1. Demostrar aplicando la definición de límite:

$$\lim \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} = 0 \qquad \lim \frac{2n+3}{3n-50} = \frac{2}{3} \qquad \lim \frac{3n^2-12n+1}{n+25} = +\infty$$

2. **2.** Sea (a_n) una sucesión infinita tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$. Demostrar que entonces la sucesión (a_n) es convergente y además $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

3. Calcular los límites de las sucesiones cuyo término general es el indicado a continuación:

$$\sqrt{n^2+n} - n, \qquad \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}, \qquad a^n (a>0).$$

$$\frac{\cos(\tan(\log \frac{\pi}{n}))}{n+1}, \qquad \sqrt[3]{n^2+8} - \sqrt[3]{n^2-3}, \qquad \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n+2}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+4}}.$$

$$\sqrt[n]{a},\ (a>0), \qquad \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}, \qquad \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}, \qquad \frac{\log(3n^2+4n+5)}{\log(n+10)}.$$

$$\frac{\log(e^n+4)}{\log[(e^{-n}+1)(4^n+2^n)]}, \quad \frac{\log(5n^3+2)}{\log(6n^4+2n+1)}, \quad \frac{2+(-1)^n}{\log(n+2)}, \quad \frac{n^{2/3}\mathrm{sen}(n!)}{n+1}, \quad \frac{1}{n}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right).$$

4. Probar que si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales no nulos tales que $\lim x_n = 0$, entonces:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen} x_n}{x_n} = 1$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$.

   Calcular el límite de las siguientes sucesiones:

   a) $n\mathrm{sen}\,(3/n)$ b) $\frac{\tan(a^n)}{a^n}$, $|a|<1$ c) $n^2(1-\cos(1/n))$.

5. a) Probar que si $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales no nulos tal que $\lim a_n = 0$, entonces:

$$\lim \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1.$$

   b) Sean $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales verificando:

$$x_n \neq 1,\ \forall n \geq n_0;\ x_n \longrightarrow 1,\ y_n \longrightarrow \infty,\ y_n(x_n-1) \longrightarrow a.$$

   Demostrar que $(x_n)^{y_n} \longrightarrow e^a$.

6. Calcular los límites de las sucesiones de términos generales:

$$\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n, \quad \left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^n, \quad \frac{n^{2n}}{(1+n^2)^n}, \quad \left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n, \quad \left(\frac{a+n}{a+n-1}\right)^n.$$

$$(1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}, \qquad (2+3n^4)^{1/(1+2\log n)}, \qquad \left(\frac{n+1}{n^2+n+5}\right)^{1/(1+\log n)}.$$

7. Calcular a sabiendo que $\lim \left(\frac{\log(n+a)}{\log n}\right)^{n\log n} = 2.$

8. Demostrar que $\forall a \in \mathbb{R}$ existen sucesiones (x_n) e (y_n) tales que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

siendo $x_n \in \mathbb{Q}$ e $y_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

9. Sea la sucesión recurrente definida por $u_1 = 0$; $u_{n+1} = 1/(u_n+1)$.
   a) Calcular el posible límite l.
   b) Demostrar que se tiene $|u_{n+1}-l| < \frac{2}{3}|u_n - l| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
   c) Demostrar que efectivamente $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

10. Considérese la sucesión definida por recurrencia de la siguiente forma:

$$3\,a_{n+1} = 2 + a_n^3\,, \qquad a_1 = -\frac{3}{2}\,.$$

Pruébese que tal sucesión es monótona creciente y acotada superiormente por $K = 1$. Calcúlese su límite.

11. Se define la sucesión $\{x_n\}$, por recurrencia, como:

a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ b) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$

c) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2-x_n}$ d) $x_1 = a$, $x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$, con $a > 1$

Demostrar, utilizando argumentos de monotonía, que $\{x_n\}$ es convergente, y calcular su límite.

12. Sea $a > 0$ y sea $\{x_n\}$ la sucesión definida por recurrencia:

$$x_1 = a, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Probar que $x_n \geq \sqrt{2} \quad \forall n \geq 2$, independientemente del valor de a. ¿Es convergente la sucesión $\{x_n\}$? Caso de serlo, calcular su límite.

13. Se define la sucesión $a_1 = a$ y $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$ donde $a \in (1,2)$. Demostrar que es monótona convergente y calcular su límite.

14. Calcular los límites de las sucesiones:

$$\frac{\log n}{n}, \qquad \frac{n\sqrt[n]{n}-1}{\log n}, \qquad \frac{\log(n!)}{\log n}, \qquad \frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1+n+n^2+n^3}, \qquad \frac{(1!+2!+3!+\cdots+n!)}{n!}.$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k\log(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}), \qquad \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{k}), \qquad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \qquad \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{k+1}.$$

$$\text{Si } a_n \longrightarrow a \quad \frac{1}{\log n}\left(\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right), \qquad \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}, \qquad \sqrt[n]{\binom{3n}{n}\binom{2n}{n}}.$$

$$\frac{((3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n))^{1/n}}{n}, \qquad \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

15. Sea $A \subset \mathbb{N}$ cuyo complementario es finito. Demostrar que una sucesión $\{x_n\}$ converge si y sólo si converge la subsucesión asociada a A, y en ese caso tienen el mismo límite.

16. Sea (a_n) una sucesión acotada de números reales y sea $\sigma_n = \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$. Demostrar que entonces

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

17. Probar que si $a > 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$. Indicación: Si $n > 2a$ entonces

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1}\cdot\frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2}\cdot\frac{a^n}{n!}$$

18. Sea (a_n) una sucesión de números positivos. Demostrar que entonces se tiene

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

19. Sea $a_n = n^n/n!$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = e$. Usar el problema 18 para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

20. Demostrar que

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$$

y dar un ejemplo en el que no se dé la igualdad.

21. Calcular los límites de oscilación de las siguientes sucesiones indicando para cada límite una subsucesión que converja hacia él:

$$\frac{(-1)^n}{e^{-1/n}}; \qquad \frac{1}{n} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}; \qquad \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{(-1)^n + 2}; \qquad \frac{3n}{4} - [\frac{3n}{4}].$$

22. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales es contractiva de constante $\alpha \in (0, 1)$ si $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \alpha|x_{n+1} - x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que toda sucesión contractiva es una sucesión de Cauchy.

23. Dada una sucesión, demostrar que el conjunto formado por sus términos y sus límites de oscilación es cerrado.

24. Construir una sucesión que tenga 10 límites de oscilación. Y otra que tenga infinitos.