Espacios normados, espacios métricos y espacios euclídeos

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

¿Y cómo comenzar el curso?

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad z = f(x,y).$$

¿Y cómo comenzar el curso?

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad z = f(x, y).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = ?$$

$$f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad z = f(x,y).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

Ejemplo 1. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad z = f(x, y).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = ?$$

Ejemplo 1. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si elegimos $y = \alpha x$, $\alpha \neq 0$, con $x \to 0$, está claro que $f(x, \alpha x) = (1 - \alpha^2)/(1 + \alpha^2)$ que depende de la dirección que tomemos, luego no existe el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

¿Y cómo comenzar el curso?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

Ejemplo 2. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

y calculemos $\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = 0$ para todo α, $\alpha \neq 0$, ...

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

Ejemplo 2. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

y calculemos $\lim_{x\to 0} f(x, \alpha x) = 0$ para todo α, $\alpha \neq 0$, ...¿Qué ocurre si elegimos $y = x^2$?

$f(x,x^2) = 1/2 \neq 0$, luego no existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$.

¿Y cómo comenzar el curso?

¿Y ahora qué?

¿Y ahora qué?

Ejemplo 3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{3/2}y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $2|xy| \leq x^2 + y^2$ cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$0 \geq \left| \frac{x^{3/2}y}{x^2+y^2} \right| = |x|^{1/2} \left| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|x|^{1/2} \to 0$$

cuando $(x,y) \to (0,0)$.

¿Y ahora qué?

Ejemplo 3.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x|^{3/2}y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $2|xy|\leq x^2+y^2$ cualesquiera sean $x,y\in\mathbb{R}$, tenemos

$$0\geq\left|\frac{x^{3/2}y}{x^2+y^2}\right|=|x|^{1/2}\left|\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{1}{2}|x|^{1/2}\to 0$$

cuando $(x,y)\to(0,0)$.

Luego deberíamos tener $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

¿Y ahora qué?

Ejemplo 3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{3/2}y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $2|xy| \leq x^2 + y^2$ cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$0 \geq \left| \frac{x^{3/2}y}{x^2+y^2} \right| = |x|^{1/2} \left| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|x|^{1/2} \to 0$$

cuando $(x,y) \to (0,0)$.

Luego deberíamos tener $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. **?????**

¡Necesitamos formalizar estos límites!

$$\Downarrow$$

Espacios métricos, normados y euclídeos

Definición

Sea V un conjunto de elementos sobre el cual están definidas las operaciones suma "$+$" *de dos elementos x, y de V y* multiplicación "$\cdot$" *de un escalar (número real) α por un elemento de V. V es un espacio vectorial si*

1. $\forall x, y \in V$, *el vector suma,* $w = x + y \in V$ *y se cumple que:*
   1. $x + y = y + x$
   2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
   3. *Existe un elemento "nulo" de V, tal que* $x + 0 = 0 + x = x$
   4. *Cualquiera sea el vector x de V, existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que* $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
2. $\forall x \in V$, *el vector* $w = \alpha \cdot x \in V$ *y se cumple que:*
   1. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
   2. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
   3. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
   4. $1 \cdot x = x$

1. El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándard.
2. El conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ de las matrices $m \times n$ cuando la suma de dos matrices y la multiplicación por un escalar es la estándard.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).
2. Sea $k \leq n$. En conjunto $V = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Subespacios vectoriales

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y, vectores de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y, vectores de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Sea $\operatorname{span}(v_1, v_2, ..., v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y, vectores de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

Sea $\mathrm{span}\,(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_p \in V$

Teorema

$\mathrm{span}\,(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *es un subespacio vectorial de V.*

Dicho subespacio vectorial comúnmente se denomina subespacio generado por los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

Conjuntos linealmente independientes

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *se denomina* **linealmente dependiente** *si existen* $x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$ *no todos iguales a cero tales que se verifique la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0.$$

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \operatorname{span}(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Ejemplo 1: Las n columnas $a_1, ..., a_n$ de una matriz invertible $n \times n$, son **li** y además $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Si $A = I_n$, es la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son la *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Ejemplos: $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Definición

Un espacio métrico es un par $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y,$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x),$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$

Definición

Un espacio métrico es un par $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Si escogemos $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, es decir el espacio de las n-tuplas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con la métrica

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

obtenemos un espacio métrico. Esta métrica se suele denominar métrica euclídea.

Ejercicio: Probar que $\mathbb{R}^n$ con la p-métrica

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1,$$

es un espacio métrico.

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ *se denomina espacio normado si para todo* $x \in \mathbb{X}$ *existe un número real denominado norma, y que denotaremos por* $\|x\|$, *que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ *se denomina espacio normado si para todo* $x \in \mathbb{X}$ *existe un número real denominado norma, y que denotaremos por* $\|x\|$, *que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x, y) = \|x - y\|$, esta define a $\mathbb{X}$ como espacio métrico, i.e., todo espacio normado es un espacio métrico. A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ se denomina espacio normado si para todo $x \in \mathbb{X}$ existe un número real denominado norma, y que denotaremos por $\|x\|$, que cumple con las condiciones

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x, y) = \|x - y\|$, esta define a $\mathbb{X}$ como espacio métrico, i.e., todo espacio normado es un espacio métrico. A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

Ejemplo

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *($\mathbb{C}^n$), con la norma* $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$, $p = 2$ *es un espacio normado.*

Espacios normados

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ *se denomina espacio normado si para todo* $x \in \mathbb{X}$ *existe un número real denominado norma, y que denotaremos por* $\|x\|$*, que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x, y) = \|x - y\|$, esta define a $\mathbb{X}$ como espacio métrico, i.e., todo espacio normado es un espacio métrico. A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

Ejemplo

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$, *con la norma* $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$, $p = 2$ *es un espacio normado.* *¿y si* $p \geq 1$*?*

¿Todo espacio métrico es normado?

¿Todo espacio métrico es normado?

NO

¿Todo espacio métrico es normado?

NO

Lema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones

1. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$.

NO

Lema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones

1. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$.

En los espacios normados podemos definir la conv. de sucesiones, suc. de Cauchy, etc. Basta considerarlos como espacios métricos con la métrica ρ inducida por la norma: $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Espacios métricos

¿Para qué sirve la métrica?

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ *es convergente, y lo denotaremos por* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *tal que para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. *En caso contrario diremos que* $(x_n)_n$ *es divergente.*

¿Para qué sirve la métrica?

Definición

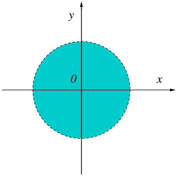
Una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ *es convergente, y lo denotaremos por* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *tal que para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. *En caso contrario diremos que* $(x_n)_n$ *es divergente.*

De ello se sigue que una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{R}^n$ es convergente a $x \in \mathbb{R}^n$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $\|x - x_n\| < \epsilon$.

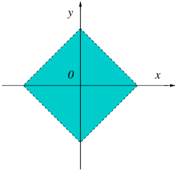
Además se tiene que una sucesión $(x_n)_n$ en $\mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si convergen sus componentes a las componentes del límite.

Definición

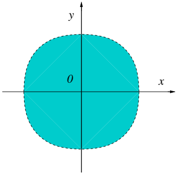
Sea $\mathbb{X}$ *un espacio métrico,* $x_0 \in \mathbb{X}$ *y* $r > 0$*.* $B(x_0, r)$ *es una "bola" si* $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) < r\} \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{X};\ \|x_0 - x\| < r\}$.



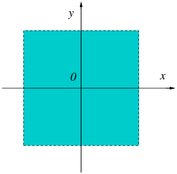
$$\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\|x\| = |x| + |y|$$



$$\|x\| = \sqrt[p]{x^p + y^p},\ p > 2$$



$$\|x\| = \max(|x|, |y|)$$

Definición

Diremos que x *es un punto de acumulación de* M *si en cualquier* $B(x,\epsilon) \subset M$, $\exists x' \in M$, $x' \neq x$, *o equiv., en cada bola* $B(x,\epsilon)$, $\forall \epsilon > 0$ *hay infinitos elementos de* M.

Definición

Diremos que x es un punto de acumulación de M si en cualquier $B(x,\epsilon) \subset M$, $\exists x' \in M$, $x' \neq x$, o equiv., en cada bola $B(x,\epsilon)$, $\forall \epsilon > 0$ hay infinitos elementos de M.

Theorem (Bolzano-Weierstrass)

Todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene un punto de acumulación.

Espacios métricos: Topología

Definición

Diremos que x *es un punto de acumulación de* M *si en cualquier* $B(x,\epsilon)\subset M$, $\exists x'\in M$, $x'\neq x$, *o equiv., en cada bola* $B(x,\epsilon)$, $\forall\epsilon>0$ *hay infinitos elementos de* M.

Theorem (Bolzano-Weierstrass)

Todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ *tiene un punto de acumulación.*

Definición

Dada una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$, *diremos que* $(x_n)_n$ *es acotada si existe un* $x\in\mathbb{X}$ *y un número* $K>0$ *tal que* $\rho(x,x_n)<K$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$.

Espacios métricos: Topología

Definición

Diremos que x es un punto de acumulación de M si en cualquier $B(x, \epsilon) \subset M$, $\exists x' \in M$, $x' \neq x$, o equiv., en cada bola $B(x, \epsilon)$, $\forall \epsilon > 0$ hay infinitos elementos de M.

Theorem (Bolzano-Weierstrass)

Todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene un punto de acumulación.

Definición

Dada una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$, diremos que $(x_n)_n$ es acotada si existe un $x \in \mathbb{X}$ y un número $K > 0$ tal que $\rho(x, x_n) < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos en $\mathbb{R}^2$. Un círculo, elipse, ...

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ *se denomina de Cauchy o fundamental si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$ *y todo* $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ lo son sus componentes, i.e., en $\mathbb{R}^n$ toda sucesión es convergente $\Leftrightarrow$ es de Cauchy. Esta propiedad de $\mathbb{R}^n$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ se denomina de Cauchy o fundamental si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ lo son sus componentes, i.e., en $\mathbb{R}^n$ toda sucesión es convergente $\Leftrightarrow$ es de Cauchy. Esta propiedad de $\mathbb{R}^n$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$.

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{X}$ converge.

Definición

Un espacio normado completo (en la métrica inducida por la norma) se denomina espacio de Banach.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ se denomina de Cauchy o fundamental si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ lo son sus componentes, i.e., en $\mathbb{R}^n$ toda sucesión es convergente $\Leftrightarrow$ es de Cauchy. Esta propiedad de $\mathbb{R}^n$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$.

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{X}$ converge.

Definición

Un espacio normado completo (en la métrica inducida por la norma) se denomina espacio de Banach.

$\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo y además de Banach.

Lema (Lema técnico)

Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ linealmente independientes de un espacio normado $\mathbb{X}$. Entonces, existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|).$$

Demostración: Sea $s = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Si $s = 0$ el lema es trivial así que asumiremos $s > 0$. Dividiendo por s 2 se sigue que 2 es equivalente a probar que si $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes, entonces existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los los escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$, con $\sum_{k=1}^n |\beta_k| = 1$

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geq c.$$

La prueba será por reducción al absurdo.

Prueba del Lema técnico

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el T de B-W de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_1^{(m_j)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$.

Escojamos de cada una de las sucesiones restantes $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 2, \ldots, n$, las subsucesiones definidas por los índices m_j.

Entonces $(\beta_2^{(m_j)})_j$ es acotada y por B-W y podemos extraer una subsucesión convergente $\beta_2^{(j_l)} \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_2$. Además, si escogemos los índices j_l definidos, la subsucesión $(\beta_1^{(j_l)})_j \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$ (¿por qué?).

Prueba del Lema técnico

Continuando este proceso n veces $\Rrightarrow$ $\exists$ una subsucesión de índices l_i t.q. $\beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k \quad \Rrightarrow \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y, \; \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1.$$

De lo anterior se sigue que no todos los $\beta_k = 0$ al mismo tiempo. Como los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son li $\Rrightarrow y \neq 0$ (¿por qué?). La norma es una aplicación continua $\Rrightarrow$

$$\lim_{i\to\infty} y_{l_i} = y \quad \Rrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = \|y\|,$$

pero como $\|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces $\lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = 0$, luego $\|y\| = 0$ de donde se sigue que $y = 0$ lo cual es una contradicción.

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema

Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.

Definición

Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial $\mathbb{X}$ es equivalente a otra norma $\|\cdot\|'$ si existen dos números reales a, b positivos ($a > 0$, $b > 0$) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'.$$

Si dos normas son equivalentes entonces toda sucesión de Cauchy en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ también lo es en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|')$, y viceversa.

Usando el lema técnico se puede probar el siguiente teorema:

Teorema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.

Si dos normas son equivalentes entonces toda sucesión de Cauchy en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ también lo es en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|')$, y viceversa.

Usando el lema técnico se puede probar el siguiente teorema:

Teorema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.

De lo anterior se sigue que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes. En general vamos a usar siempre la norma $\|\cdot\|_2$ conocida como norma 2 o norma euclídea:

$$\|x-y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina compacto si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.

Entenderemos que $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto como subconjunto de $\mathbb{X}$, i.e., cualquier $(x_n)_n$ de elementos de M tiene una subsucesión convergente en M.

Lema

Si $M \subset \mathbb{X}$ es compacto, entonces M es cerrado y acotado.

El recíproco, en general, es falso. No obstante, en el caso de dimensión finita se tiene el siguiente teorema:

Teorema

En un espacio normado $\mathbb{X}$ de dimensión finita (y por tanto en $\mathbb{R}^n$), todo subconjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Definición

Una aplicación (operador) $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *es lineal si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T), \qquad T(\alpha z + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Ejemplos de operadores lineales son:

1. El operador identidad $I : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, tal que $y = Ix = x$ para todo $x \in \mathbb{X}$.
2. El operador nulo $\Theta : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, tal que $y = \Theta x = 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$.
3. El operador derivada D definido por $D : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}$, tal que $y(t) = Dp(t) = p'(t)$, donde $\mathbb{P}$ es el espacio de los polinomios reales $p(t)$ de cualquier grado.
4. El operador $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, tal que $y = Tx = A \cdot x$, donde A es una matriz $n \times m$, x e y son los correspondientes vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente, y $\cdot$ denota la multiplicación usual de matrices.

Definición

Sean $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *dos espacios normados y sea el operador* $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathbb{Y}$ *lineal.* T *es acotado si existe* $c \geq 0$ *tal que*[a]

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

[a] Se sobrentiende que $\|x\|$ es la norma en $\mathbb{X}$ y $\|Tx\|$ es en $\mathbb{Y}$.

Luego, si T es acotado, entonces para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T), \; x \neq 0.$$

Al c más pequeño t.q. se cumple lo anterior lo denotaremos por $\|T\|$ y se denomina *norma de* T.

Definición

Sean $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *dos espacios normados y sea el operador* $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathbb{Y}$ *lineal.* T *es acotado si existe* $c \geq 0$ *tal que*[a]

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

[a] Se sobrentiende que $\|x\|$ es la norma en $\mathbb{X}$ y $\|Tx\|$ es en $\mathbb{Y}$.

Luego, si T es acotado, entonces para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T), \; x \neq 0.$$

Al c más pequeño t.q. se cumple lo anterior lo denotaremos por $\|T\|$ y se denomina *norma de* T. Se puede probar que

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{X}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

y además que define una norma.

Teorema

Toda aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ de un espacio normado de dimensión finita $\mathbb{X}$ en otro espacio normado cualquiera $\mathbb{Y}$ es acotada.

Luego, toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, es acotada.

Espacios normados de dimensión finita

Teorema

Toda aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *de un espacio normado de dimensión finita* $\mathbb{X}$ *en otro espacio normado cualquiera* $\mathbb{Y}$ *es acotada.*

Luego, toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, es acotada.

Está claro que si escogemos una base de $\mathbb{R}^n$ y otra de $\mathbb{R}^n$ a toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ le corresponde una matriz de $n \times m$.

Para terminar esta introducción recordemos la definición de espacios euclídeos.

Definición

Se dice que un espacio vectorial $\mathbb{E}$ *es un espacio euclídeo si dados dos elementos cualesquiera* $x, y \in \mathbb{E}$ *existe un número denominado producto escalar, que denotaremos por* $\langle x, y \rangle$*, tal que*[a]

1. *Para todo* $x, y \in \mathbb{E}$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
2. *Para todo* $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
3. *Para todo* $x, y \in \mathbb{E}$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. *Para todo* $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$, $\langle x, x \rangle > 0$ *y si* $\langle x, x \rangle = 0$, *entonces* $x = 0$.

[a] Si $\mathbb{E}$ es complejo denotaremos por $\overline{z}$ al complejo conjugado de z.

El ejemplo más sencillo de espacio euclídeo es el espacio $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar estándar: dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$, e $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k .$$

Teorema (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Entonces para todos $f, g \in \mathbb{E}$,

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle \langle g, g\rangle .$$

Teorema

Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es normado si en él definimos la norma mediante la fórmula $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Además, $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

De lo anterior se sigue que todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es un espacio métrico con la métrica inducida por el producto escalar mediante la fórmula

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

Así, en $\mathbb{R}^n$ tenemos que la norma inducida por el producto escalar es

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

Definición

Un espacio euclídeo $\mathbb{E}$ completo[a] *se denomina espacio de Hilbert.*

[a] Es decir, un espacio $\mathbb{E}$ donde cualquier sucesión de Cauchy converge a un vector de $\mathbb{E}$ (en la norma inducida por el producto escalar).

Luego $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert.

Una función vectorial de n-variables es una la aplicación $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Está claro que como

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), f_2(x_1, \cdots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$$

para estudiar las propiedades de f podemos restringirnos al estudio de cada una de las componentes de f. Es decir, basta con estudiar las funciones $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.

En adelante asumiremos que $A \in \mathbb{R}^n$ es un abierto.

Definición

Diremos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *tiene límite* l, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *cuando* x *tiende a* a, *punto límite de* A *si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0; \quad \|x - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - l\| < \epsilon.$$

Si además $l = f(a)$ *diremos que* f *es continua en* a.

Definición

Diremos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *tiene límite* l, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *cuando* x *tiende a* a, *punto límite de* A *si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0; \quad \|x - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - l\| < \epsilon.$$

Si además $l = f(a)$ *diremos que* f *es continua en* a.

Está claro que

1. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene límite si y sólo si tienen límite cada una de sus componentes.
2. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si son continuas sus componentes.
3. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene límite (y en particular si es continua) en $x = a$ entonces existe un entorno $B(a, \delta)$ de a donde f es acotada.

Es conveniente hacer notar que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y $f(a) \neq 0$, entonces existe todo un entorno de a donde f mantiene su signo. La prueba es similar al caso de una sola variable y la omitiremos.

Theorem (de Weierstrass para funciones continuas)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función continua en un compacto $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces f es acotada y alcanza los extremos absolutos en A.

Antes de pasar a estudiar la derivación de funciones de varias variables debemos recalcar que el problema de calcular límites en $\mathbb{R}^n$ es *mucho* más complicado que el caso de $\mathbb{R}$. La razón principal es que el $\mathbb{R}$ cuando $x \to a$ sólo hay dos formas de aproximarse a a: por la izquierda o por la derecha, mientras que en $\mathbb{R}^n$ existen una infinidad de maneras (trajectorias) de hacerlo.

Antes de pasar a estudiar la derivación de funciones de varias variables debemos recalcar que el problema de calcular límites en $\mathbb{R}^n$ es *mucho* más complicado que el caso de $\mathbb{R}$. La razón principal es que el $\mathbb{R}$ cuando $x \to a$ sólo hay dos formas de aproximarse a a: por la izquierda o por la derecha, mientras que en $\mathbb{R}^n$ existen una infinidad de maneras (trajectorias) de hacerlo.

Lo que está claro es que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces, independientemente de la forma que nos acerquemos a a, $f(x)$ tiene que acercarse a l. Si resulta que dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cuando nos acercamos a a siguiendo distintas trayectorias obtenemos resultados distintos, entonces f no tiene límite en a.

Antes de pasar a estudiar la derivación de funciones de varias variables debemos recalcar que el problema de calcular límites en $\mathbb{R}^n$ es *mucho* más complicado que el caso de $\mathbb{R}$. La razón principal es que el $\mathbb{R}$ cuando $x \to a$ sólo hay dos formas de aproximarse a a: por la izquierda o por la derecha, mientras que en $\mathbb{R}^n$ existen una infinidad de maneras (trajectorias) de hacerlo.

Lo que está claro es que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces, independientemente de la forma que nos acerquemos a a, $f(x)$ tiene que acercarse a l. Si resulta que dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cuando nos acercamos a a siguiendo distintas trayectorias obtenemos resultados distintos, entonces f no tiene límite en a.

Los límites reiterados: $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ y $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$.

Antes de pasar a estudiar la derivación de funciones de varias variables debemos recalcar que el problema de calcular límites en $\mathbb{R}^n$ es *mucho* más complicado que el caso de $\mathbb{R}$. La razón principal es que el $\mathbb{R}$ cuando $x \to a$ sólo hay dos formas de aproximarse a a: por la izquierda o por la derecha, mientras que en $\mathbb{R}^n$ existen una infinidad de maneras (trajectorias) de hacerlo.

Lo que está claro es que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces, independientemente de la forma que nos acerquemos a a, $f(x)$ tiene que acercarse a l. Si resulta que dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cuando nos acercamos a a siguiendo distintas trayectorias obtenemos resultados distintos, entonces f no tiene límite en a.

Los límites reiterados: $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y)$ y $\displaystyle\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$.

Veamos algunos ejemplos.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f(x,y)=x+y\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$