1. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en los puntos $(a, f(a))$ indicados. Dibujar la curva y las rectas.

   $f(x) = 2x + 1, \qquad (1, 3),\ (-1, -1)$

   $f(x) = \sqrt{1 + x}, \qquad (1, \sqrt{2}),\ (0, 1)$

   $f(x) = \operatorname{sen}\ x, \qquad (0, 0),\ (\pi/2, 1)$

   $f(x) = x^2 + x + 2, \qquad (-1/2, 7/4),\ (0, 2)$

   $f(x) = \log x, \qquad (1, 0),\ (e, 1).$

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones, explicando en qué puntos y por qué son derivables:

$$y = \frac{2x^3 + 3}{x^3 - 1}; \quad y = \frac{2x\operatorname{sen}^2 x + \tan x}{x^2 + 1}; \quad y = 2^x \log(\arctan(x^2 + 1)); \quad y = (2 + \operatorname{sen}\ x)^{\cos x}.$$

3. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones, calculando las derivadas cuando existan ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$):

   a) $f(x) = \begin{cases} x^n \arctan \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ b) $f(x) = x^x$ c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & \text{si } x < 0, \\ \sqrt{x^2 + x^3} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

4. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones, calculando las derivadas cuando existan ($a, b \in \mathbb{R}$):

   a) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$
   b) $f(x) = \log |x|$
   c) $f(x) = x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$
   d) $f(x) = |x|^p$, si $x \neq 0$; y $f(0 = A$.

5. Estúdiese la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}^a \dfrac{1}{x^b} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

   para los distintos valores $a, b > 0$.

6. ¿Es derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} (x - 2)e^{\frac{1}{2-x}} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

   en $x = 2$?

7.

   a) Utilizando el Teorema del valor medio calcule

$$\lim_{x\to\infty}\left[(1+x)^{1+\frac{1}{1+x}}-x^{1+\frac{1}{x}}\right].$$

   b) Sea f una función derivable. Calcula

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+bh)-f(x-ah)}{(a+b)h}$$

   con $a,b>0$.

8. Utilizando el Teorema del valor medio demuestre que:

   a) $\operatorname{sen} x+\tan x>2x, \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$,

   b) $\operatorname{ch} x>1+\frac{x^2}{2}, \quad x\neq 0$,

   c) La ecuación $e^x=1+x$ no tiene ninguna solución real excepto la trivial $x=0$.

   d) Para $|x|<<a$ ($|x-a|\to 0$), $e^{\frac{x}{2}}\approx\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ con una precisión hasta orden $\left(\frac{x}{2}\right)^2$.

9. Sea $f(x)=x^n\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, si $x\neq 0$, $f(0)=0$. Determinar los $n\in\mathbb{Z}$, que hacen que:

   a) f sea continua en el cero.

   b) f sea derivable en el cero.

   c) f sea derivable y f' sea continua en el cero.

10. Estudiar si f verifica las hipótesis del teorema de Lagrange en $[a,b]$; y comprobar si se verifica la tesis en los casos:

a) $f(x)=x(x-1)$	$a=0,b=2$	b) $f(x)=2x+\operatorname{sen}x$	$a=0,b=\pi$
c) $f(x)=(\lvert x\rvert-1)^2$	$a=-1,b=1$	d) $f(x)=\sqrt[3]{(2-x)^2}$	$a=0,b=2$

11. Demostrar las siguientes desigualdades:

a) Si $x>0$	$e^x>1+\log(1+x)$	b) Si $x\neq 1,\ x>0$	$\log x<x-1$
c) Si $x>0$	$\arctan(\frac{1}{x})>\frac{x}{1+x^2}$	d) Si $x\neq 0$	$e^x>1+x$

12. Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen una única raíz real:

   a) $\arctan x=\log(\sqrt{x})$ b) $2^{-x}=x$ c) $\operatorname{sen}x=x$ d) $\cos x-x=0$

13. Determinar los extremos absolutos de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=\operatorname{sen}|x|\,,\quad x\in[-\pi,\pi]$ b) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}\,,\quad x\in[-1,3]$

14. Hallar los puntos de máximo y mínimo, así como los intervalos de convexidad de la función f si la gráfica de su derivada f' está representada en la figura 1.

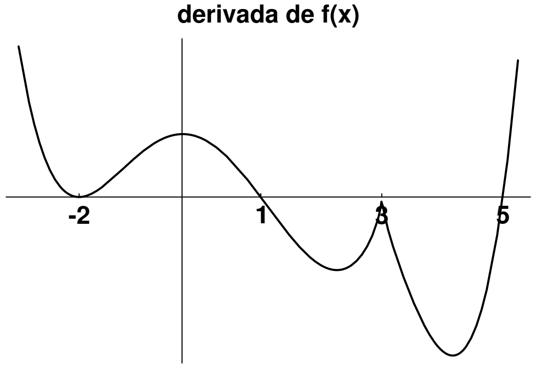

Figura 1: Gráfica de la derivada de la función $f(x)$.

15. a) Estudiar los extremos absolutos de la función $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$.

    b) Demostrar que $x^e \leq e^x$ para todo $x > 0$.

16. Calcular, si existen, los siguientes límites ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a, b > 0$):

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \log x$	b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$	c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha \log x$
d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha - \beta \log x$	e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha e^{-x}$	f) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x - \log x$
g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log(1-\cos x)}$	h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$	i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$
j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} x\tan x - \dfrac{\pi}{2}\sec x$	k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$	l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	n) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$	p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

17. Calcular las derivadas n-ésimas de las siguientes funciones:

a) e^{ax}	b) $(x+a)^{-1}$	c) $\log(1+x)$	d) $(1+x)^a$
e) $\cos ax$	f) $\operatorname{sen} ax$	g) $\log(x^2 - 3x + 2)$	h) $\operatorname{sen}^2 ax$

18. Se definen el seno y el coseno hiperbólicos mediante las fórmulas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

    a) Calcular las derivadas sucesivas de estas funciones.

    b) ¿Qué relación hay entre sus cuadrados?

    c) Dibujar sus gráficas.

19. Obtener la fórmula de Taylor hasta el orden k de las siguientes funciones, en los puntos x_0 indicados, con el término complementario de Cauchy y de Lagrange ($a \in \mathbb{R}$).

a) $f(x) = e^x$	$k = n,\ x_0 = 0$	b) $f(x) = a^x$	$k = n,\ x_0 = 0$
c) $f(x) = \text{sen} x$	$k = 2n+1,\ x_0 = 0,\ \frac{\pi}{2}$	d) $f(x) = \log(1+x)$	$k = n,\ x_0 = 0$
e) $f(x) = \cos x$	$k = 2n,\ x_0 = 0,\ \frac{\pi}{2}$	f) $f(x) = (1+x)^a$	$k = n,\ x_0 = 0$
g) $f(x) = \tan x$	$k = 3,\ x_0 = 0$	h) $f(x) = \log(\cos x)$	$k = 4,\ x_0 = 0$
i) $f(x) = x^5 + x^4$	$k = 8,\ x_0 = 0$		

20. Obtén el desarrollo de Taylor de cualquier orden alrededor de $a = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

21. Representar gráficamente las siguientes funciones estudiando su dominio de definición, crecimiento, máximos y mínimos relativos, límites, asíntotas,... ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$x + \log(x^2 - 1)$	$\dfrac{x}{1+x^2}$	$\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$	$x^2 e^{-x}$	$\dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$	$\dfrac{e^{-x}}{1-x^2}$
$\log(1+x^2) - 2x$	$\dfrac{\log\lvert x\rvert}{x}$	x^x	$x \arctan x$	$x \arctan(1/x)$	$xe^{1/x}$

22. Sea f con derivadas sucesivas de todos los órdenes en $\mathbb{R}$, tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Probar que la función $g(x) = x^3 f(x)$ tiene un mínimo relativo estricto en $x = 0$.

23. Calcular, usando polinomios de Taylor, los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x - \text{sen} x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{1 - \cos x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{x - \text{sen} x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2}{\text{sen}^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x}$

24. Hallar la altura del trapecio isósceles de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio R, teniendo como base mayor el diámetro.

25. Una ventana tiene forma de rectángulo terminado por un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. La porción rectangular ha de ser de cristal transparente y la parte circular ha de ser de cristal de color que admite sólo la mitad de la luz por metro cuadrado que el cristal transparente. El perímetro externo de la ventana ha de tener longitud fija P. Hallar, en función de P, las dimensiones de la ventana que deja pasar mayor cantidad de luz.

26. El valor de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demostrar que si un diamante se rompe en dos trozos, se produce una depreciación, y determina en qué caso es máxima.