DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Profesor: Renato Álvarez-Nodarse

1 Proyecto 1.

1.1 Problema 1. El espacio $\mathbb{R}^n$

Prueba que si en $\mathbb{R}^n$ definimos la p-métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad x,y \in \mathbb{R}^n,$$

entonces el par $(\mathbb{R}^n, \rho)$ es un espacio métrico. Deduce de lo anterior que $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado con la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Demuestra que además $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo y por tanto un espacio de Banach. Por último prueba que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico separable.

1.2 Problema 2. Condición suficiente de diferenciabilidad

En clase hemos probado que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto es tal que existen todas sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$ en un entorno de a y son continuas en a, entonces f es derivable en a. Probar la siguiente generalización del teorema anterior:

Teorema (Condición suficiente de diferenciabilidad): Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto, $a \in S$. Si existe la derivada parcial de f en a con respecto a una de las variables y las restantes $n-1$ derivadas parciales existen en un entorno de a y son continuas en a, entonces f es derivable en a. Para funciones con valores en $\mathbb{R}^m$, el teorema se aplica si las hipóesis se suponen sobre las componentes.

1.3 Problema 3. Aplicaciones lineales y continuas

Sea $\mathcal{L}(E,F)$ el conjunto de las aplicaciones lineales entre los espacios normados E y F, $f : E \mapsto F$.

Probar que si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ es una aplicación lineal de E en F, ambos espacios normados, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es continua en E.
(2) f es continua en 0.
(3) Existe una constante $M > 0$ tal que $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$, para todo $x \in E$. Si existe dicha constante se dice que f es acotada.
(4) f está acotada en la bola unidad de E.
(5) f es uniformemente continua en E.

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ es acotada, entonces se define la norma de f, y se denota por $\|f\|$, como el menor valor de M de forma que (3) sea cierta. Prueba que $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. Prueba que efectivamente, la norma así definida es una norma, de donde se deduce que podemos dotar a $\mathcal{L}(E,F)$ de una norma y convertirlo en un espacio normado.

Probar que si E tienes dimensión finita entonces toda aplicación lineal es continua. Si E tiene dimensión infinita entonces hay aplicaciones lineales que no son continuas (busca un contra ejemplo).

2 Proyecto 2.

2.1 Problema: Prueba la versión general del teorema de la función implícita

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ definida en un entorno del punto $(x_0, y_0) \in A$, A abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Supongamos que:

1. $F(x, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $F(x_0, y_0) = 0$,
3. $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ o sea,$F'_y(x, y)$ es una matriz invertible.

Entonces existe un intervalo $I = I_x \times I_y = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k)$ alrededor del punto (x_0, y_0), $I \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}^m$ tal que:

1. $F(x, y) = 0$ en I si y sólo si $f(x) = y$,
2. $f(x) \in C^{(p)}(I_x)$.
3. Para todo $x \in I_x$, las derivadas parciales de $f(x)$ se calculan por la fórmula

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_x(x, f(x))], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se entiende que $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$, i.e., $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1 \cdots, y_m)$.