

Diferenciación en \mathbb{R}^n : Derivadas de orden superior

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

Derivadas de orden superior

Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, A es un abierto de \mathbb{R}^n tiene derivadas parciales $D_i f = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ en A , $i = 1, \dots, n$.

Derivadas de orden superior

Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, A es un abierto de \mathbb{R}^n tiene derivadas parciales $D_i f = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ en A , $i = 1, \dots, n$. Supongamos que dichas derivadas parciales $D_i f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ admiten a su vez derivadas parciales $D_j(\cdot)$ en A . Dichas derivadas parciales se denominan derivadas parciales de segundo orden y se denotan por

$$D_j(D_i f)(x) = D_{j,i} f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Derivadas de orden superior

Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, A es un abierto de \mathbb{R}^n tiene derivadas parciales $D_i f = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ en A , $i = 1, \dots, n$. Supongamos que dichas derivadas parciales $D_i f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ admiten a su vez derivadas parciales $D_j(\cdot)$ en A . Dichas derivadas parciales se denominan derivadas parciales de segundo orden y se denotan por

$$D_j(D_i f)(x) = D_{j,i} f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Si las funciones $D_{j,i} f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ admiten derivadas parciales entonces podemos definir las derivadas parciales de orden 3

$$D_k(D_j(D_i f))(x) = D_{k,j,i} f(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Y así, sucesivamente.

Derivadas de orden superior

Una pregunta natural es si las derivadas cruzadas son iguales, i.e.,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Veamos un ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Derivadas de orden superior

Una pregunta natural es si las derivadas cruzadas son iguales, i.e.,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Veamos un ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Derivadas de orden superior

Una pregunta natural es si las derivadas cruzadas son iguales, i.e.,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Veamos un ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

¿Qué ocurre en $(0, 0)$?

Derivadas de orden superior

Una pregunta natural es si las derivadas cruzadas son iguales, i.e.,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Veamos un ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

¿Qué ocurre en $(0, 0)$?

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = 1,$$

Derivadas de orden superior

Una pregunta natural es si las derivadas cruzadas son iguales, i.e.,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Veamos un ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

¿Qué ocurre en $(0, 0)$?

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = -1.$$

Theorem (Schwarz)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con A abierto, y sea $x_0 \in A$. Si en A existen las derivadas parciales $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ y $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ y la derivada

$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ es continua en x_0 , entonces en A existe la derivada $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$

$$\text{y } \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Theorem (Schwarz)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con A abierto, y sea $x_0 \in A$. Si en A existen las derivadas parciales $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ y $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ y la derivada

$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ es continua en x_0 , entonces en A existe la derivada $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$

$$\text{y } \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Corolario (Bonnet)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con A abierto, y sea $a \in A$ tal que existen las derivadas parciales $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ y $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ en un entorno de $a \in A$ y

ambas son continuas en a . Entonces $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Theorem (Heffter-Young)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, A abierto y sea $a \in A$. Supongamos que existen las derivadas parciales $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, y $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ en un entorno de a y son diferenciables en a . Entonces $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Theorem (Heffter-Young)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, A abierto y sea $a \in A$. Supongamos que existen las derivadas parciales $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, y $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ en un entorno de a y son diferenciables en a . Entonces $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Tanto el Teorema de Schwarz como el de Heffter-Young dan condiciones suficientes. Para comprobarlo escojamos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función cumple con las condiciones de ambos teoremas en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y), \forall y \in \mathbb{R}\}$. Veamos que ocurre $(0, 0)$.

Definición

Diremos que $f \in C^{(k)}(A)$ si f admite todas las derivadas parciales hasta orden k y estas son continuas en A .

Definición

Diremos que $f \in C^{(k)}(A)$ si f admite todas las derivadas parciales hasta orden k y estas son continuas en A .

Supongamos que la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en A . Entonces podemos definir la función derivada (diferencial) de f en A , $Df : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ denota al espacio de todas las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m .

Definición

Diremos que $f \in C^{(k)}(A)$ si f admite todas las derivadas parciales hasta orden k y estas son continuas en A .

Supongamos que la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en A . Entonces podemos definir la función derivada (diferencial) de f en A , $Df : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ denota al espacio de todas las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m .

Diremos que f es dos veces diferenciable en un punto $a \in A$ si la función Df anterior es diferenciable en a y denotaremos a la derivada segunda de f en a por $D^2f(a)$. Nótese que de lo anterior se sigue que $D^2f(a)$ es una aplicación lineal de \mathbb{R}^n en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Definición

Diremos que $f \in C^{(k)}(A)$ si f admite todas las derivadas parciales hasta orden k y estas son continuas en A .

Supongamos que la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en A . Entonces podemos definir la función derivada (diferencial) de f en A , $Df : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ denota al espacio de todas las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m .

Diremos que f es dos veces diferenciable en un punto $a \in A$ si la función Df anterior es diferenciable en a y denotaremos a la derivada segunda de f en a por $D^2f(a)$. Nótese que de lo anterior se sigue que $D^2f(a)$ es una aplicación lineal de \mathbb{R}^n en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Este procedimiento se puede extender obteniéndose la derivada tercera $D^3f(a)$ que es una aplicación lineal de \mathbb{R}^n en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, y así sucesivamente.

Veamos que ocurre en el caso especial (y de gran importancia en las aplicaciones) de la segunda derivada. **Asumiremos que $f \in C^2(A)$ y $a \in A$.**

Como ya hemos mencionado $D^2f(a)$ es una aplicación lineal de \mathbb{R}^n en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, i.e., $D^2f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, pero el **espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$** es **isométrico** al espacio de las aplicaciones bilineales **$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$** .

Por tanto, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ tenemos $D^2f(a)(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $(D^2f(a)(x))(y) \in \mathbb{R}^m$. Es decir, $D^2f(a)$ se puede considerar como la aplicación bilineal $D^2f(a)$ definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por $D^2f(a)(x, y) = (D^2f(a)(x))(y)$.

Derivadas de orden superior. Caso $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Si f es dos veces diferenciable en a , $D^2f(a)$ puede ser interpretada como una aplicación bilineal $B(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} .

Derivadas de orden superior. Caso $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Si f es dos veces diferenciable en a , $D^2f(a)$ puede ser interpretada como una aplicación bilineal $B(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} .

Las aplicaciones bilineales $B(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} se identifican con las matrices $n \times n$ mediante la expresión $B(x, y) = x \cdot B \cdot y^T$.

Derivadas de orden superior. Caso $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Si f es dos veces diferenciable en a , $D^2f(a)$ puede ser interpretada como una aplicación bilineal $B(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} .

Las aplicaciones bilineales $B(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} se identifican con las matrices $n \times n$ mediante la expresión $B(x, y) = x \cdot B \cdot y^T$.

Como $D^2f(a)$ se obtiene “derivando” Df entonces la matriz asociada a $D^2f(a)$ tiene por entradas las segundas derivadas parciales de f :

$$D^2f(a) = \begin{pmatrix} D_{11}f(a) & \cdots & D_{n1}f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n}f(a) & \cdots & D_{nn}f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} := H_f(a).$$

Es conveniente mencionar que al ser $f \in C^2(A)$, todas las derivadas cruzadas son iguales. La matriz $H_f(a)$ anterior se denomina **matriz hessiana** de f .

Por inducción es posible probar que si f es k veces diferenciable en a entonces la derivada (diferencial) k -ésima de f aplicada a un vector $h \in \mathbb{R}^n$ se expresa por

$$\begin{aligned} D^k f(a)(h) &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k} = \\ &= \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(a), \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación $D^k f(a)(h) := D^k f(a)(h, h, \dots, h)$ (recuérdese que $D^k f(a)$ es una aplicación multilineal (k -lineal concretamente).

Ejemplo: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^k(A)$. Sea la función $l : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, $l(x) = x + th$, $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$. Definamos la función compuesta $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\phi(t) = (f \circ l)(t)$. Como f y l son diferenciables con todas sus derivadas hasta orden k continuas entonces $\phi \in C^k([0, 1])$. Calculemos las derivadas sucesivas de ϕ ,

$$\phi'(t) = Df(x + ht) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x + ht)}{\partial x_i} h_i$$

Ejemplo: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^k(A)$. Sea la función $l : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, $l(x) = x + th$, $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$. Definamos la función compuesta $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\phi(t) = (f \circ l)(t)$. Como f y l son diferenciables con todas sus derivadas hasta orden k continuas entonces $\phi \in C^k([0, 1])$. Calculemos las derivadas sucesivas de ϕ ,

$$\phi'(t) = Df(x + ht) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x + ht)}{\partial x_i} h_i$$

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x + ht)}{\partial x_i} h_i \right] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x + ht)}{\partial x_i} h_i \right] h_j = \\ & \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x + ht)}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j \end{aligned}$$

⋮

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f(x + ht)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k} =$$
$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(x + ht).$$

⋮

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f(x + ht)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k} =$$
$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(x + ht).$$

El cálculo de la derivada k -ésima arbitraria es muy engorroso, es por ello conveniente usar un paquete de cálculo simbólico (por ejemplo MAXIMA CAS).

⋮

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f(x + ht)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k} =$$
$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(x + ht).$$

El cálculo de la derivada k -ésima arbitraria es muy engorroso, es por ello conveniente usar un paquete de cálculo simbólico (por ejemplo MAXIMA CAS).

Definición

Dado un $a \in A$ y $h \in \mathbb{R}^n$ definiremos al intervalo (cerrado) $[a, a + h]$ como el conjunto (intervalo)

$$[a_1, a_1 + h_1] \times [a_2, a_2 + h_2] \times \cdots \times [a_n, a_n + h_n].$$

Theorem (de Taylor con resto de Lagrange)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $f \in C^k(A)$; $a \in A$; $[a, a + h] \subset A$ para cierto $h \neq 0$:

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!} D^l f(a)(h) + r_k(a, h),$$

$$r_k(a, h) = \frac{1}{k!} D^k f(a + \xi h)(h), \quad \xi \in (0, 1).$$

Theorem (de Taylor con resto de Lagrange)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $f \in C^k(A)$; $a \in A$; $[a, a + h] \subset A$ para cierto $h \neq 0$:

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!} D^l f(a)(h) + r_k(a, h),$$

$$r_k(a, h) = \frac{1}{k!} D^k f(a + \xi h)(h), \quad \xi \in (0, 1).$$

Corolario (Teorema local de Taylor)

En las mismas condiciones del Teorema anterior:

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} D^l f(a)(h) + o(\|h\|^k).$$

El corolario anterior nos indica otra manera de entender la diferenciabilidad en \mathbb{R}^n . Por sencillez, lo mostraremos en el caso de una función dos veces diferenciable. Si f tiene derivadas parciales de orden dos y estas son continuas entonces

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - \frac{1}{2}D^2f(a)(h) = o(\|h\|^2), \quad (*)$$

donde $D^2f(a)(h)$ es la forma bilineal

$$D^2f(a)(h) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} h_{i_1} h_{i_2} = h^T H_f(a) h.$$

Así pues f es dos veces diferenciable si existen la aplicación lineal $Df(a)$ y la bilineal $D^2f(a)$ tales que (*) sea cierta.

Lo anterior es fácilmente generalizable para cualquier $k \geq 3$.

Lo anterior nos indica que podemos restringirnos por simplicidad al caso cuando las funciones $f \in C^k(A)$.

Lo anterior es fácilmente generalizable para cualquier $k \geq 3$.

Lo anterior nos indica que podemos restringirnos por simplicidad al caso cuando las funciones $f \in C^k(A)$.

Así pues diremos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, es k veces diferenciable en a si f es $C^k(A)$ siendo A un abierto tal que $a \in A$, de forma que, por el teorema de Taylor tenemos asegurado que f es k veces diferenciable en A en el sentido antes explicado.

Lo anterior es fácilmente generalizable para cualquier $k \geq 3$.

Lo anterior nos indica que podemos restringirnos por simplicidad al caso cuando las funciones $f \in C^k(A)$.

Así pues diremos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, es k veces diferenciable en a si f es $C^k(A)$ siendo A un abierto tal que $a \in A$, de forma que, por el teorema de Taylor tenemos asegurado que f es k veces diferenciable en A en el sentido antes explicado.

Veamos algunos ejemplos.