12. El polinomio de Taylor

Definición 12.1 *Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan equivalentes en $x = a$ si $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando x tiende a a.*

Definición 12.2 *Una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ se denomina infinitesimal en $x = a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.*

Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es infinitesimal en $x = 0$ y $f(x) = \sin(x-2)$ es infinitesimal en $x = 2$.

Definición 12.3 *Dos funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $g : A \mapsto \mathbb{R}$ se denominan infinitésimos equivalentes en $x = a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando x tiende a a.*

Definición 12.4 *(o pequeña) Dados dos funciones f y g infinitésimales en cierto $x = a$, diremos que $g(x)$ es un infinitésimo de orden mayor que $f(x)$ en $x = a$ si $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ y se escribe $g(x) = o(f(x))$ cuando x tiende a a.*

Por ejemplo, la función x^2 es un infinitésimo de mayor orden que x en $x = 0$, es decir $x^2 = o(x)$, y la función x^3 es un infinitésimo de mayor orden que $x^{3/2}$ en $x = 0$, o sea, $x^3 = o(x^{3/2})$.

Obviamente se tiene que:

1. Para todo $m \in \mathbb{R}$, $m \cdot o(x) = o(x)$,
2. La suma de un número finito infinitésimos equivalentes es un infinitésimo,
3. El producto de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo de orden superior.

Usando lo anterior podemos reescribir la definición de función diferenciable.

Definición 12.5 *Diremos que $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es diferenciable en $x = a$ (punto de acumulación de A) si existe una constante C tal que $f(x) - f(a) = C(x-a) + o(x-a)$. La función $C(x-a)$ se denomina diferencial de f en $x = a$ y se denota por $d f(a)$.*

Nótese que el diferencial de f en $x = a$ es único pues como $\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \left(C + \frac{o(x-a)}{x-a} \right) = C.$$

El diferencial tiene un significado geométrico muy importante, es justo la distancia entre $f(a)$ y el valor $y(x)$ de la recta tangente a f en $x = a$

Si tenemos en cuenta que el diferencial de la función $f(x) = x$ en cualquier punto $a \in A$ es $d x(a) = 1(x-a)$, podemos redefinir el diferencial de una función de la forma $d f(a) = f'(a)dx(a)$, así se tiene la siguiente

Definición 12.6 *Se define como diferencial de una función $f(x)$ a la cantidad $d f(x)$ definida por*

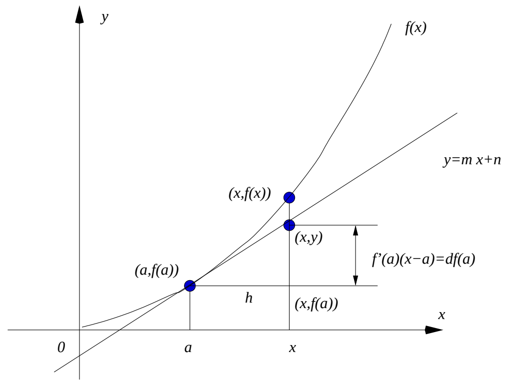
$$d f(x) = f'(x)\, d x. \tag{12.8}$$

Con la notación anterior, y de la definición de diferenciabilidad se deduce además que $f(x+h) \approx f(x) + d f(x)$. Es decir,

$$f(x+h) = f(x) + d f(x) + o(h) = f(x) + f'(x)h + o(h), \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Definamos el polinomio $P_1(x,a) = f(a) + f'(a)(x-a)$, entonces

$$f(x) - P_1(x,a) = o(x-a), \implies f(a) = P_1(a,a), \quad f'(a) = P_1'(a,a).$$



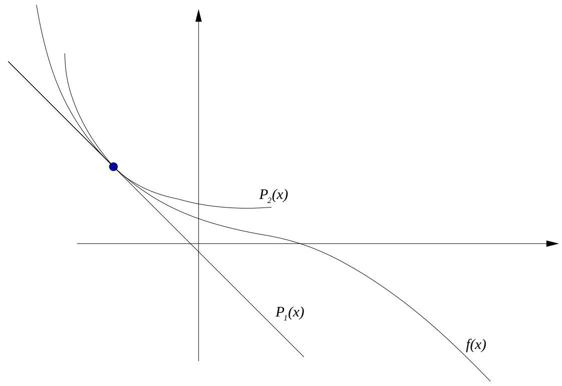


Figura 40: El diferencial $df(a)$ de una función $f(x)$ en el punto $x = a$ (izquierda). La curva $P_2(x, a)$ tangente a $f(x)$ en $x = a$ (derecha).

¿De qué manera podemos constuir un polinomio que aproxime a nuestra función en un entorno de un punto $x = a$ hasta órdenes mayores, digamos $o[(x - a)^n]$?

Probemos con una curva algo más complicada: una parábola

$$P_2(x, a) = A(x - a)^2 + B(x - a) + C,$$

que sea tangente a f en $x = a$, o sea, tal que $P_2(a, a) = f(a)$, y $P_2'(a, a) = f'(a)$. Ello nos da

$$P_2(x, a) = A(x-a)^2 + f'(a)(x-a) + f(a), \quad \Longrightarrow \quad P_2(x, a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Nótese que $P_2(a, a) = f(a)$, $P_2'(a, a) = f'(a)$ y $P_2''(a, a) = f''(a)$. Es decir, el polinomio $P_2(x, a)$ es tangente a f y el punto de tangencia es de orden 2.

Definición 12.7 *Diremos que un punto $x = a$ es un punto de tangencia de dos funciones f y g de orden n si f y g son tales que $f(a) = g(a)$ y sus derivadas $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$, para $k = 1, 2, \ldots n$.*

Definamos el siguiente polinomio de grado a lo más n

$$P_n(x, a) = a_n(x - a)^n + a_{n-1}(x - a)^{n-1} + \cdots a_1(x - a) + a_0,$$

de forma que $P_n(x, a)$ tenga un punto de tangencia de orden n con la función $f(x)$ que supondremos n-veces derivable en $x = a$. Luego, $a_0, ..., a_n$ de $P_n(x, a)$ son

$$f(a) = P_n(a, a), \quad f'(a) = P_n'(a, a), f''(a) = P_n''(a, a), \quad \cdots,$$

$$f^{(n-1)}(a) = P_n^{(n-1)}(a, a), \quad f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a, a).$$

Las ecuaciones anteriores son fáciles de resolver pues

$$P_n^{(k)}(a, a) = k! a_k, \quad \text{por tanto } a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Definición 12.8 *Dada una función $f(x)$ n-veces derivable en un entorno de $x = a$, llamaremos polinomio de Taylor de grado a lo más n de la función $f(x)$, y lo denotaremos por $P_n(x, a)$, al polinomio*

$$\begin{aligned} P_n(x, a) = & \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \cdots + f'(a)(x - a) + f(a) \\ = & \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k, \qquad grado P_n(x, a) \le n \ . \end{aligned}$$

Teorema 12.1 *(Teorema local de Taylor) Sea $f(x)$ $n-$veces derivable en un entorno de $x = a$ y sea $P_n(x,a)$ el polinomio de Taylor. Entonces,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x,a)}{(x-a)^n} = 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) - P_n(x,a) = o[(x-a)^n].$$

Teorema 12.2 *(Polinomios de McLaurin de las funciones elementales.)*

1. $\sin x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}).$

2. $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}).$

3. $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k + o(x^n).$

4. $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$

5. $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$

Aplicación al cálculo de límites

Usando los desarrollos del teorema anterior tenemos, por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x + x^3/6 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Otro ejemplo es

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + x^2/2 + o(x^2) - 1 - x}{1 - (1 - x^2/2 + o(x^2))} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2/2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + o(x^2)/x^2}{1 + o(x^2)/x^2} = 1.$$

Teorema 12.3 *(Estimación del error del Teorema de Taylor) Ssea $(n)-$veces derivable en $[a,x]$ y con $n-$ésima derivada continua en $[a,x]$ y derivable en (a,x) y sea $P_n(x,a)$ el polinomio de Taylor*

$$P_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{12.9}$$

Sea $\phi(x)$ una función continua en $[a,x]$ y derivable en (a,x) con $\phi'(x) \neq 0$ en (a,x). Entonces existe un $c \in (a,x)$ tal que

$$R_n(x,a) = \frac{\phi(x) - \phi(a)}{\phi'(c) n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n, \quad c \in (a,x). \tag{12.10}$$

Corolario 12.1 *1. Fórmula del* resto de Taylor en forma de Cauchy.

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a), \quad c \in (a,x). \tag{12.11}$$

2. Fórmula del resto de Taylor en forma de Lagrange.

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad c \in (a,x). \tag{12.12}$$

3. Fórmula del resto de Taylor en forma de Scholömilch.

$$R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\,p}(x-c)^{n+1-p}(x-a)^p, \qquad c\in(a,x), \quad p>0. \tag{12.13}$$

Teorema 12.4 *(Condición suficiente de extremo) Sea f continua en todo un entorno de un punto $x=a$ y y derivable en todo un entorno de un punto $x=a$ excepto quiza el propio punto $x=a$ y $f'(x)$ cambia de signo al pasar por $x=a$. Entonces f tiene un extremo local en $x=a$.*

Las condiciones del teorema anterior son **sólo suficientes**.

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}. \tag{12.14}$$

Esta función tiene un mínimo local (de hecho global) en $x=0$ pues

$$x^2\le f(x)\le 3x^2, \qquad \Longrightarrow \qquad f(x)\ge 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Además, f es derivable en todo $\mathbb{R}$ siendo

$$f'(x)=\begin{cases} 4x+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

Cualquiera sea el entorno de $x=0$ que escojamos a la izquierda y a la derecha del mismo hay valores de x para los cuales f' es positiva y negativa (ver figura 41), o sea, f' no tiene ningún signo determinado ni a la izquierda ni a la derecha de $x=0$.

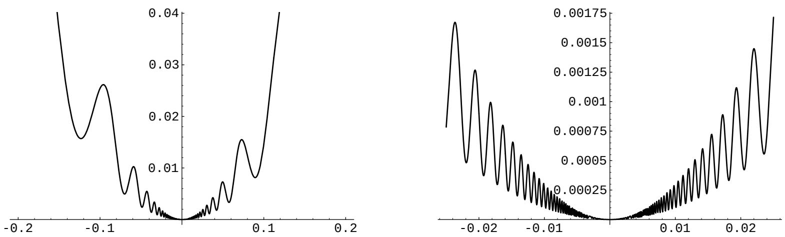


Figura 41: La función f definida en (12.14) y detalle de la misma (derecha).

12.1. Convexidad de una función

Se dice que una función $f(x)$ es estrictamente convexa hacia abajo (cóncava) en (a,b) si cualquiera sea la recta secante s que corte a f en los puntos $x_1<x_2$, $x_1,x_2\in(a,b)$, está siempre por encima del gráfico de la curva $y=f(x)$ en el intervalo (x_1,x_2)

Sea $g(x)$ a la recta secante que pasa por los puntos $(x_1,f(x_1)$ y $x_2,f(x_2)$ tenemos

$$g(x)=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)=\left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\right)f(x_1)+\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)f(x_2).$$

Entonces cualquiera sea $x\in(x_1,x_2)$, podemos escribir

$$x=\left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\right)x_1+\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)x_2=(1-t)x_1+tx_2,$$

Luego, si f está por debajo de g en (x_1,x_2) tenemos $f(x)\ge g(x)$, de donde se deduce que $f[(1-t)x_1+tx_2]\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$, y viceversa.

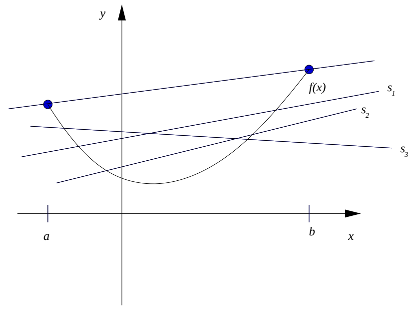


Figura 42: Definición de función convexa hacia abajo (cóncava).

Definición 12.9 *Una función $f(x)$ es estrictamente convexa hacia abajo (cóncava) en (a,b) si*

$$\forall x_1,\, x_2 \in (a,b),\ \forall t \in [0,1], \quad f[(1-t)x_1 + tx_2] < (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

o, equivalentemente, para todo x_1, x_2 de (a,b), y todo x tal que $x_1 < x < x_2$,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Si las desigualdades anteriores no son estrictas se dice que $f(x)$ es convexa hacia abajo.

Geométricamente la convexidad se puede interpretar de la siguiente forma: dadas las secantes que pasan por los puntos $(x_1, f(x_1))$, $(x, f(x))$ –s_1 en la figura 43– y $(x, f(x))$, $(x_2, f(x_2))$ –s_2 en la figura 43–, la pendiente de la primera siempre es menor que la de la segunda.

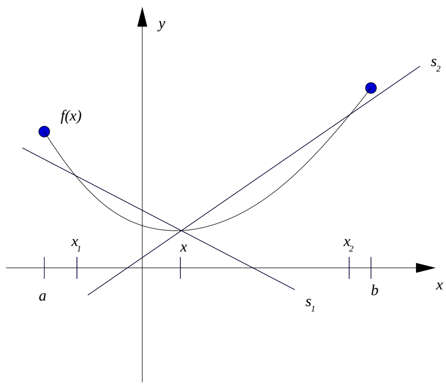


Figura 43: Interpretación geométrica de la convexidad (hacia abajo).

Teorema 12.5 *Para que una $f(x)$ derivable en (a,b) sea convexa hacia abajo (cóncava) en (a,b) es necesario y suficiente que su primera derivada no decrezca. Además si $f'(x)$ es estrictamente creciente en todo (a,b), entonces $f(x)$ es estrictamente convexa hacia abajo.*

Corolario 12.2 *Para que una $f(x)$ dos veces derivable en (a,b) sea convexa hacia abajo (cóncava) en (a,b) es necesario y suficiente que $f''(x) \geq 0$. Además si $f''(x) > 0$ en todo (a,b), entonces $f(x)$ es estrictamente convexa hacia abajo.*

El siguiente teorema nos da otra interpretación geométrica de la convexidad pero para funciones derivables.

Teorema 12.6 *Una función $f(x)$ derivable en (a,b) es convexa hacia abajo (cóncava) en un intervalo (a,b) si y sólo si la curva $y = f(x)$ no está por debajo de cualquiera de las rectas tangentes a ella en dicho intervalo.*

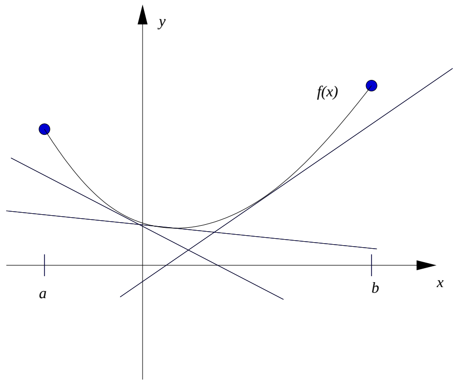


Figura 44: Función convexa hacia abajo (cóncava) y sus tangentes.

12.2. Puntos de inflexión

Definición 12.10 *Un punto $x = a$ es un punto de inflexión de la función $f(x)$ si en un entorno de dicho punto la gráfica de la función $f(x)$ tiene diferentes direcciones de convexidad a la izquierda y derecha del punto*

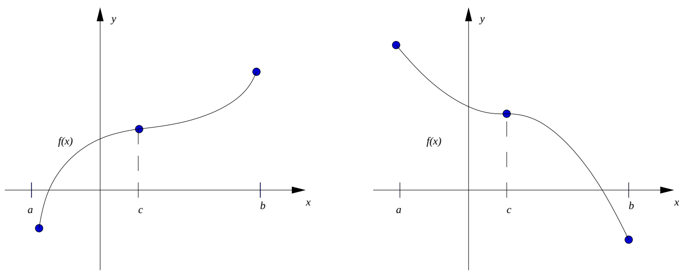


Figura 45: Punto de inflexión convexa a cóncava.

Obviamente los puntos de inflexion de $f(x)$ son los extremos de $f'(x)$.

Teorema 12.7 *(Condición necesaria para la existencia de un punto de inflexión) Si $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$, entonces o $f''(a) = 0$ o $f''(a)$ no existe.*

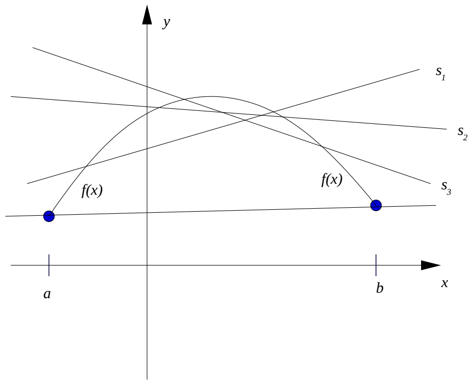
Teorema 12.8 *(Condición necesaria y suficiente de punto de inflexión) Sea $f(x) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tres veces derivable en un entorno del punto $x = a$ tal que $f''(a) = 0$, entonces la función tendrá en $x = a$ un punto de inflexión si $f'''(a) \neq 0$. Si $f'''(a) > 0$ entonces la función pasará de convexa hacia arriba a convexa hacia abajo y si $f'''(a) < 0$, entonces la función pasará de convexa hacia abajo a convexa hacia arriba.*

Definición 12.11 *Una función $f(x)$ es estrictamente convexa hacia arriba (convexa) en un intervalo (a, b) si cualquier recta secante s que corte a f en los puntos $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a, b)$, está siempre por debajo del gráfico de la curva $y = f(x)$ en el intervalo (x_1, x_2), tal y como se muestra en la figura 46 (izquierda), o equivalentemente, si*

$$\forall x_1,\, x_2 \in (a, b),\ \forall t \in [0, 1], \quad f[(1-t)x_1 + tx_2) > (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

o, equivalentemente, para todo x_1, x_2 de (a, b), y todo x tal que $x_1 < x < x_2$,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$



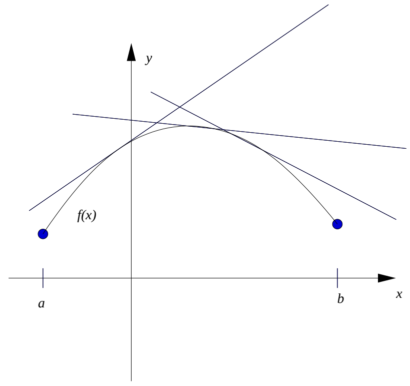


Figura 46: Función convexa hacia arriba (convexa).

Teorema 12.9 *Para que una $f(x)$ derivable en (a,b) sea convexa hacia arriba en (a,b) es necesario y suficiente que su primera derivada no crezca. Y si es estrictamente decreciente entonces es estrictamente convexa hacia arriba.*

Corolario 12.3 *Para que una $f(x)$ dos veces derivable en (a,b) sea convexa hacia arriba en (a,b) es necesario y suficiente que $f''(x) \leq 0$. Además si $f''(x) < 0$ en todo (a,b), entonces $f(x)$ es estrictamente convexa hacia arriba.*

12.3. Aplicaciones a la representación gráfica de funciones.

Esquema para la representación de la función $y = f(x)$.

1. Determinar el dominio de la función $f(x)$.
2. Determinar si la función tiene simetría par o impar, o si es periódica.
3. Determinar los puntos de discontinuidad de la función (evitables y no evitables) así como las asíntotas verticales, horizontales y oblícuas de la función.
4. Encontrar los puntos de corte con los ejes, o sea, los ceros de la función $f(x) = 0$, y el punto $f(0)$.
5. Encontrar los extremos de la función y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Encontrar los puntos de inflexión de la función y los intervalos de concavidad y convexidad.

Ejemplo 12.1 *Estudiar la función* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

1. Dominio de la función: $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
2. La función tiene simetría par. (es suficiente estudiarla para $x > 0$)
3. Tiene dos puntos de discontinuidad no evitables de salto infinito: $x = -1$, $x = 1$. Además:
$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty,$$
y
$$\lim_{x\to -1-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to -1+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty,$$
por tanto las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son las asíntotas verticales. La función tiene una única asíntota horizontal $y = 1$, pues
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1.$$

4. Los puntos de corte con el eje son $(0,-1)$ y no tiene ceros (cortes con el eje x) pues $f(x)=0$ es equivalente con $x^2+1=0$ que no tiene soluciones reales.

5. Vamos a encontrar los extremos de la función y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Para ello calculamos $f'(x)=0$ (nuestra función es continua y derivable en todo su dominio)
$$\frac{d}{d\,x}\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}, \qquad f'(x)=0 \iff x=0,$$
además $f'(x)$ tiene diferentes signos a la izquierda (es positiva) y a la derecha (es negativa) del $x=0$ por lo que $x=0$ es un máximo local. Si utilizamos la segunda derivada
$$f''(x)=\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}, \qquad f''(0)=-4<0.$$
Luego para $x\in(-\infty,0)$ la función $f(x)$ es creciente y para $x\in(0,+\infty)$ es decreciente y tiene un máximo local en $x=0$.

6. Vamos a encontrar los puntos de inflexión de la función y los intervalos de concavidad y convexidad. Para ello estudiamos los puntos donde $f''(x)=0$ o donde no exista $f''(x)$:
$$f''(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}. \quad f''(x) \text{ no existe en } x=\pm 1.$$
Luego los únicos puntos donde la segunda derivada cambia de signo son $x=-1$ y $x=1$. Para $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ $f''(x)>0$ por lo que $f(x)$ es cóncava es dichos intervalos. Para $x\in(-1,1)$ $f''(x)<0$ por lo que $f(x)$ es convexa en dicho intervalo.

El gráfico de la función está representado en la figura 47

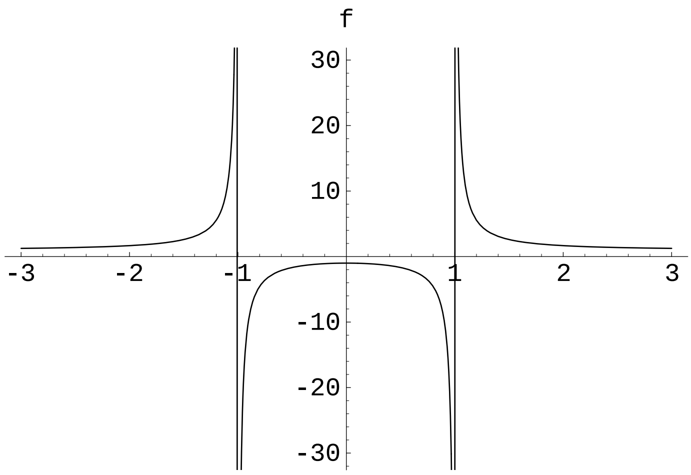


Figura 47: Función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.