Teoremas que hay que saber demostrar

Teorema 1 (Equivalencia de las normas en $\mathbb{R}^n$) *Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.*

Teorema 2 (Acotación de las aplicaciones lineales) *Toda aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ de un espacio normado de dimensión finita $\mathbb{X}$ en otro espacio normado cualquiera $\mathbb{Y}$ es acotada.*

Teorema 3 (Regla de la cadena) *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, A, B abiertos tales que $f(A) \subset B$. Supongamos que f es diferenciable en a y g es diferenciable en $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es diferenciable en a y $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$. Lo anterior se puede escribir en coordenadas de la siguiente forma:*

$$D_j(g \circ f)_i(a) = \sum_{k=1}^{m} D_k g_i(f(a)) D_j f_k(a), \qquad \frac{\partial (g \circ f)_i(a)}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i(f(a))}{\partial x_l} \frac{\partial f_l(a)}{\partial x_j}$$

donde $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \cdots, k$. Matricialmente lo anterior se escribe como: $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$ o $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$.

Teorema 4 (Condición suficiente de diferenciabilidad I) *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con A abierto y sea $a \in A$. Supongamos que existen las derivadas parciales de cada una de las componentes de f en a con respecto a cada una de las variables y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a.*

Teorema 5 (del valor medio) *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diferenciable en A abierto y convexo. Sean $a, b \in A$ y sea s el segmento que los une ($s = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\}$). Entonces, para cada vector $v \in \mathbb{R}^m$ existe un punto z en el interior del segmento s tal que*

$$\langle v, f(b) - f(a) \rangle = \langle v, Df(z)(b-a) \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en $\mathbb{R}^m$.

Teorema 6 (Schwarz) *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A abierto, y sea $x_0 \in A$. Si en A existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ y $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ y la derivada $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ es continua en x_0, entonces en $x_0 \in A$ existe la derivada $\dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$ y $\dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$.*

Teorema 7 (Heffter-Young) *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A abierto y sea $a \in A$. Supongamos que existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, y $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ en un entorno de a y son diferenciables en a. Entonces $\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$.*

Teorema 8 (de Taylor con resto de Lagrange) *Supongamos que* $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $f \in C^k(A)$. *Sea* $a \in A$ *y asumamos que el intervalo* $[a, a+h] \subset A$ *para cierto* $h \neq 0$. *Entonces*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!} D^l f(a)(h) + r_k(a,h),$$

donde

$$r_k(a,h) = \frac{1}{k!} D^k f(a+\xi h)(h), \quad \xi \in (0,1).$$

Teorema 9 (de la función implícita) *Sea* $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *definida en un entorno del punto* $(x_0, y_0) \in A$, A *abierto de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. *Supongamos que:*

1. $F(x,y) := F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,

2. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_0) = 0$,

3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0.$

Entonces existe un abierto $I = I_x \times I_y = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k)$[8] *alrededor del punto* (x_0, y_0), $I \subset A$, *y una función* $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ *tal que:*

1. $F(x,y) = 0$ *en* I *si y sólo si* $f(x) = y$,

2. $f(x) \in C^{(p)}(I_x)$.

3. *Para todo* $x \in I_x$, *las derivadas parciales de* $f(x)$ *se calculan por la fórmula*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \frac{\partial f(x_1, \dots x_n)}{\partial x_i} = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_{x_i}(x, f(x))], \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{4.7}$$

donde por F'_{x_i} *denotamos la derivada parcial* $\frac{\partial F}{\partial x_i}$.

Teorema 10 (de la función inversa) *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ *definida en un entorno del punto* $x_0 \in A$ *tal que*

1. $f(x) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,

2. $f(x_0) = y_0$, *en* x_0,

3. $f'(x_0)$ *es una aplicación invertible.*

Entonces existe un entorno abierto $U(x_0) \subset A$ *de* $x_0 \in A$ *y otro* $V(y_0) \subset f(A)$ *de* $y_0 \in f(A)$ *tal que* f *es invertible en* $U(x_0)$, *i.e., existe su inversa* $f^{-1} : V(y_0) \mapsto U(x_0)$, $f \in C^{(p)}(V(y_0))$, *además, para todo* $x \in U(x_0)$ *e* $y = f(x) \in V(y_0)$ *se tiene que* $(f^{-1}(y))' := Df^{-1}(y) = [f'(x)]^{-1} := [Df(x)]^{-1}$.

[8] Análogamente al caso de los intervalos definidos justo antes del Teorema 8, definiremos el abierto $(x_0 - h, x_0 + h)$ como $(x_{01} - h_2, x_{01} + h_1) \times (x_{02} + -h_2, x_{02} + h_2) \times \cdots \times (x_{0n} - h_n, x_{0n} + h_n)$.

Teorema 11 (Condición necesaria de extremo relativo) *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto, $a \in A$. Supongamos que f tiene en a un extremo relativo. Entonces, si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, \ldots, n$ éstas son iguales a cero en a, i.e., $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. En particular si f es diferenciable en a, entonces $Df(a) = 0$.*

Teorema 12 (Condición suficiente de extremo) *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $a \in A$, A abierto, y sea $x = a$ un punto crítico de f, i.e., $Df(a) = 0$. Entonces*

1. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es definida positiva en a, entonces f tiene un mínimo relativo en a.*

2. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es definida negativa, entonces f tiene un máximo relativo en a.*

3. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es indefinida, i.e., si existen $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $D^2 f(a)(x) > 0 > D^2 f(a)(y)$, entonces f tiene un punto de silla en a.*