Programa del curso de Doctorado: Algunas funciones especiales de la física matemática

Profesores: Renato Alvarez Nodarse y Antonio J. Durán Guardeño.

1. Objetivos

Dentro de la gran familia de las funciones especiales de la física matemática, los polinomios ortogonales tienen un papel principal por la riqueza de su estructura y sus aplicaciones, especialmente en los modelos cuánticos más importantes. El objetivo principal del presente curso es que los alumnos se familiarizen con las propiedades algebraicas y, sobre todo, analíticas de los polinomios ortogonales. Especial hincapié se hará en las ecuaciones diferenciales que verifican las familias clásicas escalares y las recientemente encontradas para las versiones matriciales (conviene recordar que estas ecuaciones diferenciales son la clave para sus aplicaciones físicas, en especial para la resolución de modelos cuánticos).

2. Descriptores

Funciones especiales. Polinomios ortogonales escalares y matriciales. Polinomios clásicos. Ecuaciones diferenciales de de tipo hipergeométrico. Fórmula de Rodrigues. Integración de modelos cuánticos.

3. Programa

1. Introducción histórica.

2. Generalidades sobre polinomios ortogonales en el plano complejo.

3. Polinomios ortogonales, escalares y matriciales, sobre la recta real. Propiedades algebraicas (ceros, fórmulas de cuadratura, relación de recurrencia a tres términos, etc.).

4. Los polinomios clásicos de Jacobi, Laguerre, Hermite y Bessel. Clasificación y diversas caracterizaciones. Fórmulas de estructura.

5. Las ecuaciones diferenciales de las familias clásicas en la física cuántica. El oscilador armónico y el átomo de hidrógeno. El método de Nikiforov y Uvarov.

6. Polinomios matriciales ortogonales verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden. Reducción y solución de la ecuación diferencial para el peso matricial. La fórmula de Rodrigues matricial.

Referencias

[1] R. Álvarez-Nodarse, Polinomios hipergemétricos y q-polinomios. Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano"Número 26. Prensas Universitarias de Zaragoza, Spain, 2003.

[2] V.G. Bagrov and D.M. Gitman, *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations.* Kluwer, Dordrecht, 1990.

[3] J. L. Cardoso and R. Álvarez-Nodarse, Recurrence relations for radial wave functions for the N-th dimensional oscillators and hydrogenlike atoms. J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), 2055-2068.

[4] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach Science Publishers, Nueva York, 1978.

[5] A. J. Duran, *On orthogonal polynomials with respect to positive definite matrix of measures*, Can. J. Math. **47** (1995), 88–112.

[6] A. J. Duran, *Markov's theorem for orthogonal matrix polynomials*, Can. J. Math. **48** (1996), 1180–1195.

[7] A. J. Duran, *Matrix inner product having a matrix symmetric second order differential opeator*, Rocky Mount. J. Math. **27** (1997), 585–600.

[8] A. J. Durán y A. Grunbaum, Orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations *Int. Math. Res. Not.* **10** (2004), 461-484.

[9] G. Freud, *Orthogonal Polynomials.* Pergamon Press, Oxford, 1971.

[10] Grünbaum, F. A.,*Matrix valued Jacobi polynomials*, Bull. Sciences Math. **127**, 3, (May 2003), 207–214.

[11] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics.* Birkhäuser Verlag, Basilea, 1988.

[12] E. B. Saff, Orthogonal polynomials from a complex perspective. En: *Orthogonal Polynomials. Theory and Practice.* P. Nevai (Ed.) NATO ASI Series C, **Vol. 294**. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990, 363–393.

[13] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials.* Amer. Math. Soc. Coll. Pub. **23** American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1975 (cuarta edición).

4. Metodología

El curso está dividido en dos partes: una primera compuesta por un sustrato de resultados teóricos (que incluyen tanto teoremas como técnicas de resolución) y una segunda donde se usará el contenido de la primera para resolver problemas aplicados. Se hará especial hincapié en las aplicaciones en física cuántica donde el conocimiento de las técnicas de funciones especiales permite la resolución de diversos modelos de forma unificada. Se mostrarán también algunas técnicas númericas y simbólicas (usando el programa Mathematica, por ejemplo) para problemas relacionados con los polinomios ortogonales. Con esta conjunción de teoría, técnicas y aplicaciones se conseguirá una mayor motivación del alumno lo que permitirá, por una parte, una mejor comprensión de la materia, y por otra, facilitar su aprendizaje.

La evaluación del alumno se hará mediante su participación en trabajos dirigidos a complementar parte del sustrato teórico (tanto en la demostración de teoremas como en la práctica de las técnicas). Dichos trabajos serán discutidos y evaluados a lo largo de curso.