Conjuntos numéricos

Cálculo Infinitesimal
Grado en Matemáticas

Renato Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

http://euler.us.es/~renato/clases.html

Los conjuntos de números que vamos a utilizar en este curso son los siguientes:

1. Los números naturales que denotaremos por $\mathbb{N}$ que es el conjunto de los números
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Los conjuntos de números que vamos a utilizar en este curso son los siguientes:

1. Los números naturales que denotaremos por $\mathbb{N}$ que es el conjunto de los números

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

2. Los números enteros que denotaremos por $\mathbb{Z}$ que es el conjunto de los números

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}.$$

Los conjuntos de números que vamos a utilizar en este curso son los siguientes:

1. Los números naturales que denotaremos por $\mathbb{N}$ que es el conjunto de los números
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$
2. Los números enteros que denotaremos por $\mathbb{Z}$ que es el conjunto de los números
$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}.$$
3. Los números racionales que denotaremos por $\mathbb{Q}$ que es el conjunto de los números
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, \text{ donde } p \in \mathbb{Z}, \; q \in \mathbb{N} \right\}.$$

¡Existen némeros que no son racionales!

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

¡Existen némeros que no son racionales!

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

Teorema fundamental de la aritmética: *Cualquier número natural (y por tanto entero) se pueden escribir como el producto de sus factores primos.*

¡Existen némeros que no son racionales!

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

Teorema fundamental de la aritmética: *Cualquier número natural (y por tanto entero) se pueden escribir como el producto de sus factores primos.*

Proposición: Si $n \in \mathbb{N}$ y n no es un cuadrado perfecto $(n \neq k^2,\ k \in \mathbb{N})$ entonces $\sqrt{n} \in \mathbb{I}$.

¡Existen némeros que no son racionales!

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

Teorema fundamental de la aritmética: *Cualquier número natural (y por tanto entero) se pueden escribir como el producto de sus factores primos.*

Proposición: Si $n \in \mathbb{N}$ y n no es un cuadrado perfecto ($n \neq k^2, \; k \in \mathbb{N}$) entonces $\sqrt{n} \in \mathbb{I}$.

Definición: Definiremos al conjunto de los números reales, y lo denotaremos por $\mathbb{R}$, al conjunto de todos los números racionales $\mathbb{Q}$ e irracionales $\mathbb{I}$, o sea $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Un conjunto de elementos es un **cuerpo** si $\forall a, b \in A$ a"$+$" b y a"$\cdot$" b son elementos de A y "$+$" y "$\cdot$" son tales que:

1. Propiedades de la suma:
    1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ (ley asociativa)
    2. $\exists 0 \in A$ tq $\forall a \in A$, $a+0 = 0+a = a$
    3. $\forall a \in A$, $\exists(-a) \in A$ tq $(-a)+a = a+(-a) = 0$
    4. $a+b = b+a$ (ley conmutativa)
2. Propiedades de la multiplicación:
    1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ley asociativa)
    2. $\exists 1 \in A$ tq $\forall a \in A$, $\exists a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
    3. $\forall a \in A$, $a \neq 0$, $(a^{-1}) \in A$ tq $(a^{-1}) \cdot a = a \cdot (a^{-1}) = 1$ (elemento inverso de la multiplicación)
    4. $a \cdot b = b \cdot a$ (ley conmutativa)
3. Propiedades de la suma y multiplicación:
    1. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (ley distributiva)

Un conjunto de elementos A es un conjunto **ordenado** si existe una relación de orden $\leq$ tal que cualesquiera sean a y b elementos de A se cumple que $a \leq b$ o no se cumple y además tienen lugar los siguientes axiomas:

1. Para todo $a \in A$, $a \leq a$
2. Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.
3. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.
4. Para todos $a, b \in A$, o $a \leq b$ o $b \leq a$.

Si además, A es un cuerpo, entonces para cualesquiera sean a, b y c de A se tiene que

5. Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.
6. Si $0 \leq a$ y $0 \leq b$ entonces $0 \leq a \cdot b$.

Ejercicio: Probar que para todo $x \in A$, $0 \cdot x = 0$, $(-1) \cdot x = (-x)$.

Ejercicio: Probar que el elemento nulo 0 es único y que el elemento inverso de la suma es único.

Ejercicio: Probar que para todo $x \in A$, $0 \cdot x = 0$, $(-1) \cdot x = (-x)$.

Ejercicio: Probar que el elemento nulo 0 es único y que el elemento inverso de la suma es único.

¿Qué hace especial a $\mathbb{R}$ frente a $\mathbb{Q}$? La **completitud**

Ejercicio: Probar que para todo $x \in A$, $0 \cdot x = 0$, $(-1) \cdot x = (-x)$.

Ejercicio: Probar que el elemento nulo 0 es único y que el elemento inverso de la suma es único.

¿Qué hace especial a $\mathbb{R}$ frente a $\mathbb{Q}$? La **completitud**
La *completitud* o *continuidad* de $\mathbb{R}$ viene a decir que $\mathbb{R}$ no tiene agujeros. ¿Pero cómo escribimos eso de forma que sea útil?

Ejercicio: Probar que para todo $x \in A$, $0 \cdot x = 0$, $(-1) \cdot x = (-x)$.

Ejercicio: Probar que el elemento nulo 0 es único y que el elemento inverso de la suma es único.

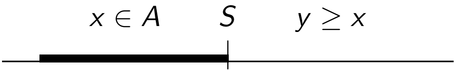
¿Qué hace especial a $\mathbb{R}$ frente a $\mathbb{Q}$? La **completitud**
La *completitud* o *continuidad* de $\mathbb{R}$ viene a decir que $\mathbb{R}$ no tiene agujeros. ¿Pero cómo escribimos eso de forma que sea útil?

Hay muchas maneras. Por el momento usaremos una muy sencilla: El *axioma del supremo*.

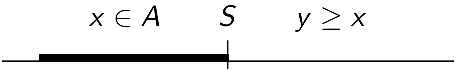
Definición: Llamaremos supremo de un conjunto acotado superiormente, y lo denotaremos por $\sup A$, a la menor de las cotas superiores de A. Llamaremos ínfimo de un conjunto acotado inferiormente, y lo denotaremos por $\inf A$, a la mayor de las cotas inferiores de A.

Ejemplos:

1. (Axioma del supremo) Todo conjunto acotado superiormente tiene un único supremo, es decir, existe un número $S = \sup A$ tal que para todo $x \in A$, $x \leq S$ y además si para todo $x \in A$, $x \leq y$ entonces $S \leq y$. Gráficamente:

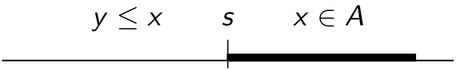


1. (Axioma del supremo) Todo conjunto acotado superiormente tiene un único supremo, es decir, existe un número $S = \sup A$ tal que para todo $x \in A$, $x \leq S$ y además si para todo $x \in A$, $x \leq y$ entonces $S \leq y$. Gráficamente:



o equivalentemente

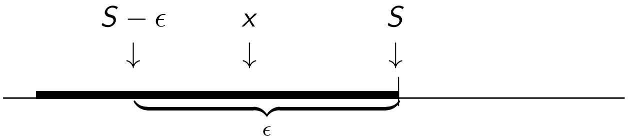
2. (Axioma del ínfimo) Todo conjunto acotado inferiormente tiene un único ínfimo, es decir, existe un número $s = \inf A$ tal que para todo $x \in A$, $x \geq s$ y además si para todo $x \in A$, $x \geq y$ entonces $s \geq y$. Gráficamente:



Conjuntos numéricos

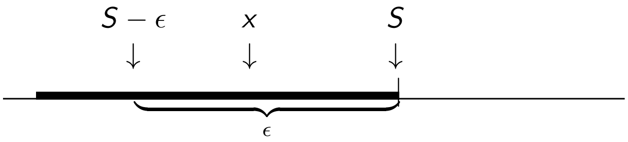
Proposición: Sea A un conjunto acotado superiormente. Para todo $\varepsilon > 0$ (tan pequeño como se quiera) existe un $x \in A$ tal que $x > \sup A - \varepsilon$.

Gráficamente:



Proposición: Sea A un conjunto acotado superiormente. Para todo $\varepsilon > 0$ (tan pequeño como se quiera) existe un $x \in A$ tal que $x > \sup A - \varepsilon$.

Gráficamente:



Ejercicio: Sea A un conjunto acotado inferiormente. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ (tan pequeño como se quiera) existe un $x \in A$ tal que $x < \text{ínf } A + \varepsilon$.

Ejercicio: Calcular el supremo e ínfimo del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}$ si existen.

Ejercicio: Calcular el supremo e ínfimo del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}$ si existen.

Ejercicio: Por ejemplo, sea A el conjunto de todos los números reales de la forma

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}, \text{ tales que } x = \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Encontrar el supremo e ínfimo de A, si existen.

Ejercicio: Calcular el supremo e ínfimo del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}$ si existen.

Ejercicio: Por ejemplo, sea A el conjunto de todos los números reales de la forma

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}, \text{ tales que } x = \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Encontrar el supremo e ínfimo de A, si existen.

Ejercicio: Prueba que todo subconjunto acotado superiormente de $\mathbb{N}$ tiene un elemento máximo.

Como consecuencia se tiene que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente y que $\mathbb{Z}$ es no acotado inferiormente y superiormente.

Proposición: Sea $x > 0$ un número real cualquiera. Entonces siempre existe un número natural n tal que $x < n$.

Proposición: Sea $x > 0$ un número real cualquiera. Entonces siempre existe un número natural n tal que $x < n$.

Proposición: (Propiedad arquimediana de los números reales) Sea $a > 0$ un número real cualquiera (tan pequeño como se quiera). Sea $b > 0$ otro número real (tan grande como se quiera). Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < n\,a$.

Proposición: Sea $x > 0$ un número real cualquiera. Entonces siempre existe un número natural n tal que $x < n$.

Proposición: (Propiedad arquimediana de los números reales) Sea $a > 0$ un número real cualquiera (tan pequeño como se quiera). Sea $b > 0$ otro número real (tan grande como se quiera). Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < n\,a$.

Corolario 1: Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $x \geq 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \leq 1/n$, entonces $x = 0$.

Proposición: Sea $x > 0$ un número real cualquiera. Entonces siempre existe un número natural n tal que $x < n$.

Proposición: (Propiedad arquimediana de los números reales) Sea $a > 0$ un número real cualquiera (tan pequeño como se quiera). Sea $b > 0$ otro número real (tan grande como se quiera). Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < n\,a$.

Corolario 1: Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $x \geq 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \leq 1/n$, entonces $x = 0$.

Corolario 2: Sea $x \geq 0$. Si para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $x < \epsilon$, entonces $x = 0$.

Ejercicio: Probar que $\text{ínf}\{1/n | n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Ejercicio: Probar que $\inf\{1/n | n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Definición: Se denomina parte entera de un número real x cualquiera y la denotaremos por $E(x)$, al número entero p tal que

$$p \leq x < p+1, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Es evidente de la definición que $E(3/2) = 1$, $E(2)$=2, $E(-3/2) = -2$ y $E(-2) = -2$.

Ejercicio: Probar que $\inf\{1/n | n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Definición: Se denomina parte entera de un número real x cualquiera y la denotaremos por $E(x)$, al número entero p tal que

$$p \leq x < p + 1, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Es evidente de la definición que $E(3/2) = 1$, $E(2)$=2, $E(-3/2) = -2$ y $E(-2) = -2$.

Una propiedad esencial: Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$
Cualesquiera sean a, $b \in \mathbb{R}(a < b)$, existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.

El método de inducción.

El método de inducción matemática se utiliza para probar que cierta afirmación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ comenzando por cierto n_0. Para ello hay que demostrar que:

1. La afirmación es válida para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$,
2. Suponiendo que es cierta para **cualquier** $k \in \mathbb{N}$ **con** $k \geq n_0$ probar que es cierta para $k + 1$.

El método de inducción matemática se utiliza para probar que cierta afirmación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ comenzando por cierto n_0. Para ello hay que demostrar que:

1. La afirmación es válida para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$,
2. Suponiendo que es cierta para **cualquier** $k \in \mathbb{N}$ **con** $k \geq n_0$ probar que es cierta para $k+1$.

Ejemplos: Demostrar por inducción que para $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$:

$$\sum_{m=0}^{n} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

El método de inducción matemática se utiliza para probar que cierta afirmación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ comenzando por cierto n_0. Para ello hay que demostrar que:

1. La afirmación es válida para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$,
2. Suponiendo que es cierta para **cualquier** $k \in \mathbb{N}$ **con** $k \geq n_0$ probar que es cierta para $k+1$.

Ejemplos: Demostrar por inducción que para $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$:

$$\sum_{m=0}^{n} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Probar la desigualdad de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $\forall x > -1$.

El método de inducción matemática se utiliza para probar que cierta afirmación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ comenzando por cierto n_0. Para ello hay que demostrar que:

1. La afirmación es válida para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$,
2. Suponiendo que es cierta para **cualquier** $k \in \mathbb{N}$ **con** $k \geq n_0$ probar que es cierta para $k+1$.

Ejemplos: Demostrar por inducción que para $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$:

$$\sum_{m=0}^{n} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Probar la desigualdad de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1 + nx, \ \forall x > -1$.

Demostrar si es correcta la desigualdad $2^n \geq n^2$, $\forall n \geq 1$.

El valor absoluto de un número.

Sea x un número real. Definiremos al valor absoluto de x y lo denotaremos por $|x|$ al número

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Por ejemplo, $x = 2$, como $x > 0$ entonces $|2| = 2$. Si $x = -3$ como $x < 0$ entonces $|-3| = -(-3) = 3$.

Sea x un número real. Definiremos al valor absoluto de x y lo denotaremos por $|x|$ al número

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Por ejemplo, $x = 2$, como $x > 0$ entonces $|2| = 2$. Si $x = -3$ como $x < 0$ entonces $|-3| = -(-3) = 3$.

El valor absoluto cumple con las siguientes propiedades:

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ y $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
2. $-|x| \leq x \leq |x|$.
3. Si $|x| \leq y$ entonces $-y \leq x \leq y$.
4. Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.
5. Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
6. Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$