

1. Estudiar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = n^2$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = |n| + 1$$

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n \text{ si } n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2|n| + 1 \text{ si } n \notin \mathbb{N}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) = [x]$$

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(m/n) = m + n. \text{ ¿Es una función?}$$

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(m, n) = 2^m 3^n.$$

2. Sean $p(x) = 2^x$, $q(x) = x^2$ y $s(x) = \sin x$. Calcular los valores de las siguientes funciones.

a) $q \circ p$,

b) $q \circ s$,

c) $q \circ p \circ s + s \circ p$,

d) $s \circ q$.

3. Si f es una función real de variable real, se definen la parte positiva y la parte negativa de f mediante $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Demostrar que $f = f^+ - f^-$ y que además $|f| = f^+ + f^-$. Hallar una expresión para f^+ y f^- en términos de f y $|f|$.

4. Decidir por medio de pruebas y contraejemplos si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

a) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$,

b) $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

5. Dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = 3x + 2$ b) $y = -2x + 1$ c) $y = x^2$ d) $y = 1 - x^2$

e) $y = x^2 - 3x - 4$ f) $y = x^3$ g) $y = \frac{1}{x}$ h) $y = \frac{1}{x - 2}$

i) $y = \sqrt{x}$ j) $y = \sqrt[3]{x}$ k) $\log |x|$ l) $|\sen x|$.

6. Describir la gráfica de g en términos de la gráfica de f .

a) $(g(x) = f(x - c))$,

b) $g(x) = f(x) + c$,

c) $g(x) = cf(x)$,

d) $g(x) = f(cx)$.

7. Demostrar las siguientes igualdades:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

8. ¿Qué números reales cumplen $\sin x = 0$? ¿Y $\sin x = 1$? ¿Y $\sin x = \frac{1}{2}$? ¿Y $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$?

9. 5. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin x + \operatorname{cosec} x = 5/2$ b) $\sin^2 x - 2 \cos^2 x = 1$ c) $\sin x + \cos^2 x = 1$.

10. Simplificar las expresiones siguientes:

a) $\sin(2 \operatorname{arcsen} x)$ b) $\tan(\operatorname{arcsen} x)$ c) $\sin(\operatorname{arctan} x)$.

11. Sean $a, b, x > 0$, $a \neq 1, b \neq 1$. Demostrar:

a) $\log_b x = (\log_b a)(\log_a x)$ b) $\log_b a = 1/\log_a b$ c) $1 + \log_a b = \frac{\log_a x}{\log_{ab} x}$, si $ab \neq 1, x \neq 1$.

12. Demostrar las siguientes propiedades de las funciones hiperbólicas.

a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,
b) $1 - \operatorname{tgh}^2 x = 1/\cosh^2 x$,
c) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,
d) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.