Espacios normados, espacios métricos y espacios euclídeos

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

¿Y cómo comenzar el curso?

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad z = f(x, y).$$

¿Y cómo comenzar el curso?

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad z = f(x,y).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

¿Y cómo comenzar el curso?

$$f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad z = f(x,y).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

Ejemplo 1. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

¿Y cómo comenzar el curso?

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad z = f(x, y).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) =?$$

Ejemplo 1. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si elegimos $y = \alpha x$, $\alpha \neq 0$, con $x \to 0$, está claro que $f(x, \alpha x) = (1 - \alpha^2)/(1 + \alpha^2)$ que depende de la dirección que tomemos, luego no existe el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

¿Y cómo comenzar el curso?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

¿Y cómo comenzar el curso?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

Ejemplo 2. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

y calculemos $\lim_{x\to 0} f(x, \alpha x) = 0$ para todo α, $\alpha \neq 0$, ...

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

Ejemplo 2. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

y calculemos $\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = 0$ para todo α, $\alpha \neq 0$, ...¿Qué ocurre si elegimos $y = x^2$?

$f(x,x^2) = 1/2 \neq 0$, luego no existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$.

¿Y cómo comenzar el curso?

¿Y ahora qué?

¿Y ahora qué?

Ejemplo 3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{3/2}y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $2|xy| \leq x^2 + y^2$ cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$0 \leq \left| \frac{x^{3/2}y}{x^2+y^2} \right| = |x|^{1/2} \left| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|x|^{1/2} \to 0$$

cuando $(x,y) \to (0,0)$.

¿Y ahora qué?

Ejemplo 3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{3/2}y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $2|xy| \leq x^2 + y^2$ cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$0 \leq \left| \frac{x^{3/2}y}{x^2+y^2} \right| = |x|^{1/2} \left| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|x|^{1/2} \to 0$$

cuando $(x,y) \to (0,0)$.

Luego deberíamos tener $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

¿Y ahora qué?

Ejemplo 3.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x|^{3/2}y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $2|xy|\leq x^2+y^2$ cualesquiera sean $x,y\in\mathbb{R}$, tenemos

$$0\leq\left|\frac{x^{3/2}y}{x^2+y^2}\right|=|x|^{1/2}\left|\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{1}{2}|x|^{1/2}\to 0$$

cuando $(x,y)\to(0,0)$.

Luego deberíamos tener $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. **?????**

¡Necesitamos formalizar estos límites!

$$\Downarrow$$

Espacios métricos, normados y euclídeos

Definición

Sea V un conjunto de elementos sobre el cual están definidas las operaciones suma "$+$" *de dos elementos x, y de V y* multiplicación "$\cdot$" *de un escalar (número real) α por un elemento de V. V es un espacio vectorial si*

1. $\forall x, y \in V$, *el vector suma, $w = x + y \in V$ y se cumple que:*
    1. $x + y = y + x$
    2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
    3. *Existe un elemento "nulo" de V, tal que $x + 0 = 0 + x = x$*
    4. *Cualquiera sea el vector x de V, existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*
2. $\forall x \in V$, *el vector $w = \alpha \cdot x \in V$ y se cumple que:*
    1. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
    2. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
    3. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
    4. $1 \cdot x = x$

Ejemplos de espacios vectoriales

1. El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándard.

2. El conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ de las matrices $m \times n$ cuando la suma de dos matrices y la multiplicación por un escalar es la estándard.

Definición

Sea V *un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto* H *de elementos de* V *es un subespacio vectorial de* V *si* H *es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones* suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que* V.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).

Subespacios vectoriales

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).
2. Sea $k \leq n$. En conjunto $V = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).
2. Sea $k \leq n$. En conjunto $V = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
3. El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y, vectores de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y, vectores de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Sea $\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y, vectores de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Sea $\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$

Teorema

$\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ *es un subespacio vectorial de V.*

Dicho subespacio vectorial comúnmente se denomina subespacio generado por los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Conjuntos linealmente independientes

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *se denomina* **linealmente dependiente** *si existen* $x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$ *no todos iguales a cero tales que se verifique la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0.$$

Importancias de los vectores Ii: Bases

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Importancias de los vectores **li**: Bases

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Ejemplo 1: Las n columnas $a_1, ..., a_n$ de una matriz invertible $n \times n$, son **li** y además $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\,(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Importancias de los vectores **li**: Bases

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Ejemplo 1: Las n columnas $a_1, ..., a_n$ de una matriz invertible $n \times n$, son **li** y además $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\,(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Si $A = I_n$, es la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son la *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Ejemplos: $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\quad \dim C_{[a,b]} = \infty$.

Definición

Un espacio métrico es un par $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Definición

Un espacio métrico es un par $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Si escogemos $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, es decir el espacio de las n-tuplas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con la métrica

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

obtenemos un espacio métrico. Esta métrica se suele denominar métrica euclídea.

Ejercicio: Probar que $\mathbb{R}^n$ con la p-métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1,$$

es un espacio métrico.

Ejercicio: Probar que $\mathbb{R}^n$ con la p-métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \qquad p \geq 1,$$

es un espacio métrico.

Idea: 1. Probar que para todos $u, v \geq 0$ y $1 \leq p < +\infty$ se tiene

$$(u+v)^p = \inf_{t\in(0,1)} \left\{ t^{1-p}u^p + (1-t)^{1-p}v^p ; u, v \geq 0, 0 < t < 1 \right\}.$$

Ejercicio: Probar que $\mathbb{R}^n$ con la p-métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \qquad p \geq 1,$$

es un espacio métrico.

Idea: 1. Probar que para todos $u, v \geq 0$ y $1 \leq p < +\infty$ se tiene

$$(u+v)^p = \inf_{t\in(0,1)} \left\{ t^{1-p} u^p + (1-t)^{1-p} v^p ; u, v \geq 0, 0 < t < 1 \right\}.$$

2. $|x_i + y_i|^p \leq (|x_i| + |y_i|)^p = \cdots$

Espacios normados

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ *se denomina espacio normado si para todo* $x \in \mathbb{X}$ *existe un número real denominado norma, y que denotaremos por* $\|x\|$, *que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Espacios normados

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ *se denomina espacio normado si para todo* $x \in \mathbb{X}$ *existe un número real denominado norma, y que denotaremos por* $\|x\|$, *que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x, y) = \|x - y\|$, esta define a $\mathbb{X}$ como espacio métrico, i.e., todo espacio normado es un espacio métrico. A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

Espacios normados

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ se denomina espacio normado si para todo $x \in \mathbb{X}$ existe un número real denominado norma, y que denotaremos por $\|x\|$, que cumple con las condiciones

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x, y) = \|x - y\|$, esta define a $\mathbb{X}$ como espacio métrico, i.e., todo espacio normado es un espacio métrico. A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

Ejemplo

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *(*$\mathbb{C}^n$*), con la norma* $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$, $p = 2$ *es un espacio normado.*

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ se denomina espacio normado si para todo $x \in \mathbb{X}$ existe un número real denominado norma, y que denotaremos por $\|x\|$, que cumple con las condiciones

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x, y) = \|x - y\|$, esta define a $\mathbb{X}$ como espacio métrico, i.e., todo espacio normado es un espacio métrico. A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

Ejemplo

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$, *con la norma* $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$, $p = 2$ *es un espacio normado.* *¿y si $p \geq 1$?*

¿Todo espacio métrico es normado?

¿Todo espacio métrico es normado?

NO

¿Todo espacio métrico es normado?

NO

Lema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones

1. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$.

NO

Lema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones

1. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$.

Dado que estamos interesados en $\mathbb{R}^n$ que es un espacio normado y y además métrico con la métrica ρ inducida por la norma $\rho(x, y) = \|x - y\|$ en adelante vamos a asumir que $\mathbb{X}$ es un espacio métrico cuya métrica viene inducida por la correspondientes norma.

NO

Lema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones

1. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\rho(x, y)$.

Dado que estamos interesados en $\mathbb{R}^n$ que es un espacio normado y y además métrico con la métrica ρ inducida por la norma $\rho(x, y) = \|x - y\|$ en adelante vamos a asumir que $\mathbb{X}$ es un espacio métrico cuya métrica viene inducida por la correspondientes norma.

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la conv. de sucesiones, suc. de Cauchy, etc.

NO

Lema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones

1. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\rho(x, y)$.

Dado que estamos interesados en $\mathbb{R}^n$ que es un espacio normado y y además métrico con la métrica ρ inducida por la norma $\rho(x, y) = \|x - y\|$ en adelante vamos a asumir que $\mathbb{X}$ es un espacio métrico cuya métrica viene inducida por la correspondientes norma.

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la conv. de sucesiones, suc. de Cauchy, etc.

Ejercicio: Tanto la norma como la métrica son aplicaciones continuas: Si $x_n \to x$ entonces $\|x_n\| \to \|x\|$.

¿Para qué sirve la métrica?

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ **es convergente**, *y lo denotaremos por* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *tal que para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. *En caso contrario diremos que* $(x_n)_n$ *es divergente.*

¿Para qué sirve la métrica?

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ **es convergente**, *y lo denotaremos por* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *tal que para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. *En caso contrario diremos que* $(x_n)_n$ *es divergente.*

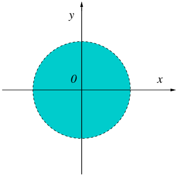
De ello se sigue que una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{R}^n$ es convergente a $x \in \mathbb{R}^n$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $\|x - x_n\| < \epsilon$.

Además se tiene que una sucesión $(x_n)_n$ en $\mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si convergen sus componentes a las componentes del límite.

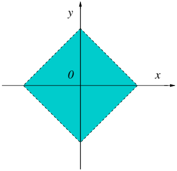
Espacios métricos: entornos o "*bolas*"

Definición

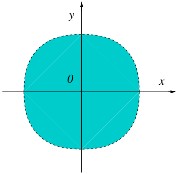
Sea $\mathbb{X}$ *un espacio métrico,* $x_0 \in \mathbb{X}$ *y* $r > 0$*.* $B(x_0, r)$ *es una "bola" si* $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) < r\} \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{X};\ \|x_0 - x\| < r\}$.



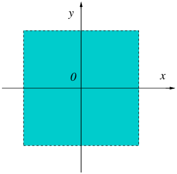
$$\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\|x\| = |x| + |y|$$



$$\|x\| = \sqrt[p]{x^p + y^p},\ p > 2$$



$$\|x\| = \max(|x|, |y|)$$

Definición

Diremos que x es un **punto de acumulación** *(o punto límite) de M si $\forall B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay al menos un elemento de M distinto de x, o equiv., en cada bola $B(x, \epsilon)$, $\forall \epsilon > 0$ hay infinitos elementos de M.*

Definición

Diremos que x es un **punto de acumulación** *(o punto límite) de M si $\forall B(x,\epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay al menos un elemento de M distinto de x, o equiv., en cada bola $B(x,\epsilon)$, $\forall \epsilon > 0$ hay infinitos elementos de M.*

Theorem (Bolzano-Weierstrass)

Todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación.

Definición

Diremos que x es un **punto de acumulación** *(o punto límite) de M si $\forall B(x,\epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay al menos un elemento de M distinto de x, o equiv., en cada bola $B(x,\epsilon)$, $\forall\epsilon > 0$ hay infinitos elementos de M.*

Theorem (Bolzano-Weierstrass)

Todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación.

Definición

Dada una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$, diremos que $(x_n)_n$ es acotada si existe un $x \in \mathbb{X}$ y un número $K > 0$ tal que $\rho(x, x_n) < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición

Diremos que x es un **punto de acumulación** *(o punto límite) de M si $\forall B(x,\epsilon)$, $\epsilon>0$ hay al menos un elemento de M distinto de x, o equiv., en cada bola $B(x,\epsilon)$, $\forall\epsilon>0$ hay infinitos elementos de M.*

Theorem (Bolzano-Weierstrass)

Todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación.

Definición

Dada una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$, diremos que $(x_n)_n$ es acotada si existe un $x\in\mathbb{X}$ y un número $K>0$ tal que $\rho(x,x_n)<K$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Ejemplos en $\mathbb{R}^2$. Un círculo, elipse, ...

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ se denomina de **Cauchy o fundamental** *si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.*

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ lo son sus componentes, i.e., en $\mathbb{R}^n$ toda sucesión es convergente $\Leftrightarrow$ es de Cauchy. Esta propiedad de $\mathbb{R}^n$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ *se denomina de* **Cauchy o fundamental** *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$ *y todo* $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ lo son sus componentes, i.e., en $\mathbb{R}^n$ toda sucesión es convergente $\Leftrightarrow$ es de Cauchy. Esta propiedad de $\mathbb{R}^n$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$.

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ *se denomina completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de* $\mathbb{X}$ *converge.*

Definición

Un espacio normado completo (en la métrica inducida por la norma) se denomina espacio de Banach.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ *se denomina de* **Cauchy o fundamental** *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$ *y todo* $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ lo son sus componentes, i.e., en $\mathbb{R}^n$ toda sucesión es convergente $\Leftrightarrow$ es de Cauchy. Esta propiedad de $\mathbb{R}^n$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$.

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ *se denomina completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de* $\mathbb{X}$ *converge.*

Definición

Un espacio normado completo (en la métrica inducida por la norma) se denomina espacio de Banach.

$\mathbb{R}^n$ **es un espacio métrico completo y además de Banach.**

Lema (Lema técnico)

Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ *linealmente independientes de un espacio normado* $\mathbb{X}$. *Entonces, existe un número real* $c > 0$ *tal que cuales quiera sean los escalares* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|).$$

Demostración: Sea $s = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Si $s = 0$ el lema es trivial así que asumiremos $s > 0$. Dividiendo por s 2 se sigue que 2 es equivalente a probar que si $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes, entonces existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los los escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$, con $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1$

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geq c.$$

La prueba será por reducción al absurdo.

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Prueba del Lema técnico

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el T de B-W de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_1^{(m_j)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$.

Prueba del Lema técnico

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el T de B-W de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_1^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$.

Escojamos de cada una de las sucesiones restantes $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 2, \ldots, n$, las subsucesiones definidas por los índices m_j.

Prueba del Lema técnico

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el T de B-W de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_1^{(m_j)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$.

Escojamos de cada una de las sucesiones restantes $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 2, \ldots, n$, las subsucesiones definidas por los índices m_j.

Entonces $(\beta_2^{(m_j)})_j$ es acotada y por B-W y podemos extraer una subsucesión convergente $\beta_2^{(j_l)} \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_2$. Además, si escogemos los índices j_l definidos, la subsucesión $(\beta_1^{(j_l)})_j \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$ (¿por qué?).

Prueba del Lema técnico

Continuando este proceso n veces $\Rrightarrow$ $\exists$ una subsucesión de índices l_i t.q. $\beta_k^{(l_i)} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \beta_k^{(l_i)} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k \quad \Rrightarrow \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y, \ \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1.$$

Prueba del Lema técnico

Continuando este proceso n veces $\Rightarrow$ $\exists$ una subsucesión de índices l_i t.q. $\beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k \quad \Rightarrow \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y, \ \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1.$$

De lo anterior se sigue que no todos los $\beta_k = 0$ al mismo tiempo. Como los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son li $\Rightarrow y \neq 0$ (¿por qué?). La norma es una aplicación continua $\Rightarrow$

$$\lim_{i\to\infty} y_{l_i} = y \quad \Rightarrow \quad \lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = \|y\|,$$

pero como $\|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces $\lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = 0$, luego $\|y\| = 0$ de donde se sigue que $y = 0$ lo cual es una contradicción.

Espacios normados de dimensión finita

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema

Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.

Definición

Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial $\mathbb{X}$ es equivalente a otra norma $\|\cdot\|'$ si existen dos números reales a, b positivos ($a > 0$, $b > 0$) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'.$$

Si dos normas son equivalentes entonces toda sucesión de Cauchy en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ también lo es en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|')$, y viceversa.

Usando el lema técnico se puede probar el siguiente teorema:

Teorema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.

Espacios normados de dimensión finita

Si dos normas son equivalentes entonces toda sucesión de Cauchy en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ también lo es en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|')$, y viceversa.

Usando el lema técnico se puede probar el siguiente teorema:

Teorema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.

De lo anterior se sigue que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes. En general vamos a usar siempre la norma $\|\cdot\|_2$ conocida como norma 2 o norma euclídea:

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

Espacios normados de dimensión finita

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ *se denomina compacto si cualquier sucesión* $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Entenderemos que $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto como subconjunto de $\mathbb{X}$, i.e., cualquier $(x_n)_n$ de elementos de M tiene una subsucesión convergente en M.

Lema

Si $M \subset \mathbb{X}$ *es compacto, entonces* M *es cerrado y acotado.*

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina compacto si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.

Entenderemos que $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto como subconjunto de $\mathbb{X}$, i.e., cualquier $(x_n)_n$ de elementos de M tiene una subsucesión convergente en M.

Lema

Si $M \subset \mathbb{X}$ es compacto, entonces M es cerrado y acotado.

El recíproco, en general, es falso. No obstante, en el caso de dimensión finita se tiene el siguiente teorema:

Teorema

En un espacio normado $\mathbb{X}$ de dimensión finita (y por tanto en $\mathbb{R}^n$), todo subconjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Para terminar esta introducción recordemos la definición de espacios euclídeos.

Definición

Se dice que un espacio vectorial $\mathbb{E}$ *es un espacio euclídeo si dados dos elementos cualesquiera* $x, y \in \mathbb{E}$ *existe un número denominado producto escalar, que denotaremos por* $\langle x, y \rangle$*, tal que*[a]

1. *Para todo* $x, y \in \mathbb{E}$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
2. *Para todo* $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
3. *Para todo* $x, y \in \mathbb{E}$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. *Para todo* $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$, $\langle x, x \rangle > 0$ *y si* $\langle x, x \rangle = 0$, *entonces* $x = 0$.

[a] Si $\mathbb{E}$ es complejo denotaremos por $\bar{z}$ al complejo conjugado de z.

El ejemplo más sencillo de espacio euclídeo es el espacio $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar estándar: dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$, e $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Teorema (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Entonces para todos $f, g \in \mathbb{E}$,

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle.$$

Teorema

Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ *es normado si en él definimos la norma mediante la fórmula* $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. *Además,* $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Teorema

Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es normado si en él definimos la norma mediante la fórmula $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Además, $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Luego, todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es un espacio métrico con la métrica inducida por el producto escalar mediante la fórmula

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

Así, en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar escalar induce la norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

Teorema

Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ *es normado si en él definimos la norma mediante la fórmula* $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. *Además,* $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Luego, todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es un espacio métrico con la métrica inducida por el producto escalar mediante la fórmula

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

Así, en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar escalar induce la norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

Un espacio euclídeo $\mathbb{E}$ completo se denomina espacio de Hilbert. $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert.

Una función vectorial de n-variables es una la aplicación $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Está claro que como

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), f_2(x_1, \cdots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$$

para estudiar las propiedades de f podemos restringirnos al estudio de cada una de las componentes de f. Es decir, basta con estudiar las funciones $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.

En adelante asumiremos que $A \in \mathbb{R}^n$ es un abierto.

Definición

Diremos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *tiene límite* l, $\lim_{x\to a} f(x)$ *cuando* x *tiende a* a, *punto límite de* A *si*

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0; \quad \|x - a\| < \delta \quad \Rrightarrow \quad \|f(x) - l\| < \epsilon.$$

Si además $l = f(a)$ *diremos que* f *es continua en* a.

Definición

Diremos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *tiene límite* l, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *cuando* x *tiende a* a, *punto límite de* A *si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0; \quad \|x - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - l\| < \epsilon.$$

Si además $l = f(a)$ *diremos que* f *es continua en* a.

Está claro que

1. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene límite si y sólo si tienen límite cada una de sus componentes.
2. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si son continuas sus componentes.
3. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene límite (y en particular si es continua) en $x = a$ entonces existe un entorno $B(a, \delta)$ de a donde f es acotada.

Es conveniente hacer notar que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y $f(a) \neq 0$, entonces existe todo un entorno de a donde f mantiene su signo. La prueba es similar al caso de una sola variable y la omitiremos.

Teorema (de Weierstrass para funciones continuas)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función continua en un compacto $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces f es acotada y alcanza los extremos absolutos en A.

Antes de pasar a estudiar la derivación de funciones de varias variables debemos recalcar que el problema de calcular límites en $\mathbb{R}^n$ es *mucho* más complicado que el caso de $\mathbb{R}$. La razón principal es que el $\mathbb{R}$ cuando $x \to a$ sólo hay dos formas de aproximarse a a: por la izquierda o por la derecha, mientras que en $\mathbb{R}^n$ existen una infinidad de maneras (trajectorias) de hacerlo.

Antes de pasar a estudiar la derivación de funciones de varias variables debemos recalcar que el problema de calcular límites en $\mathbb{R}^n$ es *mucho* más complicado que el caso de $\mathbb{R}$. La razón principal es que el $\mathbb{R}$ cuando $x \to a$ sólo hay dos formas de aproximarse a a: por la izquierda o por la derecha, mientras que en $\mathbb{R}^n$ existen una infinidad de maneras (trajectorias) de hacerlo.

Lo que está claro es que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces, independientemente de la forma que nos acerquemos a a, $f(x)$ tiene que acercarse a l. Si resulta que dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cuando nos acercamos a a siguiendo distintas trayectorias obtenemos resultados distintos, entonces f no tiene límite en a.

Antes de pasar a estudiar la derivación de funciones de varias variables debemos recalcar que el problema de calcular límites en $\mathbb{R}^n$ es *mucho* más complicado que el caso de $\mathbb{R}$. La razón principal es que el $\mathbb{R}$ cuando $x \to a$ sólo hay dos formas de aproximarse a a: por la izquierda o por la derecha, mientras que en $\mathbb{R}^n$ existen una infinidad de maneras (trajectorias) de hacerlo.

Lo que está claro es que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces, independientemente de la forma que nos acerquemos a a, $f(x)$ tiene que acercarse a l. Si resulta que dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cuando nos acercamos a a siguiendo distintas trayectorias obtenemos resultados distintos, entonces f no tiene límite en a.

Los límites reiterados: $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ y $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$.

Antes de pasar a estudiar la derivación de funciones de varias variables debemos recalcar que el problema de calcular límites en $\mathbb{R}^n$ es *mucho* más complicado que el caso de $\mathbb{R}$. La razón principal es que el $\mathbb{R}$ cuando $x \to a$ sólo hay dos formas de aproximarse a a: por la izquierda o por la derecha, mientras que en $\mathbb{R}^n$ existen una infinidad de maneras (trajectorias) de hacerlo.

Lo que está claro es que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces, independientemente de la forma que nos acerquemos a a, $f(x)$ tiene que acercarse a l. Si resulta que dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cuando nos acercamos a a siguiendo distintas trayectorias obtenemos resultados distintos, entonces f no tiene límite en a.

Los límites reiterados: $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y)$ y $\displaystyle\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$.

Veamos algunos ejemplos.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4. $$f(x,y) = \begin{cases} x + y\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$