3. Sucesiones de números reales.

Una sucesión de números reales $\{a_n\}$ no es más que una regla que a cada número natural le hace corresponder otro real:

$$\begin{aligned} a_n : \quad & \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} \\ & a_n = f(n), \qquad n = 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

Por ejemplo, $a_n = 1$, una sucesión constante; $a_n = n$, la sucesión de los números naturales; $b_n = \frac{1}{n}$, la sucesión de los inversos de los números naturales; etc.

3.1. Cáracter de las sucesiones: monotonía y acotación.

Definición 3.1 *Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$.*

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n^2$ es monótona creciente.

Definición 3.2 *Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} < a_n$.*

Por ejemplo, la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ es monótona decreciente.

Definición 3.3 *Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es monótona no decreciente si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$.*

Definición 3.4 *Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es monótona no creciente si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$.*

Ejemplos de sucesiones no crecientes y no decrecientes son, por ejemplo, las sucesiones $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, ...\}$ y $\{1, 1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, ...\}$, respectivamente. Otro ejemplo es el de las sucesiones constantes.

Definición 3.5 *Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente si $\forall n \in \mathbb{N}$, existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$.*

Por ejemplo, la sucesión $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ está acotada superiormente pues $b_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.6 *Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente si $\forall n \in \mathbb{N}$, existe un $m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq m$.*

Por ejemplo, la sucesión $b_n = n^2$ está acotada inferiormente pues $b_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.7 *Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ está acotada, si $\{a_n\}$ está acotada superior e inferiormente. Es decir si $\forall n \in \mathbb{N}$, existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$.*

Por ejemplo, la sucesión $b_n = (-1)^n$ está acotada pues $|b_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.8 *Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es no acotada si $\forall M \in \mathbb{R}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| > M$.*

Por ejemplo, la sucesión $b_n = (-1)^n n^2$ no está acotada. Como veremos más adelante el cáracter de las sucesiones juega un papel muy importante.