x - a) + C,$$

que sea tangente a f en $x = a$, o sea, tal que $P_2(a, a) = f(a)$, y $P_2'(a, a) = f'(a)$. Ello nos da

$$P_2(x, a) = A(x-a)^2+f'(a)(x-a)+f(a), \quad \Longrightarrow \quad P_2(x, a) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Nótese que $P_2(a, a) = f(a)$, $P_2'(a, a) = f'(a)$ y $P_2''(a, a) = f''(a)$. Es decir, el polinomio $P_2(x, a)$ es tangente a f y el punto de tangencia es de orden 2.

Definición 6.7 *Diremos que un punto $x = a$ es un punto de tangencia de dos funciones f y g de orden n si f y g son tales que $f(a) = g(a)$ y sus derivadas $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$, para $k = 1, 2, \ldots n$.*

Definamos el siguiente polinomio de grado a lo más n

$$P_n(x, a) = a_n(x - a)^n + a_{n-1}(x - a)^{n-1} + \cdots a_1(x - a) + a_0,$$

de forma que $P_n(x,a)$ tenga un punto de tangencia de orden n con la función $f(x)$ que supondremos n-veces derivable en $x=a$. Luego, $a_0,...,a_n$ de $P_n(x,a)$ son

$$f(a)=P_n(a,a),\;\; f'(a)=P_n'(a,a), f''(a)=P_n''(a,a),\;\; \cdots,$$

$$f^{(n-1)}(a)=P_n^{(n-1)}(a,a),\quad f^{(n)}(a)=P_n^{(n)}(a,a).$$

Las ecuaciones anteriores son fáciles de resolver pues

$$P_n^{(k)}(a,a)=k!a_k,\qquad \text{por tanto } a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Definición 6.8 *Dada una función $f(x)$ n-veces derivable en un entorno de $x=a$, llamaremos polinomio de Taylor de grado a lo más n de la función $f(x)$, y lo denotaremos por $P_n(x,a)$, al polinomio*

$$\begin{aligned} P_n(x,a) = &\; \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\cdots+f'(a)(x-a)+f(a) \\ = &\; \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \qquad \text{grado}P_n(x,a)\le n\ . \end{aligned}$$

Teorema 6.1 *(Teorema local de Taylor) Sea $f(x)$ $n-$veces derivable en un entorno de $x=a$ y sea $P_n(x,a)$ el polinomio de Taylor. Entonces,*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_n(x,a)}{(x-a)^n}=0,\qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x)-P_n(x,a)=o[(x-a)^n].$$

Teorema 6.2 *(Polinomios de McLaurin de las funciones elementales.)*

1. $\operatorname{sen} x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2n}).$

2. $\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2k+1}).$

3. $(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k+o(x^n),\quad (\alpha)_k=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$

4. $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n).$

5. $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o(x^n).$

Aplicación al cálculo de límites

Usando los desarrollos del teorema anterior tenemos, por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x+x^3/6+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

Otro ejemplo es

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2/2+o(x^2)-1-x}{1-(1-x^2/2+o(x^2))}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2+o(x^2)}{x^2/2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+o(x^2)/x^2}{1+o(x^2)/x^2}=1.$$

Teorema 6.3 *(Estimación del error del Teorema de Taylor) Sea $f(x)$ una función $(n)-$veces derivable en $[a,x]$ y con $n-$ésima derivada continua en $[a,x]$ y derivable en (a,x) y sea $P_n(x,a)$ el polinomio de Taylor*

$$P_n(x,a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{6.5}$$

Sea $\phi(x)$ una función continua en $[a,x]$ y derivable en (a,x) con $\phi'(x)\neq 0$ en (a,x). Entonces existe un $c\in(a,x)$ tal que

$$R_n(x,a)=\frac{\phi(x)-\phi(a)}{\phi'(c)n!}f^{(n+1)}(c)(x-c)^n,\quad c\in(a,x). \tag{6.6}$$

Corolario 6.1 1. *Fórmula del* resto de Taylor en forma de Cauchy.

$$R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a),\quad c\in(a,x). \tag{6.7}$$

2. *Fórmula del* resto de Taylor en forma de Lagrange.

$$R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\quad c\in(a,x). \tag{6.8}$$

3. *Fórmula del* resto de Taylor en forma de Scholömilch.

$$R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\,p}(x-c)^{n+1-p}(x-a)^p,\quad c\in(a,x),\quad p>0. \tag{6.9}$$

Teorema 6.4 *(Condición suficiente de extremo) Sea f continua en todo un entorno de un punto $x=a$ y y derivable en todo un entorno de un punto $x=a$ excepto quizá el propio punto $x=a$ y $f'(x)$ cambia de signo al pasar por $x=a$. Entonces f tiene un extremo local en $x=a$.*

Las condiciones del teorema anterior son **sólo suficientes**.

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}. \tag{6.10}$$

Esta función tiene un mínimo local (de hecho global) en $x=0$ pues

$$x^2\le f(x)\le 3x^2,\qquad\Longrightarrow\quad f(x)\ge 0,\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Además, f es derivable en todo $\mathbb{R}$ siendo

$$f'(x)=\begin{cases}4x+2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Cualquiera sea el entorno de $x=0$ que escojamos a la izquierda y a la derecha del mismo hay valores de x para los cuales f' es positiva y negativa (ver figura 41), o sea, f' no tiene ningún signo determinado ni a la izquierda ni a la derecha de $x=0$.

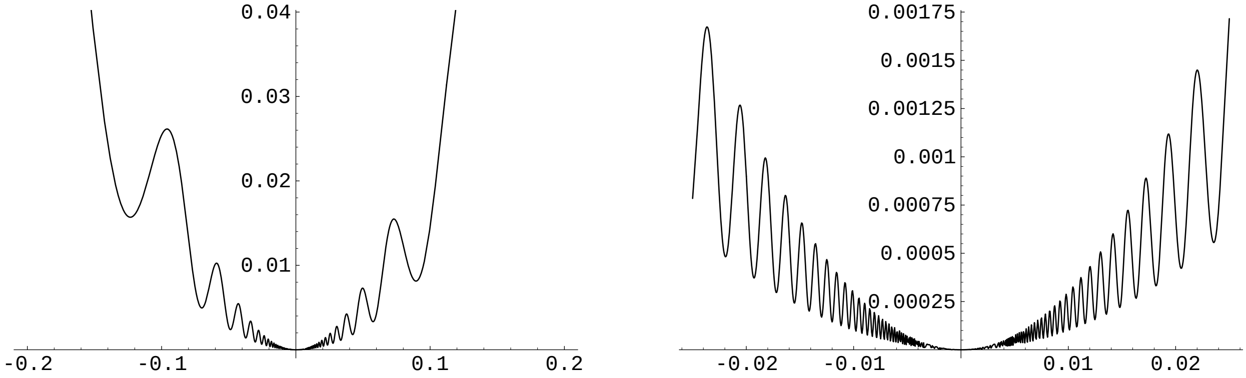


Figura 41: La función f definida en (6.10) y detalle de la misma (derecha).

6.2. Convexidad de una función

Se dice que una función $f(x)$ es estrictamente convexa hacia abajo (cóncava) en (a, b) si cualquiera sea la recta secante s que corte a f en los puntos $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a, b)$, está siempre por encima del gráfico de la curva $y = f(x)$ en el intervalo (x_1, x_2)

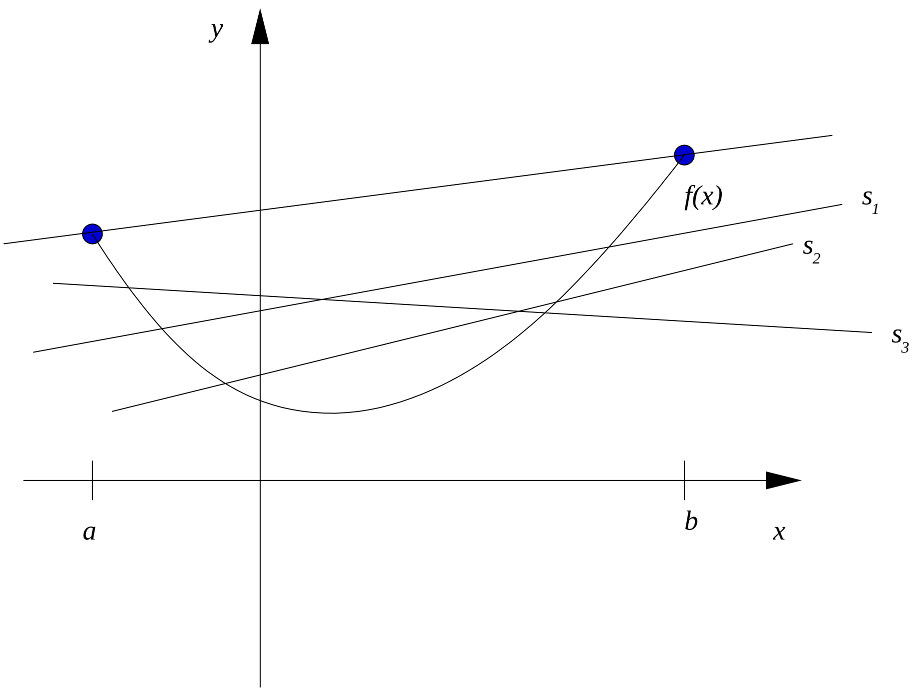


Figura 42: Definición de función convexa hacia abajo (cóncava).

Sea $g(x)$ a la recta secante que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1)$ y $(x_2, f(x_2))$ tenemos

$$g(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right) f(x_1) + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) f(x_2).$$

Entonces cualquiera sea $x \in (x_1, x_2)$, podemos escribir

$$x = \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right) x_1 + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) x_2 = (1 - t)x_1 + tx_2,$$

Luego, si f está por debajo de g en (x_1, x_2) tenemos $f(x) \geq g(x)$, de donde se deduce que $f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, y viceversa.

Definición 6.9 *Una función $f(x)$ es estrictamente convexa hacia abajo (cóncava) en (a, b) si*

$$\forall x_1,\, x_2 \in (a,b),\ \forall t \in [0,1], \quad f[(1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

o, equivalentemente, para todo x_1, x_2 de (a,b), y todo x tal que $x_1 < x < x_2$,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Si las desigualdades anteriores no son estrictas se dice que $f(x)$ es convexa hacia abajo.

Geométricamente la convexidad se puede interpretar de la siguiente forma: dadas las secantes que pasan por los puntos $(x_1, f(x_1))$, $(x, f(x))$ –s_1 en la figura 43– y $(x, f(x))$, $(x_2, f(x_2))$ –s_2 en la figura 43–, la pendiente de la primera siempre es menor que la de la segunda.

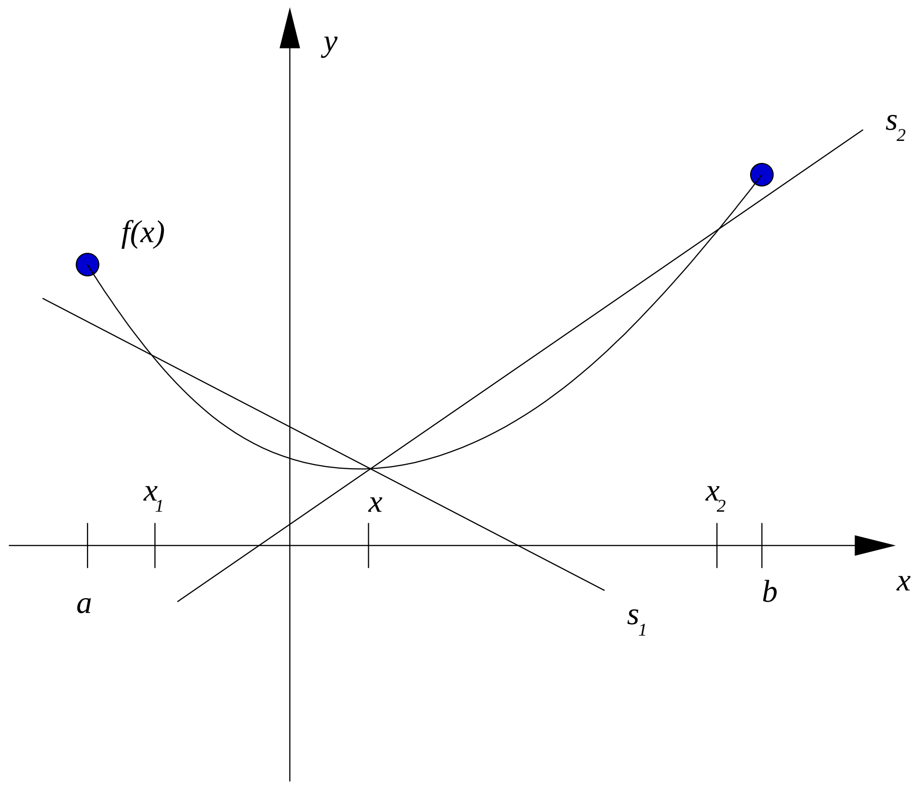


Figura 43: Interpretación geométrica de la convexidad (hacia abajo) según las pendientes de las rectas secantes.

Teorema 6.5 *Para que una $f(x)$ derivable en (a,b) sea convexa hacia abajo (cóncava) en (a,b) es necesario y suficiente que su primera derivada no decrezca. Además si $f'(x)$ es estrictamente creciente en todo (a,b), entonces $f(x)$ es estrictamente convexa hacia abajo.*

Corolario 6.2 *Para que una $f(x)$ dos veces derivable en (a,b) sea convexa hacia abajo (cóncava) en (a,b) es necesario y suficiente que $f''(x) \geq 0$. Además si $f''(x) > 0$ en todo (a,b), entonces $f(x)$ es estrictamente convexa hacia abajo.*

El siguiente teorema nos da otra interpretación geométrica de la convexidad pero para funciones derivables.

Teorema 6.6 *Una función $f(x)$ derivable en (a,b) es convexa hacia abajo (cóncava) en un intervalo (a,b) si y sólo si la curva $y = f(x)$ no está por debajo de cualquiera de las rectas tangentes a ella en dicho intervalo.*

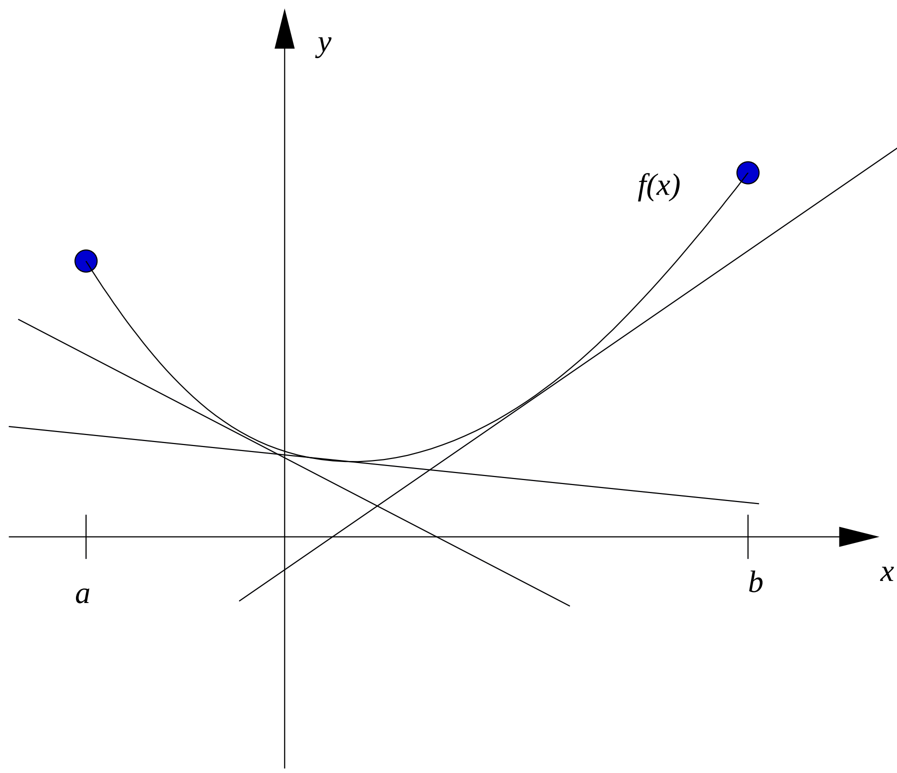


Figura 44: Función convexa hacia abajo (cóncava) y sus rectas tangentes.

Definición 6.10 *Una función $f(x)$ es estrictamente convexa hacia arriba (convexa) en un intervalo (a,b) si cualquier recta secante s que corte a f en los puntos $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a,b)$, está siempre por debajo del gráfico de la curva $y = f(x)$ en el intervalo (x_1, x_2), tal y como se muestra en la figura 45 (izquierda), o equivalentemente, si*

$$\forall x_1,\, x_2 \in (a,b),\ \forall t \in [0,1], \quad f[(1-t)x_1 + tx_2) > (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

o, equivalentemente, para todo x_1, x_2 de (a,b), y todo x tal que $x_1 < x < x_2$,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Teorema 6.7 *Para que una $f(x)$ derivable en (a,b) sea convexa hacia arriba en (a,b) es necesario y suficiente que su primera derivada no crezca. Y si es estrictamente decreciente entonces es estrictamente convexa hacia arriba.*

Corolario 6.3 *Para que una $f(x)$ dos veces derivable en (a,b) sea convexa hacia arriba en (a,b) es necesario y suficiente que $f''(x) \leq 0$. Además si $f''(x) < 0$ en todo (a,b), entonces $f(x)$ es estrictamente convexa hacia arriba.*

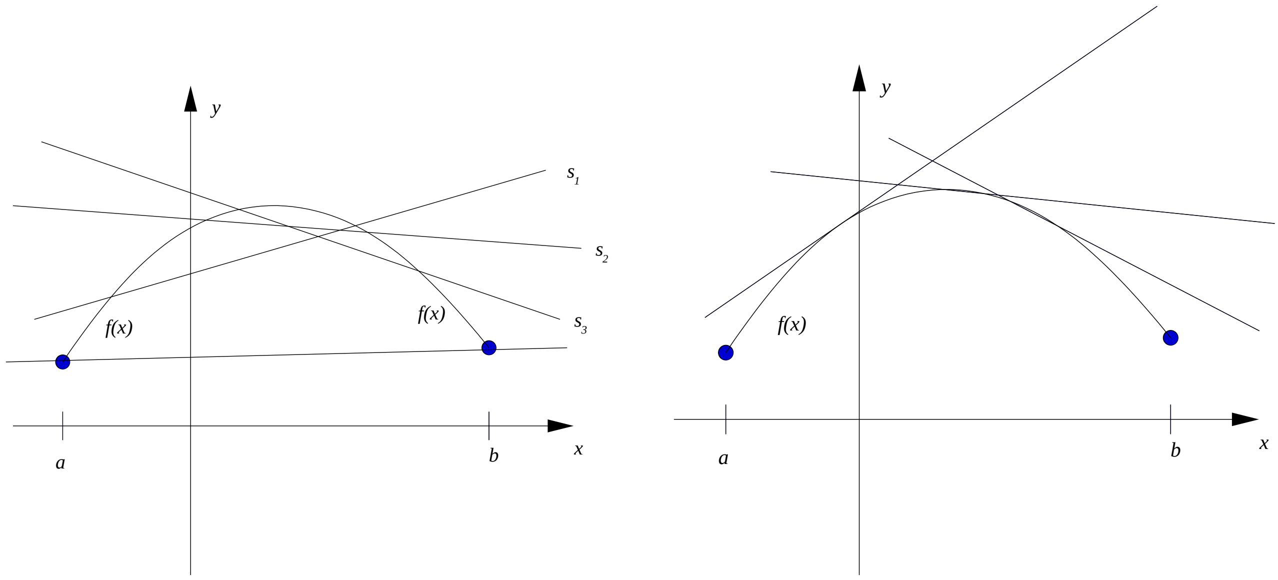


Figura 45: Función convexa hacia arriba (convexa).

6.3. Puntos de inflexión

Definición 6.11 *Un punto $x = a$ es un punto de inflexión de la función $f(x)$ si en un entorno de dicho punto la gráfica de la función $f(x)$ tiene diferentes direcciones de convexidad a la izquierda y derecha del punto*

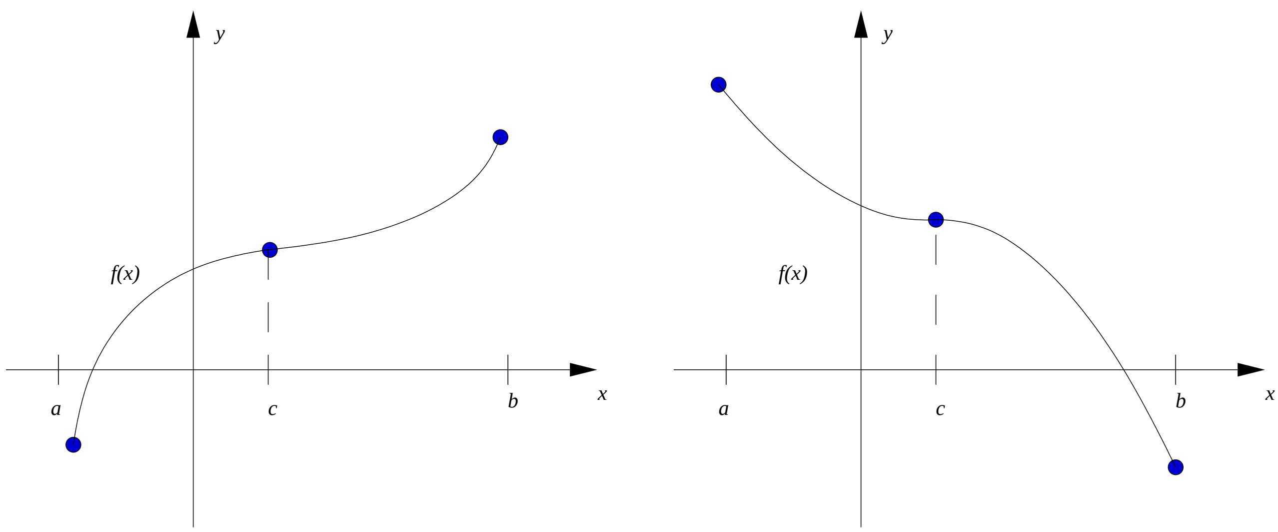


Figura 46: Punto de inflexión convexa a cóncava.

Obviamente los puntos de inflexion de $f(x)$ son los extremos de $f'(x)$.

Teorema 6.8 *(Condición necesaria para la existencia de un punto de inflexión) Si $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$, entonces o $f''(a) = 0$ o $f''(a)$ no existe.*

Teorema 6.9 *(Condición necesaria y suficiente de punto de inflexión) Sea $f(x) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tres veces derivable en un entorno del punto $x = a$ tal que $f''(a) = 0$, entonces la* *función tendrá en $x = a$ un punto de inflexión si $f'''(a) \neq 0$. Si $f'''(a) > 0$ entonces la función pasará de convexa hacia arriba a convexa hacia abajo y si $f'''(a) < 0$, entonces la función pasará de convexa hacia abajo a convexa hacia arriba.*

6.4. Aplicaciones a la representación gráfica de funciones.

Esquema para la representación de la función $y = f(x)$.

1. Determinar el dominio de la función $f(x)$.
2. Determinar si la función tiene simetría par o impar, o si es periódica.
3. Determinar los puntos de discontinuidad de la función (evitables y no evitables) así como las asíntotas verticales, horizontales y oblícuas de la función.
4. Encontrar los puntos de corte con los ejes, o sea, los ceros de la función $f(x) = 0$, y el punto $f(0)$.
5. Encontrar los extremos de la función y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Encontrar los puntos de inflexión de la función y los intervalos de concavidad y convexidad.

Ejemplo 6.1 *Estudiar la función* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

1. Dominio de la función: $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
2. La función tiene simetría par. (es suficiente estudiarla para $x > 0$)
3. Tiene dos puntos de discontinuidad no evitables de salto infinito: $x = -1$, $x = 1$. Además:
$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty,$$
y
$$\lim_{x\to -1-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to -1+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty,$$
por tanto las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son las asíntotas verticales. La función tiene una única asíntota horizontal $y = 1$, pues
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1.$$
4. Los puntos de corte con el eje son $(0, -1)$ y no tiene ceros (cortes con el eje x) pues $f(x) = 0$ es equivalente con $x^2 + 1 = 0$ que no tiene soluciones reales.
5. Vamos a encontrar los extremos de la función y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Para ello calculamos $f'(x) = 0$ (nuestra función es continua y derivable en todo su dominio)
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right] = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}, \qquad f'(x) = 0 \iff x = 0,$$
además $f'(x)$ tiene diferentes signos a la izquierda (es positiva) y a la derecha (es negativa) del $x = 0$ por lo que $x = 0$ es un máximo local. Si utilizamos la segunda derivada
$$f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}, \qquad f''(0) = -4 < 0.$$

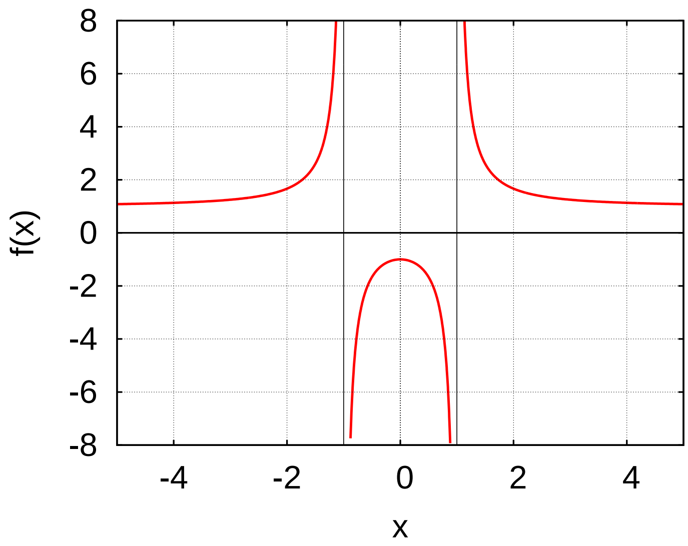


Figura 47: Función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Luego para $x \in (-\infty, 0)$ la función $f(x)$ es creciente y para $x \in (0, +\infty)$ es decreciente y tiene un máximo local en $x = 0$.

6. Vamos a encontrar los puntos de inflexión de la función y los intervalos de concavidad y convexidad. Para ello estudiamos los puntos donde $f''(x) = 0$ o donde no exista $f''(x)$:

$$f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad f''(x) \text{ no existe en } x = \pm 1.$$

Luego los únicos puntos donde la segunda derivada cambia de signo son $x = -1$ y $x = 1$. Para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ $f''(x) > 0$ por lo que $f(x)$ es cóncava es dichos intervalos. Para $x \in (-1, 1)$ $f''(x) < 0$ por lo que $f(x)$ es convexa en dicho intervalo.

El gráfico de la función está representado en la figura 47.

6.5. Problemas complementarios.

Problema 6.1 *Calcular el coeficiente de* x^4 *en el desarrollo de Taylor de* $f(x) = \log(\cos x)$ *en un entorno de* $a = 0$.

Problema 6.2 *Escribe la fórmula de Taylor de orden* 5 *alrededor del origen de la función* $f(x) = \tan x$. *Encuentre una expresión para el error cometido al aproximar la* $\tan x$ *mediante el polinomio anterior.*

Problema 6.3 *Escribe la fórmula de Taylor de orden* n *alrededor del punto que se indica, de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = 1/x$ *en* $a = -1$,
2. $f(x) = x\mathrm{e}^x$ *en* $a = 0$,
3. $f(x) = (1 + \mathrm{e}^x)^2$ *en* $a = 0$.

Problema 6.4

1. *Utilizando el teorema de Taylor escribe el polinomio* $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ *en potencias de* $x - 1$.

2. *Demuestra que* $\sin(a + h)$ *difiere de* $\sin a + h \cos a$ *en no más de* $h^2/2$.

Problema 6.5 *Obtén el desarrollo de Taylor de cualquier orden alrededor de* $a = 0$ *de la función*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Problema 6.6 *Calcula los siguientes límites utilizando el teorema de Taylor:*

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^5}, \quad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1+x} - (1 + x + x^2)}{x^3},$$

$$(c) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x}, \quad (d) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \cos x}{x^3}.$$

Problema 6.7 *Aproximar la función* $f(x) = \log(1 + \cos x)$ *alrededor del origen mediante un polinomio de grado dos. Encontrar también una expresión para el término de error (Resto de Taylor).*

Problema 6.8 *¿Cuántos términos hay que tomar en la fórmula de McLaurin de la función* $f(x) = \mathrm{e}^x$ *para obtener un polinomio que la aproxime en [-1,1] con tres cifras decimales exactas?*

Problema 6.9 *¿Cuántos términos hay que tomar en la fórmula de McLaurin de la función* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *para obtener un polinomio que la aproxime en* $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ *con cuatro cifras decimales exactas?*

Problema 6.10 *Calcular aproximadamente el valor de* $\sqrt[3]{1{,}1}$ *mediante el polinomio de Taylor de grado 3 de alguna función. Estimar el error cometido.*

Problema 6.11

1. *Calcula aproximadamente el valor de* $\operatorname{sen} 0{,}25$ *utilizando un polinomio de McLaurin de grado 3. ¿Cuál es el error cometido?*

2. *Aproxima* $\sqrt[3]{28}$ *a través de la serie de Taylor en potencias de* $x - 27$ *hasta el segundo grado. Evalúa el error cometido.*

Problema 6.12

1. *Aproxima la función* $f(x) = \cos x + \mathrm{e}^x$ *mediante un polinomio de tercer grado alrededor del origen.*

2. *Da una cota del error cometido cuando se utiliza la aplicación anterior para* $x \in [-1/4, 1/4]$.

3. *Como aplicación del primer apartado, calcula*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \mathrm{e}^x - x - 2}{x^3}.$$

Problema 6.13 *Sea* $f(x) = 1 + x^3 \operatorname{sen} x$.

1. *Hallar su polinomio de Taylor de orden 4 en el punto 0.*

2. *Decidir si f tiene en 0 un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión.*

Problema 6.14 *Hallar los puntos de máximo y mínimo, así como los intervalos de convexidad de la función f si la gráfica de su derivada f' está representada en la figura 48.*

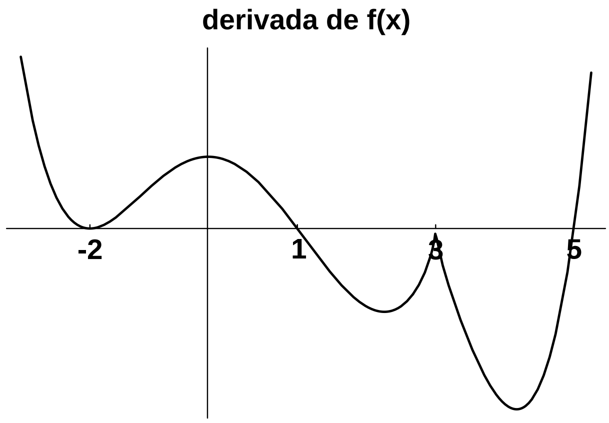


Figura 48: Gráfica de la derivada de la función $f(x)$.

Problema 6.15 *Dada la función* $f(x) = 1 - 3x^{2/5}$, *con* $x \in \mathbb{R}$,

1. *estudiar su continuidad y derivabilidad,*

2. *halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento,*

3. *calcula sus extremos relativos.*

Problema 6.16 *Estudia la concavidad de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = (x-2)x^{2/3}$,

2. $f(x) = |x|\mathrm{e}^{|x|}$,

3. $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 8)$.

Problema 6.17 *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} 2 - (x+1)^3 & si \quad x < 0 \\ \frac{2x+1}{x+1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. *¿Es f continua en 0? ¿Es f derivable en 0?*

2. *Estudiar las asíntotas de f.*

3. *Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.*

4. *Hallar los puntos de inflexión de f.*

5. *Dibujar la gráfica de f.*

Problema 6.18 *Estudia y representa gráficamente las funciones del problema 5.4*

Problema 6.19 *Sea la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = |x^3(x-4)| - 1\,.$$

1. *Estudia su continuidad y derivabilidad.*
2. *Obtén sus extremos relativos.*
3. *Prueba que la ecuación* $f(x) = 0$ *tiene una única solución en el intervalo* $(0,1)$.

7. Otros problemas.

Problema 7.1 *Sea la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$ *si* $x \neq -1$ *y* $f(-1) = \alpha$.

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f *y sus extremos absolutos y relativos. Razone si* $f(x)$ *tiene algún punto de inflexión.*

b) Determinar el valor de α *para que la ecuación* $f(x) = 0$ *tenga exactamente dos raíces reales diciendo cuales son estas raíces.*

Problema 7.2 *Sea la sucesión definida por recurrencia:* $x_1 = \alpha$, *y* $x_{n+1} = \dfrac{\operatorname{arctg} x_n}{2}$.

Estudiar la convergencia de la sucesión y hallar el límite, cuando exista, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 7.3 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2 - x\mathrm{sen}x - \cos x$. *Se pide*

1. *Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
2. *Demostrar que* $f(x)$ *tiene un mínimo absoluto y calcular dicho valor mínimo.*
3. *Probar que la ecuación* $x^2 - x\mathrm{sen}x - \cos x = 0$ *tienen exactamente dos raíces.*

Problema 7.4 *Sea la función* $f :\to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - \cos x + 1}{x^2}, & si\ x < 0; \\ b, & si\ x = 0; \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}, & si\ x > 0. \end{cases}$$

1. *Hallar* a *y* b *para que* f *sea continua para todo* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Estudiar la derivabilidad de* f.

Problema 7.5 *Sea* $f(x)$ *la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x+4}{x+1}, & x < 0 \\ (x+1)(x-2)^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

(a) *Diga cuál es su dominio y estudie su continuidad y derivabilidad.*

(b) *Encuentre sus asíntotas, extremos relativos, puntos de inflexión si los tiene y haga un esbozo de su gráfica.*

(c) *¿Se cumple el teorema de Rolle en el intervalo* $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$*? ¿Y en* $[0, 3]$*? Razone su respuesta y encuentre, si procede, los puntos de los que se habla en dicho teorema para ambos intervalos.*

Problema 7.6 *Sea la función* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \sqrt{1-x},$

1. *Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* $x = 0$ *que aproxime a dicha función en todo su dominio, así como una expresión para el error cometido.*
2. *Calcule, utilizando el resultado del apartado anterior, el valor numérico de* $f(\frac{1}{3})$, *y de una cota del error cometido.*

3. Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}+x/2-1}{2\,x^2}.$$

Problema 7.7

Sea la función $\quad f(x) = \begin{cases} e^{x+\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ \\ 2x\arctan x - \log(1+x^2) - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$

Se pide:

(a) Calcular $\quad \lim_{x\to -\infty} f(x), \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$

(b) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

(c) Estudiar el crecimiento y decrecimiento y los extremos absolutos y relativos de $f(x)$

(d) Hacer un esbozo de la gráfica de $f(x)$, y determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la ecuación $f(x) = a$ tiene, exactamente, dos soluciones.

Indicación: $\arctan x < x, \quad \forall x > 0.$

Problema 7.8

Para $x \in \mathbb{R}$, se define la función

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^{-x^3+1}}{x^3-1}\right), \quad \text{si } x \neq 1 \text{ y } f(1)=0.$$

1. Escribir el valor de los siguientes límites

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = ... \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = ... \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = ... \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = ...$$

2. La función f es continua en .... y no es continua en .... La función f es derivable en .... y no es derivable en .... Escribe la expresión de la derivada, donde exista.

$$f'(x) =$$

3. Los intervalos de crecimiento de la función f son ....y los de decrecimiento ....
4. Estudiar razonadamente los extremos absolutos de f en $\mathbb{R}$.
6. Extremos relativos de f en $\mathbb{R}$. Marca con una X la respuesta correcta y complétala cuando proceda.

Máximos relativos: ☐ No tiene
☐ Si tiene. Se alcanzan en .... La derivada en esos puntos vale ....
Mínimos relativos: ☐ No tiene
☐ Si tiene. Se alcanzan en .... y la derivada en esos puntos vale ....

7. Calcula razonadamente el número de raíces de la ecuación $f(x) = a$, cuando $a \in (-\pi/2, \arctan(-e))$.

8. ¡Cuántas raíces tiene la ecuación $f(x) = 2x$? Número de raíces: .... ¡Y la ecuación $f(x) = x/4$? Número de raíces: ....

Problema 7.9

a) Calcular razonadamente para que $\alpha \in \mathbb{R}$ es convergente la sucesión

$$a_n = \sqrt{n^2 + n^\alpha} - n.$$

Calcula en estos casos el valor del límite.

b) Calcular razonadamente el límite de la siguiente sucesión: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}\right)^{\frac{n^2}{1-n}}$.

Problema 7.10

Se considera la sucesión definida por recurrencia como $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n}{2 + x_n}$, $n \geq 0$.
1. Demuestra que $0 < x_n < 1$, $n \geq 1$.
2. Demuestra que la sucesión $(x_n)_n$ es creciente.
3. Probar que $(x_n)_n$ tiene límite. Calcularlo razonadamente.
4. Probar que para $(-\sqrt{5} - 1)/2 < x_0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ (que depende de x_0) tal que si $n > k$ entonces $x_n > 0$.

Problema 7.11

Para $x \geq -1$, se define la función

$$f(x) = \frac{e^{\frac{(1+x)^{3/2}}{x}}}{9}, \quad \text{si } x \neq 0 \text{ y } f(0) = 0.$$

1. Escribir el valor de los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = ... \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = ... \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = ...$$

2. La función f es continua en .... y no es continua en .... La función f es derivable en .... y no es derivable en .... Escribe la expresión de la derivada, donde exista.

$$f'(x) =$$

3. Los intervalos de crecimiento de la función f son .... y los de decrecimiento ....
4. Estudiar razonadamente los extremos absolutos de f en $[1, +\infty)$.
5. Extremos relativos de f en $\mathbb{R}$. Marca con una X la respuesta correcta y complétala cuando proceda.

Máximos relativos: ☐ No tiene
☐ Si tiene. Se alcanzan en .... La derivada en esos puntos vale ....
Mínimos relativos: ☐ No tiene
☐ Si tiene. Se alcanzan en .... y la derivada en esos puntos vale ....

6. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $f(x) = a(x + 1)$ si $a > 1$? número de raíces: ....
7. Calcula razonadamente el número de raíces de la ecuación $f(x) = 1$.

Problema 7.12

1. Calcular razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty} (x+1)^a - x^a$, según los valores de $a > 0$.
2. Calcula el límite $\lim_{n\to\infty} y_n$ de la sucesión $y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ suponiendo que existe el límite $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Problema 7.13

1. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{4}{3}x - x^2$. Encuentra su máximo global.

Se considera la sucesión definida por recurrencia como $x_{n+1} = x_n \left(\dfrac{4}{3} - x_n\right)$, $n \geq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Demuestra que la sucesión $(x_n)_n$ está acotada superiormente por $1/3$ (usa el apartado anterior).
3. Prueba que la sucesión $(x_n)_n$ tiene límite cuando $x_0 \in [0, 4/3]$ y calcúlalo. ¿Qué ocurre si $x_0 < 0$ ó $x_0 > 4/3$?
4. Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left[\left(1 + \dfrac{p}{n}\right)^q - \left(1 + \dfrac{q}{n}\right)^p\right]$, $p, q > 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Problema 7.14

1. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales definida por:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^3}{1 + x_n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pruebe que $\{x_n\}$ es una sucesión convergente y que su límite es 0.

2. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de números reales definida en el apartado anterior. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan x_n \;\ln(1 + 3\,x_n)}{e^{x_n^2} - \cos 2\,x_n}.$$

3. Calcular el $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + a^n}$, $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Problema 7.15

Sea $f(x)$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x < 1 \\ x e^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases} \qquad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

1. ¿Para qué valores de α, β la función $f(x)$ cumple las condiciones del teorema del valor medio (diferencial) de Lagrange en el intervalo $[0, 2]$?
2. Demuestre que el punto c del que se habla en dicho teorema es único.

Problema 7.16

Sea la función $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.

1. Represéntela gráficamente estudiando el dominio, intervalos de crecimiento, convexidad y asíntotas.

2. Calcule el área (si es posible) de la región comprendida entre la función $f(x)$ y el eje de las x.

3. ¿Es finito el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje de las x la región contenida en el primer cuadrante que limitan la gráfica de la función $f(x)$ y el propio eje x? Razone la respuesta. (Ayuda: $x^2 e^{-x^2} < 2e^{-x}$ para todo $x \geq 0$.)

Problema 7.17 (3 puntos)

Sea $f(x)$ la función $y = (x^2 - a^2)^{2/3}$, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule su dominio, imagen, asíntotas, extremos relativos y punto de inflexión si los tiene.

(b) Represénte gráficamente la función para $a = 1$.

(c) En el caso $a = 1$, ¿se cumple el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$? Razone su respuesta.

Problema 7.18

Si $f(x) = 1 + kx^2 + o(x^2)$ para x en un entorno del 0, calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)^{1/x^2}$.

Problema 7.19

Demuestre que $\lim\limits_{n \to \infty} n \left[1 - \log \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n \right] = \dfrac{1}{2}$.

Problema 7.20

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{a^x + 4b^x + 9c^x}{14} \right]^{1/x}$, $\quad a, b, c > 0$

Problema 7.21

1. Una empresa de tomate en salsa quiere fabricar latas cilíndricas de 1 kg. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de las latas para que su construcción requiera el mínimo gasto de material? (supóngase que la densidad del tomate en salsa es 1 kg/l).

2. Una caja rectangular de base cuadrada y cuya altura es el doble de su base abierta tiene un volumen de 32 m^3. Halla sus dimensiones para que su superficie sea mínima.

3. Un delantero avanza por la banda (pegado al borde del campo) seguido muy de cerca por un defensa. En un momento dado debe disparar directamente a puerta porque no encuentra a nadie dispuesto al remate. Calcula el punto en que deberá hacer el lanzamiento para que el ángulo que forma con la portería sea máximo, teniendo así mayores posibilidades de marcar.

Problema 7.22

(a) Calcule la $n-$ésima derivada de las funciones $F(x) = x\,f(x)$ y $G(x) = x^2\,f(x)$ suponiendo que f es una función n veces derivable.

(b) Encuentre el polinomio de Mclaurin de orden n de las funciones F y G definidas en el apartado anterior y de una fórmula para el error (resto de Lagrange).

Problema 7.23

Sean las funciones f g funciones tres veces derivables en $\mathbb{R}$. Calcule el polinomio de Taylor de orden 3 en el punto $x = 0$ de las siguientes funciones:

$$F(x) = x^2 f(g(x)), \quad G(x) = xg(x^2)f(x^2).$$

Suponiendo que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $g(0) \neq 0$, ¿tienen las funciones F y G algún extremo en $x = 0$? ¿ Y puntos de inflexión? Razone su respuesta.

Problema 7.24

1. Encuentre el polinomio de Taylor de grado 2 en cero para la función $\cosh x$ y calcule, utilizando el resultado anterior, el valor aproximado de $\cosh(1/2)$ estimando el orden del error cometido.
2. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cosh 2x}{x - \operatorname{sen} x}$.
3. Demuestre la siguiente desigualdad para el coseno hiperbólico:

$$\cosh x > 1 + \frac{x^2}{2}, \quad , \quad \forall x > 0.$$

Ayuda: Utilice la fórmula de Taylor con el resto de Lagrange

Problema 7.25

Sea la función $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \operatorname{sen} 2x$.

(a) Decida si es continua y derivable en su dominio y si se cumplen los teoremas de Rolle y el valor medio de Lagrange en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Justifique su respuesta.

(b) Encuentre sus máximos y mínimos absolutos y puntos de inflexión si los tiene.

(c) Demuestre que $f(x)$ tiene una única raíz real.

(d) Haga un esbozo de la gráfica de la función.

(e) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 de la función y estime el error que se comete al utilizar dicho polinomio para calcular el valor de $f(1/2)$.

Problema 7.26

Sea la función

$$f(x) = e^{\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{x}} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ y } f(0) = 0.$$

1. El dominio de la función es ____________________

2. Escribir el valor de los siguientes límites

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) =$ _____ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) =$ _____ $\quad \displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) =$ _____ $\quad \displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) =$ _____

3. La función f es continua en ____________________ y no es continua en ____________________
   La función f es derivable en ____________________ y no es derivable en ____________________
   Escribe la expresión de la derivada, donde exista.

$$f'(x) =$$

4. Los intervalos de crecimiento de $f(x)$ son ____________________ y los de decrecimiento ____________________
5. Estudiar razonadamente los extremos absolutos de f en $[0, +\infty)$.
6. Extremos relativos de f en $\mathbb{R}$. Marca con una X la respuesta correcta y complétala cuando proceda.

Máximos relativos:	☐	No tiene
	☐	Si tiene. Se alcanzan en _____. La derivada en esos puntos vale _____.
Mínimos relativos:	☐	No tiene
	☐	Si tiene. Se alcanzan en _____ y la derivada en esos puntos vale _____.

7. Calcula razonadamente el número de raíces de la ecuación $f(x) = \log x$
8. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $f(x) = 1$? número de raíces: __________

Problema 7.27

Sea la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente: $a_1 = a > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 4}{4\,a_n}$, $n \geq 1$.
1. Decide si la sucesión anterior es monótona.
2. Demuestra razonadamente que la sucesión $(a_n)_n$ tiene límite y calcúlalo. ¿Depende éste del valor inicial a?

Problema 7.28

Calcula, razonadamente, el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \operatorname{sen}(\alpha x^2)) - \operatorname{sen}(\beta x^2)}{e^{\tan^2 x} - 1}$, $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Problema 7.29

Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{3} \exp\left(\frac{\sqrt{4 + x^3}}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \text{ y } f(0) = 0.$$

1. El dominio de la función es ______________________________

2. Escribir el valor de los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

3. La función f es continua en ____________________ y no es continua en ____________________
   La función f es derivable en ____________________ y no es derivable en ____________________
   Escribe la expresión de la derivada, donde exista.

$$f'(x) =$$

4. Los intervalos de crecimiento de $f(x)$ son ____________________ y los de decrecimiento ____________________

5. Estudiar razonadamente los extremos absolutos de f en $[0,+\infty)$.
6. Extremos relativos de f en $\mathbb{R}$. Marca con una X la respuesta correcta y complétala cuando proceda.

Máximos relativos:	☐	No tiene
	☐	Si tiene. Se alcanzan en ____. La derivada en esos puntos vale ____.
Mínimos relativos:	☐	No tiene
	☐	Si tiene. Se alcanzan en ____ y la derivada en esos puntos vale ____.

7. Calcula razonadamente el número de raíces de la ecuación $f(x) = \operatorname{sen} x$
8. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $f(x) = 10$? número de raíces: ________

Problema 7.30

Sea la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{a_n^2 - 1}}{a_n}$, $n \geq 1$.
1. Prueba que la sucesión anterior es monótona decreciente.
2. Demuestra que la sucesión $(a_n)_n$ tiene límite y calcúlalo.

Problema 7.31

Calcula, razonadamente, el límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos px)^q - (\cos qx)^p}{\operatorname{sen}^2(pqx)}$, $\quad p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 0$.

Problema 7.32

1. Encuentra el polinomio de Taylor de orden 4 en torno a $x = 0$ de la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x^2/3)$.
2. Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin x^4 - \cos\left(\frac{x^2}{3}\right)}{x\ \tan\left(2\,x^3\right)}$$

Problema 7.33

Se considera la sucesión definida recurrentemente $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n}$, $n \geq 0$.
1. Demuestra que $(x_n)_n$ está acotada.
2. Demuestra que la sucesión $(x_n)_n$ es creciente.
3. Probar que $(x_n)_n$ tiene límite. Calcularlo razonadamente.

Problema 7.34

Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} \exp(2/x), & x < 0 \\ \\ \dfrac{3x}{x^2 + 3\,x + 2}, & x \geq 0 \end{cases}$.

(a) Escribe el mayor subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ donde esté definida f.

(b) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en dicho conjunto A y calcula su derivada, donde exista.

(b) Encuentra sus asíntotas, regiones de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos si los tiene y haga un esbozo de su gráfica.

(c) ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos (globales) en el intervalo abierto $(0,3)$? Justifica tu respuesta. ¿Y en $[-1,3]$? En caso de que los alcance ¿en qué puntos?

Problema 7.35

Se considera la sucesión definida recurrentemente $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{1+2x_n}{1+x_n}$, $n \geq 0$.

1. Demuestra que $(x_n)_n$ está acotada inferior y superiormente.
2. Demuestra que la sucesión $(x_n)_n$ es creciente.
3. Probar que $(x_n)_n$ tiene límite. Calcularlo razonadamente.

Problema 7.36

Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}x^2}\right), & x < 0 \\[2ex] \dfrac{x^2+1}{x+2}, & x \geq 0 \end{cases}$.

(a) Escribe el mayor subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ donde esté definida f.

(b) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en dicho conjunto A y calcula su derivada, donde exista.

(c) Encuentra sus asíntotas, regiones de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos si los tiene y haga un esbozo de su gráfica y razona si tiene algún punto de inflexión.

(d) ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos (globales) en el intervalo abierto $(-1,1)$? Justifica tu respuesta. ¿Y en $[-1,1]$? En caso de que los alcance ¿en qué puntos?

Bibliografía

Bibliografía básica

1. R. COURANT y F. JOHN, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, tomos I y II (Limusa, 1976 y 1978).

2. L.D. KUDRIÁTSEV, *Curso de Análisis Matemático*, tomos I y II (Mir, 1984).

3. V A. ZORICH, *Mathematical Analysis*, tomos I y II, (Springer, 2004)

Colecciones de problemas

1. I. I. LIASHKÓ, A. K. BOIARCHUK, Iá. G. GAI y G. P. GOLOVACH, Matemática Superiores. Problemas Resuetos (Anti-Demidovich) Vol I (Cálculo diferencial para funciones de una variable) (URSS, 1999).

2. V.F. BUTUZOV y otros, *Análisis matemático en preguntas y problemas* (Mir, 1984)

Bibliografía complementaria

1. T.M. APOSTOL, *Análisis Matemático* (Reverté, 1989).

2. T.M. APOSTOL, *Calculus*, tomos I y II (Reverté, 1989).

3. R.G. BARTLE, *Introducción al Análisis Matemático* (Limusa, 1990).

4. R. BARTLE y D. SHERBERT, *Introducción al Análisis Matemático de una variable* (Limusa, 1984).

5. R. BOAS, *A primer of real functions* (M.M.A., 1981).

6. J. BURGOS, *Cálculo Infinitesimal de una variable* (MaGraw-Hill, 1995).

7. A. DURÁN, *Historia, con personajes, de los conceptos del Cálculo.* (Alianza, 1996)

8. E. HAIRER y G. WANNER, *Analysis by its History* (Springer Verlag, 1996)

9. V. ILIN y E. POZNIAK, *Fundamentos del Análisis Matemático*, 3 tomos (Mir, 1991).

10. S. LANG, *Cálulo* (Addison-Wesley, 1990)

11. S. LANG, *Introducción al Análisis Matemático* (Addison-Wesley, 1990)

12. G. POLYA y G. SZEGÖ, *Problems and theorems in Analysis*, tomos I y II (Springer-Verlag, 1976)

13. W. RUDIN *Principios de Análisis Matemático* (McGraw-Hill, 1987).

14. M. SPIVAK *Calculus* (Reverté, 1987).

Otras colecciones de problemas

1. B. DEMIDOVICH, *5000 problemas de Análisis Matemático* (Paraninfo, 1980).

2. L. D. KUDRIÁTSEV, A. D. KUTÁSOV, V. I. CHEJLOV y M. I. SHABUNIN, Problemas de Análisis Matemático Vol I and II. (Mir-Rubiños, 1992).

Infinitésimos equivalentes

Definición. Dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se denominan equivalentes si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, y se escribe $a_n \sim b_n$.

Por ejemplo, la sucesión $n!$ es equivalente a la sucesión $\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$.

Definición. Una sucesión $\{a_n\}$ se denomina infinitesimal si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se denominan infinitésimos equivalentes y se escribe $a_n \sim b_n$ si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

Teorema. Si $\{a_n\}$ es una sucesión infinitesimal, entonces:

1. $\operatorname{sen} a_n \sim a_n$.
2. $\tan a_n \sim a_n$.
3. $\operatorname{arc\,sen} a_n \sim a_n$.
4. $\arctan a_n \sim a_n$.
5. $1 - \cos a_n \sim \dfrac{a_n^2}{2}$.
6. $(1 + a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, a_n$.
7. $e^{a_n} - 1 \sim a_n, \qquad b^{a_n} - 1 \sim a_n \ln b$.
8. $\ln(1 + a_n) \sim a_n, \qquad \log_b(1 + a_n) \sim a_n \log_b e$.

Definición. Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan equivalentes en $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando x tiende a a.

Definición. Una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ se denomina infinitesimal en $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es infinitesimal en $x = 0$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x - 2)$ es infinitesimal en $x = 2$.

Definición. Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan infinitésimos equivalentes en $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando x tiende a a.

Definición (o pequeña). Dados dos funciones f y g infinitesimales en cierto $x = a$, diremos que $g(x)$ es un infinitésimo de orden mayor que $f(x)$ en $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ y se escribe $g(x) = o(f(x))$ cuando x tiende a a.

Por ejemplo, la función x^2 es un infinitésimo de mayor orden que x en $x = 0$, es decir $x^2 = o(x)$, y la función x^3 es un infinitésimo de mayor orden que $x^{3/2}$ en $x = 0$, o sea, $x^3 = o(x^{3/2})$. Además se tiene que:

1. Para todo $m \in \mathbb{R}$, $m \cdot o(x) = o(x)$,
2. La suma de un número finito infinitésimos equivalentes es un infinitésimo,

3. El producto de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo de orden superior.

Teorema. Si x tiende a 0, entonces:

1. $\operatorname{sen} x \sim x$.
2. $\tan x \sim x$.
3. $\operatorname{arc\,sen} x \sim x$.
4. $\arctan x \sim x$.
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.
6. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha\, x$.
7. $e^x - 1 \sim x, \qquad b^x - 1 \sim x \ln b$.
8. $\ln(1+x) \sim x, \qquad \log_b(1+x) \sim x \log_b e$.

Utilizando esta notación los infinitésimos del teorema anterior se podrán reescribir de la forma:

1. $\operatorname{sen} x = x + o(x)$.
2. $\tan x = x + o(x)$.
3. $\operatorname{arc\,sen} x = x + o(x)$.
4. $\arctan x = x + o(x)$.
5. $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
6. $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha\, x + o(x)$.
7. $b^x - 1 = x \ln b + o(x)$.
8. $\log_b(1+x) = x \log_b e + o(x)$.

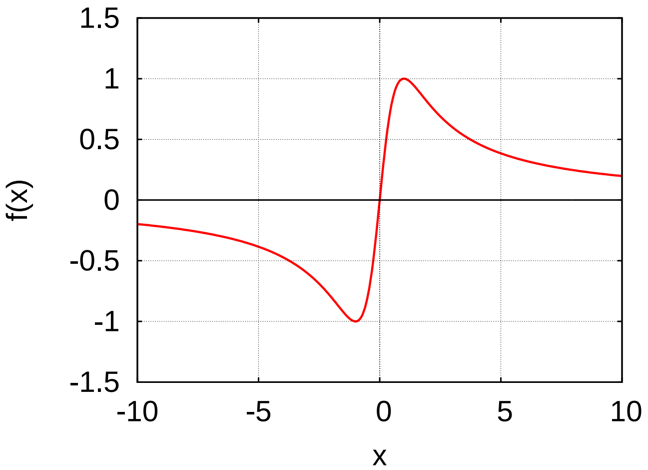
Definición (O grande). Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan comparable o del mismo orden en $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, donde $l \neq 0$, $|l| < \infty$ y se escribe $f(x) = O(g(x))$ o $g(x) = O(f(x))$ cuando x tiende a a.

Esquema para la representación de una función $f(x)$.

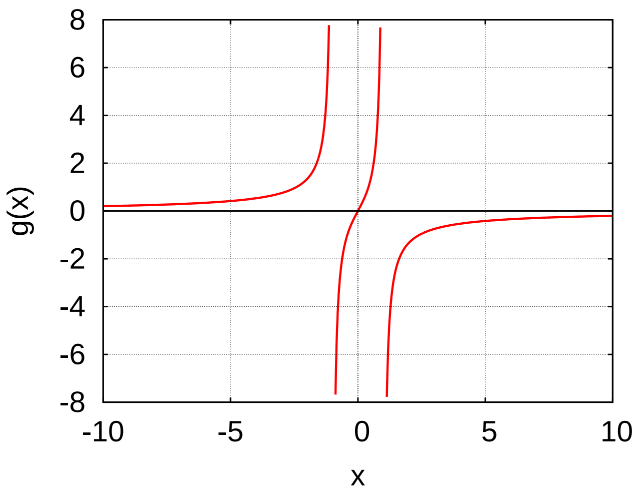
1. Determinar el dominio de la función $f(x)$.
2. Determinar si la función tiene simetría par o impar, o si es periódica.
3. Determinar los puntos de discontinuidad de la función (evitables y no evitables) así como las asíntotas verticales, horizontales y oblícuas de la función.
4. Encontrar los puntos de corte con los ejes, o sea, los ceros de la función $f(x) = 0$, y el punto $f(0)$.
5. Encontrar los extremos de la función y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Encontrar los puntos de inflexión de la función y los intervalos de concavidad y convexidad.

Dos ejemplos representativos:

1. Estudiar la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.



2. Estudiar la función $g(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.



Breve resumen sobre el cálculo de derivadas y el Teorema de Taylor.

1. Propiedades algebraicas: Sean f, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en A. Entonces

$$[f(x)+g(x)]' = f('x)+g'(x), \quad [f(x)\cdot g(x)]' = g(x)f'(x)+f(x)g'(x),$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \text{ si } g(x)\neq 0.$$

2. Regla de la cadena: Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ dos una función tales que la función compuesta de g en f, $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ exista. Supongamos que f es derivable en $x = a$ y que g es derivable en $x = f(a)$. Entonces la función compuesta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es derivable en $x = a$ y además

$$(g\circ f)'(a) = g(f(a))' = g'[f(a)]f'(a) \equiv \left.\frac{d\,g(y)}{d\,y}\right|_{y=f(a)} \cdot \left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x=a}.$$

3. Tabla de derivadas: Las funciones elementales son derivables en su "dominio". Además:

1. $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}$
2. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \quad x\in\mathbb{R}$
3. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x, \quad x\in\mathbb{R}$
4. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right\}, \quad n\in\mathbb{Z}$
5. $(\operatorname{arc\,sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,1)$
6. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,1)$
7. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x\in\mathbb{R}$
8. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x\in\mathbb{R}$
9. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad \forall a>0, a\neq 1, \quad x\in\mathbb{R}$
10. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad x>0,\ a>0$
11. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x\in\mathbb{R}$
12. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x\in\mathbb{R}$
13. $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x\in\mathbb{R}$
14. $(\operatorname{cth})' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Ejemplos: Calcular la derivada de la función $f(x) = \tan(x^2 + 3x + e^x)$ en $x = a$.

$$\frac{d}{d\,x}\tan(x^2 + 3x + e^x) = \left.\frac{d\,\tan(y)}{d\,y}\right|_{y=x^2+3x+e^x} \cdot \left.\frac{d\,x^2 + 3x + e^x}{d\,x}\right|_{x=a} = \frac{2x + 3 + e^x}{\cos^2(x^2 + 3x + e^x)}.$$

Calcular la derivada de la función $h(x) = f(x)^{g(x)}$. Para encontrarla calcularemos la derivada de $\log h(x) = g(x)\log f(x)$,

$$(\log h(x))' = \frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)},$$

luego

$$(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

4. Polinomio de Taylor y término de error. Si $f(x)$ es una función $(n)-$veces derivable en $[a, x]$ y con $n-$ésima derivada continua en $[a, x]$ y derivable en (a, x) entonces

$$f(x) = P_n(x, a) + R_n(x, a) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x, a),$$

y existe un $c \in (a, x)$ tal que

1. Fórmula del *resto de Taylor en forma de Cauchy.*

$$R_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a), \qquad c \in (a, x).$$

2. Fórmula del *resto de Taylor en forma de Lagrange.*

$$R_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad c \in (a, x).$$

5. Polinomios de McLaurin de las funciones elementales.

1. $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}).$

2. $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}).$

3. $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k + o(x^n), \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$

4. $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + o(x^n).$

5. $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).$

Teoremas que hay que saber demostrar

Teorema 1 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) *Cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}(a < b)$, existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.*

Teorema 2 (Unicidad del límite de una sucesión.) *Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente entonces tiene un único límite.*

Teorema 3 (Condición necesaria para la existencia de límite de una sucesión) *Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente entonces es acotada.*

Teorema 4 (de las tres sucesiones) *Sean las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tales que $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n \geq N \in \mathbb{N}$. Además $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$. Entonces, $\{c_n\}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$.*

Teorema 5 (Propiedades algebraicas de los límites) *Sean dos sucesiones convergentes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Entonces:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$. *En particular,* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, a$,
3. *Si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$, *y* $b \neq 0$, *entonces,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Teorema 6 (Criterio de Weierstrass para las sucesiones monótonas) *Para que una sucesión monótona $\{a_n\}$ sea convergente es necesario y suficiente que este acotada. Además, el límite es el supremo o el infímo del conjunto $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de los valores de a_n, o sea,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \inf(A) & \textit{si } a_n \textit{ es decreciente} \\ \sup(A) & \textit{si } a_n \textit{ es creciente} \end{cases} .$$

Teorema 7 (de Bolzano-Weierstrass para las sucesiones) *De toda sucesión acotada se puede extraer una subsucesión convergente.*

Teorema 8 (de la equivalencia de las definiciones de límite) *Las definiciones de Heine*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \{x_n\},\ x_n \neq a \ y\ \lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l,$$

y Weierstrass

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

son equivalentes.

Teorema 9 (del signo de las funciones continuas) *Sea $f : A \mapsto \mathbb{R}$ continua en $x = a$ y $m \in \mathbb{R}$ t.q. $f(a) > m$. Entonces $\exists \delta > 0$ t.q. si $|x - a| < \delta$, $f(x) > m$. En particular si $m > 0$ ($m < 0$) entonces existe un entorno de $x = a$ en el que la función es mayor (menor) que 0.*

Teorema 10 (Weierstrass) *Si la función $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ entonces f está acotada en $[a, b]$ y además f alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$.*

Teorema 11 (Bolzano) *Sea la función $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y sea que los valores en los extremos $f(a)$, $f(b)$ son de signos distintos. Entonces existe un punto c en el interior del intervalo $[a, b]$, o sea, $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Teorema 12 (Lema de Fermat) *Si una función tiene un extremo local en $x = a$ y $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces, $f'(a) = 0$.*

Teorema 13 (Teorema de Rolle) *Sea $f(x) : [a, b] \Longrightarrow \mathbb{R}$, continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, derivable en su interior (a, b) y sea que $f(a) = f(b)$. Entonces, $\exists c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 14 (Teorema del valor medio de Lagrange) *Sea la función $f(x) : [a, b] \Longrightarrow \mathbb{R}$, continua en todo el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe un c en el interior de del intervalo $[a, b]$, $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 15 (Teorema del valor medio de Cauchy) *Sean dos funciones $f(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ y $g(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, continuas en todo el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe un c en el interior de del intervalo $[a, b]$, $c \in (a, b)$, tal que $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.*

Teorema 16 (Regla de L'Hospital para la indeterminación $\frac{0}{0}$) *Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas y son derivables en un entorno del punto $x = a$ (excepto quizás en $x = a$) tales que*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
2. *$g'(x) \neq 0$ en un entorno de $x = a$ (excepto quizás en $x = a$)*
3. *Existe el límite* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces existe el límite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es igual a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Teorema 17 (Reglas de derivación) *Sean $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones derivables en A. Entonces las funciones $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ son derivables y*

$$\frac{d}{d\,x}\left[f(x) + g(x)\right] = \frac{d\,f(x)}{d\,x} + \frac{d\,g(x)}{d\,x},$$

$$\frac{d}{d\,x}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = g(x)\frac{d\,f(x)}{d\,x} + f(x)\frac{d\,g(x)}{d\,x},$$

$$\frac{d}{d\,x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d\,f(x)}{d\,x} - f(x)\dfrac{d\,g(x)}{d\,x}}{[g(x)]^2}, \text{ si } g(x) \neq 0.$$

Teorema 18 (Teorema local de Taylor) *Si $f(x)$ es $n-$veces derivable en un entorno de $x = a$ y $P_n(x,a)$ es el polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x)$, entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x,a)}{(x-a)^n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) - P_n(x,a) = o[(x-a)^n].$$

Teorema 19 (Estimación del error del Teorema de Taylor) *Supongamos que $f(x)$ es $n-$veces derivable en $[a,x]$ y que su $n-$ésima derivada es continua en $[a,x]$ y derivable en (a,x) y sea*

$$P_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

el polinomio de Taylor de la función $f(x)$. Sea $\phi(x)$ una función continua en $[a,x]$ y derivable en (a,x) con $\phi'(x) \neq 0$ en (a,x). Entonces existe un $c \in (a,x)$ tal que

$$R_n(x,a) = \frac{\phi(x) - \phi(a)}{\phi'(c)n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n, \quad c \in (a,x).$$

Teorema 20 (Criterio de la $(n+1)-$ésima derivada) *Supongamos que la función $f(x)$ es $(n+1)-$veces derivable en el intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$ y que*

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0, \quad f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Entonces si n es ***impar*** *la función $f(x)$ tiene un extremo local en a y es máximo si $f^{(n+1)}(a) < 0$ y* ***mínimo*** *si $f^{(n+1)}(a) > 0$.*