El teorema de la función implícita

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

Problema: ¿Cuándo define la ecuación $F(x, y) = 0$ una función $y = f(x)$?

Problema: ¿Cuándo define la ecuación $F(x,y)=0$ una función $y=f(x)$?

Para aclarar ideas: La Ec. $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ define una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

Ahora bien, si queremos despejar la y tenemos $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. ¿Cuál de las dos ramas tomamos?

Problema: ¿Cuándo define la ecuación $F(x,y)=0$ una función $y=f(x)$?

Para aclarar ideas: La Ec. $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ define una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

Ahora bien, si queremos despejar la y tenemos $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. ¿Cuál de las dos ramas tomamos?

Una elección: $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$ que es continua en $[-1,1]$ pero no es diferenciable en los extremos.

Problema: ¿Cuándo define la ecuación $F(x,y)=0$ una función $y=f(x)$?

Para aclarar ideas: La Ec. $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ define una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

Ahora bien, si queremos despejar la y tenemos $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. ¿Cuál de las dos ramas tomamos?

Una elección: $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$ que es continua en $[-1,1]$ pero no es diferenciable en los extremos.

Otra elección: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ si $x\in\mathbb{Q}$ y $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ si $x\in\mathbb{I}$

Solución: Aproximamos $F(x, y)$ por el plano tangente a (x_0, y_0) t.q. $F(x_0, y_0) = 0$

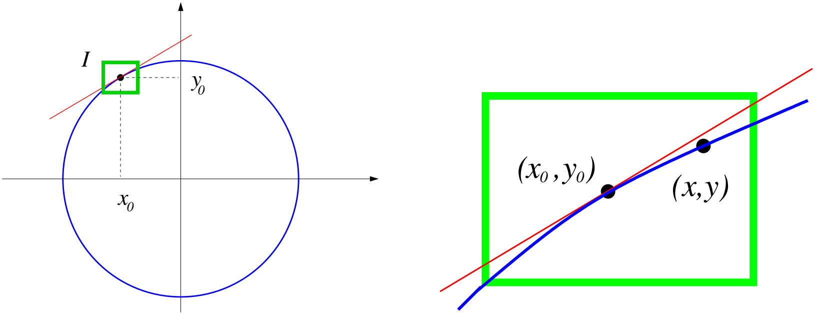
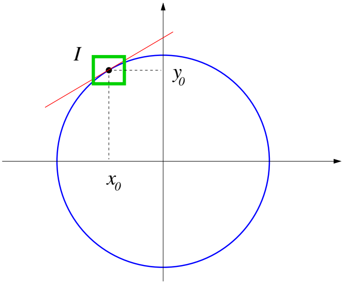
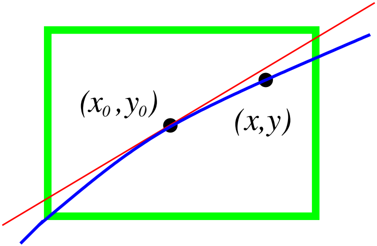


Figure: Entorno I (en verde) de (x_0, y_0) (ampliado en la figura de la derecha) donde podemos construir la función implícita $f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = 0$ para $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ (en azul). En rojo se representa el plano (recta) tangente a $F(x, y)$ en (x_0, y_0).

Solución: Aproximamos $F(x, y)$ por el plano tangente a (x_0, y_0) t.q. $F(x_0, y_0) = 0$

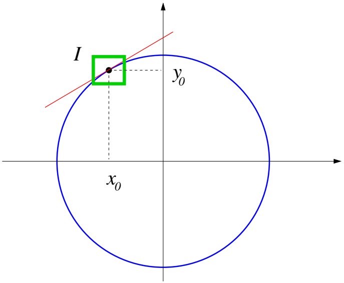


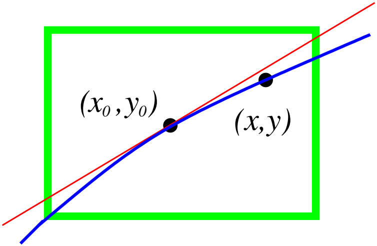


Si F es diferenciable en (x_0, y_0) entonces en un entorno de (x_0, y_0)

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + o(\|h\|).$$

Solución: Aproximamos $F(x,y)$ por el plano tangente a (x_0,y_0) t.q. $F(x_0,y_0)=0$





Si F es diferenciable en (x_0,y_0) entonces en un entorno de (x_0,y_0)

$$F(x,y)=F(x_0,y_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+o(\|h\|).$$

Como $F(x_0,y_0)=0$ y queremos que $F(x,y)=0$ entonces

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\approx 0.$$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \approx 0.$$

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\approx 0.$$

Luego un valor aproximado de y en función de x es

$$y-y_0\approx\left[\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\right]^{-1}\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0).$$

Solución: Aproximamos $F(x, y)$ por el plano tangente a (x_0, y_0) t.q. $F(x_0, y_0) = 0$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \approx 0.$$

Luego un valor aproximado de y en función de x es

$$y - y_0 \approx \left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0).$$

Como $y = f(x)$ y $y_0 = f(x_0)$ tenemos además que

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx \left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\approx 0.$$

Luego un valor aproximado de y en función de x es

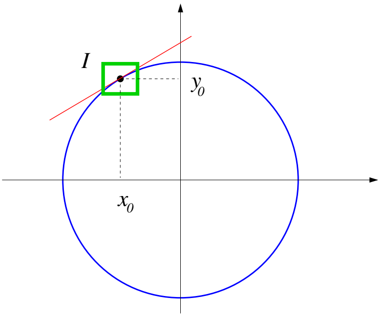
$$y-y_0\approx\left[\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\right]^{-1}\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0).$$

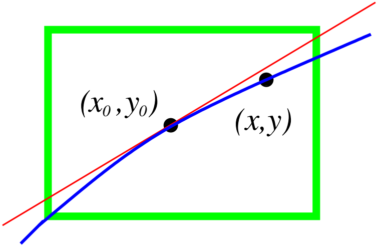
Como $y=f(x)$ y $y_0=f(x_0)$ tenemos además que

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\approx\left[\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\right]^{-1}\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}$$

En el límite $\Delta x\to 0$ obtenemos un valor para $f'(x_0)$. Además que para obtener y necesitamos que $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0.$

Si aplicamos lo anterior al ejemplo $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ tenemos que, en general, podemos definir una función f en cualquier entorno de (x_0, y_0), $x_0 \in (-1,1)$ que escojamos siempre que $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} = 2y_0 \neq 0$, o sea, siempre que $y_0 \neq 0$





Teorema de la función implícita

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida en un entorno del punto $(x_0, y_0) \in A$, A abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Supongamos que:

1. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0) = 0$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0.$

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida en un entorno del punto $(x_0, y_0) \in A$, A abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Supongamos que:

1. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_0) = 0$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0.$

Entonces $\exists$ un abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k) \subset A$ alrededor de (x_0, y_0), y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ t.q.:

Teorema de la función implícita

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida en un entorno del punto $(x_0, y_0) \in A$, A abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Supongamos que:

1. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0) = 0$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0.$

Entonces $\exists$ un abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k) \subset A$ alrededor de (x_0, y_0), y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ t.q.:

1. $F(x, y) = 0$ en I si y sólo si $f(x) = y$,

Teorema de la función implícita

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida en un entorno del punto $(x_0, y_0) \in A$, A abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Supongamos que:

1. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0) = 0$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0.$

Entonces $\exists$ un abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k) \subset A$ alrededor de (x_0, y_0), y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ t.q.:

1. $F(x, y) = 0$ en I si y sólo si $f(x) = y$,
2. $f(x) \in C^{(p)}(I_x)$.

Teorema de la función implícita

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida en un entorno del punto $(x_0, y_0) \in A$, A abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Supongamos que:

1. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0) = 0$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0.$

Entonces $\exists$ un abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k) \subset A$ alrededor de (x_0, y_0), y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ t.q.:

1. $F(x, y) = 0$ en I si y sólo si $f(x) = y$,
2. $f(x) \in C^{(p)}(I_x)$.
3. Para todo $x \in I_x$, las derivadas parciales de $f(x)$ se calculan por la fórmula

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_i} = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_{x_i}(x, f(x))], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Antes de probarlo un ejemplo de aplicación.

Ejemplo: Sea la ecuación $z^3 + 2(x+y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$.

1. Prueba que la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $(0,-1,1)$ y que dicha función es una función $C^{(\infty)}(U)$ en dicho U.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
3. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(0,-1,1)$.

Solución:

Sea la función

$$F:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad F(x,y,z) = z^3 + 2(x+y)^2 z + e^{z-1} - 4$$

1) En el punto $(0,-1,1)$ se verifica la ecuación $F(0,-1,1) = 0$.

2) F es $C^{(p)}(\mathbb{R}^3)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y $F'_z(0,-1,1) = 6 \neq 0$.

En TFI nos dice que existe en todo un entorno de $(0,-1,1)$ una función $z = f(x,y)$, $f \in C^{(p)}(\mathbb{R}^2)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ tal que $F(x,y,f(x,y)) = 0$ en dicho entorno de $(0,-1,1)$.

Sea la función

$$F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4$$

1) En el punto $(0, -1, 1)$ se verifica la ecuación $F(0, -1, 1) = 0$.

2) F es $C^{(p)}(\mathbb{R}^3)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y $F'_z(0, -1, 1) = 6 \neq 0$.

En TFI nos dice que existe en todo un entorno de $(0, -1, 1)$ una función $z = f(x, y)$, $f \in C^{(p)}(\mathbb{R}^2)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ en dicho entorno de $(0, -1, 1)$.

Para calcular las derivadas usamos que

$F'_x(0, -1, 1) = F'_y(0, -1, 1) = 4(x + y)z = -4 \Rightarrow$

$$\frac{\partial f(0, -1)}{\partial x} = -\frac{F'_x(0, -1, 1)}{F'_z(0, -1, 1)} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial f(0, -1)}{\partial y} = -\frac{F'_y(0, -1, 1)}{F'_z(0, -1, 1)} = \frac{2}{3}.$$

$$F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$$

Como f es $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ en un entorno de $(0, -1)$ entonces es diferenciable tantas veces como se quiera.

Derivando dos veces respecto a x la ecuación $F(x, y) = 0$ y considerando z como función de x, y y $z_x = z_y = 2/3$, tenemos:

$$2z_{xx}(y + x)^2 + 8z_x(y + x) + 3z^2 z_{xx} + e^{z-1} z_{xx} + (6z + e^{z-1}) z_x^2 + 4z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z_{xx} = -\frac{8}{27}.$$

Derivando respecto a y dos obtenemos

$$2z_{yy}(y + x)^2 + 8z_y(y + x) + 3z^2 z_{yy} + e^{z-1} z_{yy} + (6z + e^{z-1}) z_y^2 + 4z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z_{yy} = -\frac{8}{27}.$$

Respecto a x y y tenemos

$$2z_{xy}(y+x)^2 + \quad 4(z_y+z_x)(y+x) + 6zz_xz_y +$$
$$e^{z-1}z_xz_y + 3z^2z_{xy} + e^{z-1}z_{xy} + 4z = 0 \Rrightarrow$$

$$z_{xy} = -\frac{8}{27}.$$

Usando Taylor $z(x,y) = P_2(x,y) + o\left(x^2 + (y-1)^2\right)$

$$P_2(x,y) = \; z(0,-1) + Dz(0,-1)(x,y+1) + D^2z(0,-1)(x,y+1) +$$

$$= \; 1 + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{8}{27} & -\frac{8}{27} \\ -\frac{8}{27} & -\frac{8}{27} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

Prueba del teorema de la función implícita

Prueba del teorema de la función implícita

Asumimos que $F'_y(x_0, y_0) > 0$, entonces, como $F'_y(x, y)$ es continua en $(x_0, y_0) \in A$, se tiene que existe todo un entorno $I = I_x \times I_y$ de (x_0, y_0) donde $F'_y(x, y) > 0$. Luego, $F(x, y)$ como función de y es estrictamente creciente. Como $F(x_0, y_0) = 0$ entonces tenemos que

$$0 > F(x_0, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + k) > 0.$$

Prueba del teorema de la función implícita

Asumimos que $F'_y(x_0, y_0) > 0$, entonces, como $F'_y(x, y)$ es continua en $(x_0, y_0) \in A$, se tiene que existe todo un entorno $I = I_x \times I_y$ de (x_0, y_0) donde $F'_y(x, y) > 0$. Luego, $F(x, y)$ como función de y es estrictamente creciente. Como $F(x_0, y_0) = 0$ entonces tenemos que

$$0 > F(x_0, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + k) > 0.$$

Como $F(x, y)$ es continua en A entonces los signos de F se mantienen en todo un entorno de cada punto, i.e., existe un entorno I_x (que por simplicidad asumimos igual al de antes) tal que

$$0 > F(x, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x, y_0 + k) > 0, \qquad \forall x \in I_x.$$

Prueba del teorema de la función implícita

Asumimos que $F'_y(x_0, y_0) > 0$, entonces, como $F'_y(x, y)$ es continua en $(x_0, y_0) \in A$, se tiene que existe todo un entorno $I = I_x \times I_y$ de (x_0, y_0) donde $F'_y(x, y) > 0$. Luego, $F(x, y)$ como función de y es estrictamente creciente. Como $F(x_0, y_0) = 0$ entonces tenemos que

$$0 > F(x_0, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + k) > 0.$$

Como $F(x, y)$ es continua en A entonces los signos de F se mantienen en todo un entorno de cada punto, i.e., existe un entorno I_x (que por simplicidad asumimos igual al de antes) tal que

$$0 > F(x, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x, y_0 + k) > 0, \qquad \forall x \in I_x.$$

Pero para cada $x \in I_x$ la función $h(y) := F(x, y)$ cambia de signo en los extremos del intervalo I_y, luego por el Teorema de Bolzano $\forall x \in I_x$ existe un único $y \in I_y$ tal que $F(x, y) = 0$ (la unicidad es consecuencia de la monotonía de $h(y)$). Definiendo la función $f : I_x \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ de forma que $y = f(x)$ obtenemos una función que cumple con que $F(x, f(x)) = 0$.

Prueba del teorema de la función implícita

Probemos que $f(x)$ así definida es continua. De la construcción anterior se sigue que $\forall\epsilon > 0$ (ϵ suficientemente pequeño para que $y_0 \pm \epsilon \in I_y$) $\exists\delta > 0$ t.q. $\|x - x_0\| < \delta$ con $x \in I_x$ $F(x, y)$ cambie de signo en los extremos de $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$.

Prueba del teorema de la función implícita

Probemos que $f(x)$ así definida es continua. De la construcción anterior se sigue que $\forall\epsilon > 0$ (ϵ suficientemente pequeño para que $y_0 \pm \epsilon \in I_y$) $\exists\delta > 0$ t.q. $\|x - x_0\| < \delta$ con $x \in I_x$ $F(x,y)$ cambie de signo en los extremos de $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$.

Luego $\forall\epsilon > 0$, $\exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ t.q. $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Probemos que $f(x)$ así definida es continua. De la construcción anterior se sigue que $\forall\epsilon > 0$ (ϵ suficientemente pequeño para que $y_0 \pm \epsilon \in I_y$) $\exists\delta > 0$ t.q. $\|x - x_0\| < \delta$ con $x \in I_x$ $F(x, y)$ cambie de signo en los extremos de $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$.

Luego $\forall\epsilon > 0$, $\exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ t.q. $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Probemos que $f \in C^{(1)}(I_x)$:

Elegimos $\Delta x = he_i$, e_i i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

f es continua en I_y, luego $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y = y + \Delta y$, donde $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \to 0$ si $\Delta x \to 0$.

Para probar que $f \in C^{(1)}(I_x)$:

Como $F(x,y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$ entonces, por el teorema del valor medio para funciones escalares de varias variables, existe un $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 = \quad & F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = DF(x+\theta h e_i, y+\theta\Delta y)(he_i) \\ = \quad & \frac{\partial F(x+\theta h e_i, y+\theta\Delta y)}{\partial x_i} h + \frac{\partial F(x+\theta h e_i, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\Delta y. \end{aligned}$$

Como $F(x,y) \in C^{(1)}(I)$ entonces tomando límites $\Delta x \to 0 \Rightarrow$

$$0 = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h}.$$

Luego, si $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow$ existe el $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i}$.

Prueba

Como

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_i} = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_{x_i}(x, f(x)), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

y $f(x)$, F'_x y F'_y son continuas, se sigue (¿por qué?) que f' es continua.

Prueba

Como

$$\frac{\partial f(x_1,\dots x_n)}{\partial x_i} = -[F'_y(x,f(x))]^{-1}\cdot[F'_{x_i}(x,f(x)), \quad i=1,2,\dots,n,$$

y $f(x)$, F'_x y F'_y son continuas, se sigue (¿por qué?) que f' es continua.

Derivando sucesivamente la expresión anterior se deduce que $f\in C^{(p)}(I_x)$.

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \end{cases}$$

donde $F_k : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, m$. Por sencillez denotaremos por $F(x, y)$ la función $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ cuyas componentes son las F_k anteriores, por lo que el sistema anterior lo escribiremos por $F(x, y) = 0$. La idea es saber si podemos encontrar m funciones $y_k = f_k(x) := f_k(x_1, \cdots, x_n)$ tales que $F_k(x, f_k(x)) = 0$ para todo $k = 1, \cdots, m$.

Sea $x_0 := (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ e $y_0 := (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0m})$ y denotemos por I_x el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$ y por I_y el intervalo $[y_0 - k, y_0 + k]$.
Definamos las matrices (apliaciones lineales)

$$f' : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m, \quad f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Teorema de la función implícita

$$F'_x : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m, \quad F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$F'_y : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m, \quad F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Además $F'_y(x,y)$ es una matriz cuadrada que será invertible si y sólo si $\det F'_y(x,y) \neq 0$.

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ definida en un entorno del punto $(x_0, y_0) \in A$, A abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Supongamos que:

1. $F(x, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $F(x_0, y_0) = 0$,
3. det $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ o sea,$F'_y(x, y)$ es una matriz invertible.

Entonces existe un intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$ alrededor del punto (x_0, y_0), $I \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}^m$ t.q.

1. $F(x, y) = 0$ en I si y sólo si $f(x) = y$,
2. $f(x) \in C^{(p)}(I_x)$.
3. Para todo $x \in I_x$, las derivadas parciales de $f(x)$ se calculan por la fórmula

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_x(x, f(x))], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejemplos:

Ejemplo 1: $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - r^2 = 0$. ¿Se pueden encontrar $z = f(x,y)$? ¿Cuánto valen $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$?

Ejemplos:

Ejemplo 1: $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - r^2 = 0$. ¿Se pueden encontrar $z = f(x,y)$? ¿Cuánto valen $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$?

Ejemplo 2: $F(x,y,z) = y^2 z + x \log z - x = 0$, se sabe que $z(1,-1) = 1$. Encontrar el polinomio de Taylor de orden 2 de z en el punto $(1,-1)$.

Ejemplos:

Ejemplo 1: $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - r^2 = 0$. ¿Se pueden encontrar $z = f(x,y)$? ¿Cuánto valen $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$?

Ejemplo 2: $F(x,y,z) = y^2 z + x \log z - x = 0$, se sabe que $z(1,-1) = 1$. Encontrar el polinomio de Taylor de orden 2 de z en el punto $(1,-1)$.

Ejemplo 3: Sea $F(x,y,z) = x^2 y + e^x + z = 0$. ¿Qué puntos (b,c) definen una función $x(y,z)$ tal que $x(b,c) = 0$?

Calcula, si es posible, $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial x}{\partial z}$.

Ejemplos:

Ejemplo 1: $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-r^2=0$. ¿Se pueden encontrar $z=f(x,y)$? ¿Cuánto valen $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$?

Ejemplo 2: $F(x,y,z)=y^2z+x\log z-x=0$, se sabe que $z(1,-1)=1$. Encontrar el polinomio de Taylor de orden 2 de z en el punto $(1,-1)$.

Ejemplo 3: Sea $F(x,y,z)=x^2y+e^x+z=0$. ¿Qué puntos (b,c) definen una función $x(y,z)$ tal que $x(b,c)=0$?

Calcula, si es posible, $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial x}{\partial z}$.

Ejemplo 4: $\begin{cases}(x-1)^2+y^2-z=0,\\ x^2+y^2+z^2-1=0.\end{cases}$

Decidir si este sistema se puede resolver respecto a x, i.e., si existen $y=y(x)$ y $z=z(x)$. Calcula $y'(x)$ y $z'(x)$ donde se pueda.

Supongamos que tenemos la ecuación $f(x) = y$ y queremos resolverla. Para ello la reescribiremos de la forma $F(x, y) = f(x) - y = 0$. Lo que queremos es saber si esta ecuación es resoluble respecto a x, i.e., si existe una función $x = g(y)$ de forma tal que $F(g(y), y) = 0$ para todo y de cierto intervalo dado.

Teorema de la función inversa

Supongamos que tenemos la ecuación $f(x) = y$ y queremos resolverla. Para ello la reescribiremos de la forma $F(x, y) = f(x) - y = 0$. Lo que queremos es saber si esta ecuación es resoluble respecto a x, i.e., si existe una función $x = g(y)$ de forma tal que $F(g(y), y) = 0$ para todo y de cierto intervalo dado.

Si en el intervalo I_y existe la solución definiendo I_x el conjunto de las x tales que $x = g(y)$ tendremos dos funciones $f(x)$ y $g(y)$ que son mutuamente inversas. Es decir, encontrando las condiciones que nos permiten resolver la ecuación $F(x, y) = 0$ respecto a x, sabremos en que condiciones $f(x)$ es invertible.

Supongamos que tenemos la ecuación $f(x) = y$ y queremos resolverla. Para ello la reescribiremos de la forma $F(x, y) = f(x) - y = 0$. Lo que queremos es saber si esta ecuación es resoluble respecto a x, i.e., si existe una función $x = g(y)$ de forma tal que $F(g(y), y) = 0$ para todo y de cierto intervalo dado.

Si en el intervalo I_y existe la solución definiendo I_x el conjunto de las x tales que $x = g(y)$ tendremos dos funciones $f(x)$ y $g(y)$ que son mutuamente inversas. Es decir, encontrando las condiciones que nos permiten resolver la ecuación $F(x, y) = 0$ respecto a x, sabremos en que condiciones $f(x)$ es invertible.

Pero eso es justo lo que nos afirma el Teorema de la función implícita.

Para resolver la ecuación $f(x) - y = F(x, y) = 0$ respecto a x es suficiente que:

F sea $C^{(p)}(A)$, con A cierto entorno abierto de cierto (x_0, y_0) que satisface la ecuación $f(x_0) = y_0$

$F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0) \neq 0$

Entonces el TFI nos dice que existe en un entorno $V(y_0)$ de y_0 cierta función $x = g(y)$ tal que $F(g(y), y) = 0 \Rightarrow f(g(y)) = y$ y además g es $C^{(p)}(V(y_0))$ y su derivada se expresará por

$$g'(y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Teorema (de la función inversa)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ *definida en un entorno del punto* $x_0 \in A$ *tal que*

1. $f(x) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $f(x_0) = y_0$, *en* x_0,
3. $f'(x_0)$ *es una aplicación invertible.*

Entonces existe un entorno abierto $U(x_0) \subset A$ *de* $x_0 \in A$ *y otro* $V(y_0) \subset f(A)$ *de* $y_0 \in f(A)$ *tal que* f *es invertible en* $U(x_0)$, *i.e., existe su inversa* $f^{-1} : V(y_0) \mapsto U(x_0)$, $f \in C^{(p)}(V(y_0))$, *además, para todo* $x \in U(x_0)$ *e* $y = f(x) \in V(y_0)$ *se tiene que* $(f^{-1}(y))' := Df^{-1}(y) = [f'(x)]^{-1} := [Df(x)]^{-1}$.

Teorema de la función inversa: Ejemplos

Sea la función $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ definida por $y = f(x) = Ax$, donde A es una matriz real $n \times n$. Es obvio que f es $C^{(p)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Podemos además tomar cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y definir $y = Ax$.

La derivada (total) de f es la matriz A. Entonces si A es invertible (o equivalentemente, si el Jacobiano de f, que es $\det A$ es diferente de cero), entonces f es invertible. Además $Df^{-1} = [Df]^{-1}$, i.e., $[Df(x)]^{-1} = A^{-1}$.

Sea la función $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ definida por $y = f(x) = Ax$, donde A es una matriz real $n \times n$. Es obvio que f es $C^{(p)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Podemos además tomar cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y definir $y = Ax$.

La derivada (total) de f es la matriz A. Entonces si A es invertible (o equivalentemente, si el Jacobiano de f, que es $\det A$ es diferente de cero), entonces f es invertible. Además $Df^{-1} = [Df]^{-1}$, i.e., $[Df(x)]^{-1} = A^{-1}$.