

1. Introducción a las funciones de varias variables¹. Diferenciación en \mathbb{R}^n

1.1. Espacios métricos, normados y euclídeos

Problema 1.1

Prueba la desigualdad de Young: Dados dos números reales $a, b > 0$ y $p > 1$, entonces,

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1.1)$$

Además la igualdad sólo tiene lugar si $a = b$. **Ayuda:** Encuentra los extremos de la función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, $\alpha \in (0, 1)$ y prueba que $f(x) \leq 0$ para todo $x \geq 0$. Escogiendo $x = a/b$, $a, b > 0$ y $\alpha = 1/p$, $p > 1$ se deduce el resultado.

Problema 1.2

Prueba la desigualdad de Hölder: Sean los números x_i e y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ y $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.2)$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i^p = c y_i^q$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ (es decir si x_i^p y y_i^q son proporcionales). **Ayuda:** Usa la desigualdad de Young.

Problema 1.3

Prueba la desigualdad de Minkowski: Seas los números x_i e y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.3)$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i = c y_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ (es decir si x_i y y_i son proporcionales). **Ayuda:** Usa la desigualdad de Hölder.

Problema 1.4

Usando lo anterior prueba que el espacio $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, es decir el espacio de las n -tuplas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con la métrica

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

es un espacio métrico. Dicho espacio lo denotaremos por \mathbb{R}_p^n . Un ejemplo de especial relevancia es el caso $p = 2$ (métrica euclídea). Lo anterior indica que el espacio \mathbb{R}^n con la métrica euclídea es un espacio métrico.

Problema 1.5 Prueba que si dos elementos x e y de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

La igualdad anterior es una generalización del teorema de Pitágoras.

¹Versión corregida el 14 de noviembre de 2017

Problema 1.6

Sea \mathbb{E} un espacio euclídeo y $\| \cdot \|$ la norma inducida por el producto escalar. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Esta igualdad se suele denominar *ley del paralelogramo*. De hecho se tiene que un espacio normado \mathbb{X} es euclídeo si y sólo si para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Es decir, la ley del paralelogramo caracteriza los espacios euclídeos.

1.2. Límites, continuidad y Diferenciabilidad² en \mathbb{R}^n **Problema 1.7**

Estudiar la existencia de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ en los siguientes casos:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy - x + y}{x + y}, & \text{si } x + y \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} & \text{b) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{y}{x} \operatorname{sen}(x^2 + y^2), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ \text{c) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} & \text{d) } f(x, y) &= \begin{cases} \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), & \text{si } xy \neq 0; \\ (0, 0), & \text{si } xy = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Calcula los siguientes límites

$$\text{e) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} (1 + xy) \frac{2}{x^2 + xy}, \quad \text{f) } \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x + 2y}{x^2 + 2xy + 2y^2}.$$

Problema 1.8

Si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, siendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < x^2\}$, demostrar que existe

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ cuando $(x, y) \in A$. ¿Cuál es su valor? ¿Que ocurre si elegimos $A = \mathbb{R}^2$?

Problema 1.9

a) Prueba que existe el límite de la función $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{y(x - \operatorname{arctang}(x))}{x^4 + y^2}$. ¿Cuál es su valor?

b) Estudia los siguientes límites y calcúlalos en caso de que existan:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 - e^x)(y - \sin y)}{x^2 + y^4} \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|}{|x| + |y|}.$$

Problema 1.10

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones, (definidas como 0 donde no tenga sentido la expresión correspondiente):

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \frac{xy}{|x| + |y|}, & \text{b) } f(x, y) &= \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6}, & \text{c) } f(x, y) &= (x + y) \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{y}, \\ \text{d) } f(x, y) &= \begin{cases} x, & \text{si } |x| \leq |y|, \\ y, & \text{si } |x| > |y|. \end{cases} & \text{e) } f(x, y) &= \frac{x + \operatorname{sen}(x + y)}{x + y}, & \text{f) } f(x, y) &= \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, \\ \text{g) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\tan x - \tan y}, & \text{si } \tan x \neq \tan y, \\ \cos^3 x, & \text{en otro caso,} \end{cases} & (x, y) &\in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

²En los ejercicios propuestos se usa la notación D_1 y D_2 para las derivadas parciales respecto a la primera y segunda variable, respectivamente. En general $D_i f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$.

Problema 1.11

Si $f(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f(0, 0) = 0$, probar que f es diferenciable en el origen, pero ni $D_1 f$ ni $D_2 f$ son continuas en $(0, 0)$.

Problema 1.12

Consideremos la función $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$, si $x + y \neq 0$, $f(x, -x) = 0$. Demostrar que no es diferenciable en el origen. Prueba que la aplicación $u \rightarrow D_u f(0, 0)$ no es lineal, de donde se deduce la no diferenciability de f en $(0, 0)$ (¿por qué?). ¿Es f continua en el origen?

Problema 1.13

Calcular formalmente las derivadas parciales de las funciones compuestas:

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2$; $x = r \operatorname{sen} t$, $y = r \operatorname{cos} t$.
- b) $f(x, y) = \exp xy$; $x = u + v$, $y = u - v$.
- c) $f(x, y) = x^2 - \log y$; $x = \log t$, $y = t^2$.
- d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x = a \operatorname{cos} t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = ct$, con a, b, c constantes dadas.

Problema 1.14

Demostrar que la función $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$, tiene derivadas parciales en el origen, a pesar de ser discontinua en ese punto.

Problema 1.15

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable tal que $\|f(t)\|_2 = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Demostrar que entonces $\nabla f(t) \cdot f(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Problema 1.16

Sea $f(x, y) = \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Calcula las derivadas direccionales de f en $(0, 0)$. La aplicación $u \rightarrow D_u f(0, 0)$, ¿es lineal? ¿Es f continua en $(0, 0)$?

Problema 1.17

Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

estudia su continuidad y diferenciability en el origen. La aplicación $u \rightarrow D_u f(0, 0)$ ¿es lineal?

Problema 1.18

Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^a}{x^2 - xy + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ donde $a > 0$, estudia su continuidad y diferenciability.

Problema 1.19

Sea $f(x, y) = (x + y)\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de f en \mathbb{R}^2 .

Problema 1.20

Estudia la continuidad y diferenciabilidad de la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + xy + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Problema 1.21

Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$.

- ¿Se puede definir f en $(0, 0)$ para que sea continua?
- ¿Es entonces f diferenciable en dicho punto?
- ¿Existe $D_u f(0, 0)$ para algún $u \in \mathbb{R}^2$?
- Calcula las derivadas parciales de f .

Problema 1.22

Hallar las ecuaciones del plano tangente a las siguientes superficies:

- $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ en el punto $(2, 1)$,
- $z = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ en $(-1, 1)$,
- $z = \arctan(x^2 + y^2)$ en $(0, 1)$,
- $z = (x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2)$ en $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$,
- $3xyz - z^3 = 1$ en el punto $(0, 1)$.

Problema 1.23

Sea $f(x, y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Demuestra que f es continua en \mathbb{R}^2 , que existen $D_1 f$ y $D_2 f$ en el origen pero f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Problema 1.24

La función $f(x, y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \frac{1}{y}, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0, \end{cases}$ ¿es diferenciable en el origen?

Problema 1.25

- Si $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$, halla las direcciones $u \in \mathbb{R}^2$ para las que existe $D_u f(0, 0)$.
- Si $f(x, y, z) = |x + y + z|$, ¿para qué direcciones $u \in \mathbb{R}^3$ existe $D_u f(1, -1, 0)$?

Problema 1.26

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en (a, b) . Sean $u = (2, 3)$ y $v = (1, 1)$. Supongamos que $D_u f(a, b) = 1$ y $D_v f(a, b) = 2$. Se pide:

- Hallar el gradiente de f en (a, b) .
- Hallar los vectores $u \in \mathbb{R}^2$ para los que $D_u f(a, b) = 6$.
- Calcular $\max\{D_u f(a, b) : \|u\|_2 = 1\}$.

Problema 1.27

Estudia la diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sen}(y) - y \operatorname{sen}(x)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Problema 1.28

Sea $f(x, y) = \frac{1 - \cos xy}{y^2}$ si $y \neq 0$.

- a) ¿Como definir f en $y = 0$ para hacerla continua?
- b) Calcula las derivadas parciales de f y prueba que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Problema 1.29

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^a}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$, donde $a > 1$. Estudia la continuidad y diferenciabilidad de f en \mathbb{R}^2 .

Problema 1.30

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$.

- a) Probar que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
- b) ¿Es f dos veces diferenciable en el origen?

Problema 1.31

Para $a > 0$ se define la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|\operatorname{sen}(x)|^a \operatorname{arctang}(xy)}{x\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Demuestra que para todo $a > 0$, f es continua en $(0, 0)$.
- (b) Para $a = 1$, da explícitamente el valor de $D_u f(0, 0)$, donde u es un vector de \mathbb{R}^2 con $\|u\| = 1$.
- (c) Para $a = 1$ ¿es f diferenciable en $(0, 0)$? Razona la respuesta.
- (d) Demuestra que para $a > 1$ f es diferenciable en $(0, 0)$.

Problema 1.32

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es homogénea de grado m si $f(tx) = t^m f(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$ tal que $tx \in U$. Probar que si f es diferenciable entonces verifica la ecuación de Euler, $mf(x) = \sum_{i=1}^n x_i D_i f(x)$.

Demostrar también el recíproco, es decir, si f satisface la ecuación de Euler en un abierto, entonces debe ser homogénea en él.

1.3. Derivadas de orden superior³

Problema 1.33

Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{si } x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0, \end{cases}$$

estudia la continuidad y diferenciabilidad de f . Calcula, caso de que existan, las derivadas parciales de segundo orden de f . Analiza el punto $(0, 0)$ de forma independiente.

³En los ejercicios propuestos se usa la notación D_{ij} para las derivadas parciales de orden dos respecto a las variables x_j y la variable x_i , respectivamente. Así, $D_{ij} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$. Concretamente $D_{12} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $D_{21} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Problema 1.34

Se considera la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(\frac{x-y}{x+y} \right), & \text{si } x+y \neq 0; \\ 0, & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

Estudia la continuidad y diferenciabilidad de esta función. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

Problema 1.35

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Probar que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
- Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.
- ¿Es la función f dos veces diferenciable en \mathbb{R}^2 ? Razone la respuesta.

Problema 1.36

Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y}, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

¿En qué puntos de \mathbb{R}^2 verifica las hipótesis del teorema de Heffter-Young sobre igualdad de derivadas cruzadas? En los puntos en que no se verifican, ¿se verifica la tesis del teorema?

Problema 1.37

Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcular en valor de las segundas derivadas cruzadas en $(0,0)$. ¿Se verifican las hipótesis del teorema de Heffter-Young? ¿Y las del teorema de Schwarz?

Problema 1.38

Consideramos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(xy) - xy}{x^2 y}, & \text{si } x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de f en \mathbb{R}^2 .
- Calcula las derivadas parciales de primer orden de f .
- ¿Es f diferenciable en el origen?
- Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

Problema 1.39

Hallar todas las derivadas parciales hasta el orden 2 inclusive de las siguientes funciones

$$\text{a) } f(x, y) = x^3y^2 + y^3 - 5xy, \quad \text{b) } f(x, y) = \text{sen}(xy), \quad f(x, y, z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2).$$

b) Usando lo anterior escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el origen para cada una de las funciones anteriores.

Problema 1.40

Si $f(x, y) = x \text{sen } y + y \text{sen } x$, da un desarrollo de Taylor de orden 8 en el origen.

Utilizar la fórmula de Taylor para desarrollar las siguientes funciones (hasta orden dos) en los puntos indicados:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3 + y^2 + xy^2 \quad \text{en } (1, 2), \\ g(x, y) &= \log(x + y) \quad \text{en } (1, 1), \\ h(x, y, z) &= e^{a(x+y+z)} \quad \text{en } (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Problema 1.41

Comprobar que cada una de las siguientes funciones verifica la ecuación indicada (se usa la notación $D_x z = \frac{\partial z}{\partial x}$, etc.):

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) = e^{xy} + \text{sen}(x + y) &\Rightarrow xD_x f(x, y) - yD_y f(x, y) = (x - y) \cos(x + y), \\ \text{b) } f(x, y) = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b &\Rightarrow D_x f(x, y)D_y f(x, y) = xD_x f(x, y) + yD_y f(x, y), \\ \text{c) } f(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b &\Rightarrow \Delta f = D_{xx} f(x, y) + D_{yy} f(x, y) = 0. \end{aligned}$$

1.4. Miscelánea**Problema 1.42**

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = |y|^\alpha \tan x$, $\alpha > 0$.

1. Calcula $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
2. ¿Para qué valores de α f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}}$?
3. Calcula sus derivadas parciales de f .
4. ¿Para que valores de α f es diferenciable en $(0, 0)$? Justifica la respuesta y calcula la derivada total de f en $(0, 0)$ si existe.
5. Calcula la derivada total de f en $(1, \pi)$.

Problema 1.43

Sea la función $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = x^2 + ye^{xz}$.

1. Decide si g es diferenciable en \mathbb{R}^2 . Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. ¿Cuánto vale la derivada g en el punto $(1, 2, 0)$ según la dirección del vector $(3/4, \sqrt{3}/2, 1/2)$.
4. ¿En que dirección es máxima la variación de g en dicho punto $(1, 2, 0)$? ¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = g(x, y, z)$ en el punto $(1, 2, 0)$.
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1, 2, 0)$.

Problema 1.44

Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha \arctan y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Demuestra que para $\alpha > 0$, la función f es continua en $(0, 0)$.
- Para $\alpha > 0$, escribe el valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- Demuestra que f es diferenciable en $(0, 0)$ cuando $\alpha > 1$.
- ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$, cuando $\alpha = 1$? Razona la respuesta.

Problema 1.45

Estudia el siguiente límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(x - \sin x)}{x^4 + y^2}$ y calcúlalo caso de que exista.

Problema 1.46

Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = (x \cos(y^2 + 1) + y \sin(ze^x))e^z$.

- Decide si f es diferenciable en \mathbb{R}^3 . Justifica la respuesta.
- Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
- En caso de ser diferenciable escribe la derivada total de f en un punto (x, y, z) .
- ¿Cuánto vale la derivada f en el punto $(0, 1, -1)$ según la dirección del vector $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.
- Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = f(x, y, z)$ en el punto $(0, 1, -1)$.
- Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0, 1, -1)$.

Problema 1.47

Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)|y|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Decide si para $\alpha > -1$, la función f es continua en $(0, 0)$.
- Para $\alpha > 0$, escribe el valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- Demuestra que f es diferenciable en $(0, 0)$ cuando $\alpha > 0$.
- ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$, cuando $\alpha = 0$? Razona la respuesta.

Problema 1.48

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 \cos y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

- Prueba que f es continua en todo su dominio.

2. Encuentra las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en \mathbb{R}^2 .
3. Prueba que la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(0,0) = u_1^3$ cualquiera sea el vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$.
4. Decide si f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
5. En caso que f sea diferenciable en $(1, \frac{\pi}{2})$, calcula el vector gradiente $\nabla f(1, \frac{\pi}{2})$.
6. Usando el apartado anterior si es necesario escribe la ecuación del plano tangente a la función $f(x,y)$ en el punto $(1, \frac{\pi}{2})$.

Problema 1.49

Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4 + y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

- a) Demostrar que $4x^4y^2 \leq (x^4 + y^2)^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Deducir que f es continua en \mathbb{R}^2 .
- b) Si $0 \leq t \leq 2\pi$ y $r > 0$, sea $g_t(r) = f(r \cos t, r \sin t)$.
Probar que $g_t(0) = g'_t(0) = 0$; $g''_t(0) = 2$.
- c) Deducir que la restricción de f a cada recta que pasa por el origen de coordenadas tiene un mínimo local estricto en $(0,0)$, pero tal punto no es mínimo local de f .

Problema 1.50

Para $a > 0$ se define la función $f : (-1, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)y^a}{\operatorname{sen}(y)\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

- (a) Demuestra que para todo $a > 1$, f es continua en $(0,0)$.
- (b) Para $a = 1$, da explícitamente el valor de $D_u f(0,0)$, donde u es un vector de \mathbb{R}^2 de norma euclídea igual a 1.
- (c) Para $a = 2$ ¿es f diferenciable en $(0,0)$? Razona la respuesta.
- (d) Demuestra que para $a > 2$ f es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 1.51

Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{|x|^\alpha \cos(x) \arcsin(xy)}{\sqrt{3x^2 + y^2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Demuestra que para $\alpha > -1$ existe el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.
2. ¿Qué valor ha de tomar f en $(0,0)$ para que sea continua en \mathbb{R}^2 ? Justifica la respuesta
3. Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.
4. ¿Para que valores de α f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de f en $(0,0)$ si existe.
5. ¿Es diferenciable para $\alpha = 0$? Justifica la respuesta.

Problema 1.52

Sea $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y) = \frac{x^2 \cos(y) + y^2 \cos(x)}{2}$.

1. Decide si g es diferenciable en \mathbb{R}^2 . Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$.
3. ¿Cuánto vale la derivada de g en el punto $(0, \pi/4)$ según la dirección del vector $(1, -1)$.
4. ¿En que dirección es máxima la variación de g en dicho punto $(0, \pi/4)$? ¿Y mínima?

5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $z = g(x, y)$ en el punto $(0, \pi/4)$?
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0, \pi/4)$.

Problema 1.53

Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{|x|^\alpha e^{3x^2} \arcsin(2x)}{\sqrt{2x^2 + y^2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Demuestra que si $\alpha > 0$ existe el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ y calcúlalo.
2. ¿Qué valor ha de tomar f en $(0, 0)$ para que sea continua en \mathbb{R}^2 ? Justifica la respuesta
3. Calcula cuando sea posible las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.
4. ¿Para que valores de α f es diferenciable en $(0, 0)$? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de f en $(0, 0)$ si existe.
5. ¿Es diferenciable para $\alpha = 1$? Justifica la respuesta.

Problema 1.54

Sea $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = (y^2 + x^2) e^{z^2-1} - 2 e^{x^2-1} (z^2 + y^2)$.

1. Decide si g es diferenciable en \mathbb{R}^3 . Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. ¿Cuánto vale la derivada g en el punto $(1, 0, 1)$ según la dirección del vector $(3, 4, 0)$.
4. ¿En que dirección es máxima la variación de g en dicho punto $(1, 0, 1)$? ¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = g(x, y, z)$ en el punto $(1, 0, 1)$?
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de g en el punto $(0, 0, 0)$.

Problema 1.55

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $f(x, y) = \frac{|x|^\alpha \cos(2x) \arctan(x)}{\sin(x^2) + \sin(y^2)}$.

1. Encuentra la mayor región de \mathbb{R}^2 donde se pueda definir f .
2. En los puntos donde no esté definida decide si para algún valor de α se puede redefinir de forma que sea continua. Justifica la respuesta
3. Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.
4. Demuestra que para $\alpha > 2$ f es diferenciable en $(0, 0)$? Justifica la respuesta.
5. ¿Es diferenciable para $\alpha = 2$? Justifica la respuesta.

Problema 1.56

Calcula, si es posible, los siguientes límites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 3y^2 + 6xy - 5xy^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x|y|^{3/2})}{|x|^2 + |y|}$$

Problema 1.57

Sea $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{|y|^\alpha \cos(x) \sin(x)}{\sin(x^2) + \sin(y^2)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Demuestra que para $\alpha > 1$ existe el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

2. ¿Qué valor ha de tomar f en $(0, 0)$ para que sea continua en \mathbb{R}^2 ? Justifica la respuesta
3. Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.
4. Demuestra que para $\alpha > 2$ f es diferenciable en $(0, 0)$? Justifica la respuesta.
5. ¿Es diferenciable para $\alpha = 2$? Justifica la respuesta.

Problema 1.58

Sea $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y) = xe^y + ye^x + 2xy$.

1. Decide si g es diferenciable en \mathbb{R}^2 . Justifica la respuesta.
2. Calcula, si es posible, las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$, así como todas las derivadas parciales de orden 2.
3. ¿Cuánto vale la derivada g en el punto $(0, 0)$ según la dirección del vector $(2, 1)$.
4. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0, 0)$.

Problema 1.59

Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{|y|^\alpha e^{2x} \sin(x)}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Demuestra que para $\alpha > 0$ existe el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ y calcúlalo.
2. ¿Qué valor ha de tomar f en $(0, 0)$ para que sea continua en \mathbb{R}^2 ? Justifica la respuesta
3. Calcula cuando sea posible las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.
4. ¿Para que valores de α f es diferenciable en $(0, 0)$? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de f en $(0, 0)$ si existe.
5. ¿Es diferenciable para $\alpha = 1$? Justifica la respuesta.

2. Teoremas de inversión local. Extremos

2.1. Teoremas de la función inversa y de la función implícita

Problema 2.1

a) Calcular las derivadas de las funciones implícitas definidas por

i) $x^2 + y^2 = 1$, $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; ii) $x^3 \log x^2 + y^2 = 0$, $x(0) = 1$.

b) ¿Se puede encontrar una función $x = f(y, z)$ tal que $x^2y + e^x + z = 0$? Razona tu respuesta.

Problema 2.2

Prueba que la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - r^2 = 0$ define una función $z = f(x, y)$ diferenciable en el entorno de cualquier punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 \neq 0$. Encuentra la ecuación de plano tangente a la superficie en dicho punto A . ¿Cómo encontrarías la ecuación del plano en un punto con $z_0 = 0$?

Problema 2.3

Determinar la función implícita g definida en un entorno del punto $(0, 0)$ por $g(0, 0) = 1$, $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x + y) - 2x + y - 2z + 1$ con $z = g(x, y)$. Da un desarrollo de Taylor de orden 2 de g en un entorno de $(0, 0)$.

Problema 2.4

Sea $f(x, y, z, t) = (x^3z + y^3t^2 - 1, 2zt^3 + xy^2)$. Probar que f define una función implícita de clase \mathcal{C}^∞ , $(z, t) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ en un entorno de $(0, 1, 0, 1)$. Calcula $Dh(0, 1)$.

Problema 2.5

Sea la ecuación $e^{z^2-1} + (xe^{y^2} + e^{x^2}y)z - 1 = 0$.

1. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, 0, a)$. ¿Para alguno de dichos puntos la función $z = f(x, y)$ es diferenciable? ¿Cuántas veces? Justifica la respuesta.
2. Calcula, si es posible, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el entorno de los puntos obtenidos en el apartado 1.
3. Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la curva $z = f(x, y)$ en los puntos obtenidos en el apartado 1.

Problema 2.6

Estudiar para qué valores de la constante a , la ecuación $x^2 + y^3 + xy + x^3 + ay = 0$ define y como función implícita de x en un entorno del punto $(0, 0)$. Hallar $y'(0)$. ¿Define la ecuación a x como función implícita de y en un entorno del mismo punto?

Problema 2.7

Probar que existen funciones f y g de clase \mathcal{C}^∞ definidas en un entorno de $(1, 1)$, tales que $f(1, 1) = -1$, $g(1, 1) = 0$ y verificando las ecuaciones:

$$f(x, y)^3 + xg(x, y)^2 + y = 0, \quad g(x, y)^3 + yg(x, y) + f(x, y)^2 = x.$$

Problema 2.8

Probar que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = e^{x+y+z} - 1$, define z como función $z = f(x, y)$, de clase infinito, en un entorno de $(0, 0)$, verificando $f(0, 0) = 0$. Calcular el polinomio de Taylor de $f(x, y)$ en un entorno de $(0, 0)$ hasta los términos de segundo orden inclusive.

Problema 2.9

Sea $f(x, y, z) = x^2y + e^x + z$. Probar que existe una función g diferenciable, definida en un entorno del punto $(1, -1)$ tal que $g(1, -1) = 0$ y $f(g(y, z), y, z) = 0$. Calcula $Dg(1, -1)$.

Problema 2.10

La ecuación $\sin(ax + by + c) + e^{cxyz} + x + 2y = 1$ define z como función implícita de x e y en un entorno del origen. Calcular los valores de las constantes a , b y c que hacen que el desarrollo de Taylor en un entorno de $(0, 0)$ de dicha función implícita tenga los tres primeros términos nulos.

Problema 2.11

Prueba que la ecuación $y^2z + x \log z - x = 0$ define una función dos veces diferenciable $z = f(x, y)$ en el entorno del punto $(1, -1, 1)$. Calcula el polinomio de Taylor de orden dos de dicha función en dicho punto.

Problema 2.12

Si x_1, x_2, x_3 son las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + y_1x^2 + y_2x + y_3$, existe la siguiente relación con los coeficientes:

$$\begin{aligned} y_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3), \\ y_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ y_3 &= -x_1x_2x_3. \end{aligned} \quad (\text{Ecuaciones de Cardano - Vieta})$$

Demostrar que en un entorno de una terna de raíces reales (a, b, c) distintas dos a dos está definida una función de clase C^1 que expresa las raíces en término de los coeficientes. Calcula una de las derivadas parciales de una de las componentes de dicha función.

Problema 2.13

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(u, v) = (e^u + e^v, e^u - e^v)$.

- Determinar los puntos de \mathbb{R}^2 en los que f es localmente invertible.
- ¿Es f globalmente invertible? En caso afirmativo caracterizar la imagen de f y calcular la función inversa f^{-1} .
- Comprobar que las derivadas de f y de f^{-1} en puntos correspondientes son matrices inversas.

Problema 2.14

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^{x+y}, x^2)$.

- ¿En qué puntos es aplicable el teorema de la función inversa. Calcula la derivada de la función inversa local.
- Estudia la inversión global de f en regiones de \mathbb{R}^2 .

Problema 2.15

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (xe^y, xe^{-y})$.

- ¿En qué puntos de \mathbb{R}^2 se puede garantizar la existencia de inversa local?
- ¿Es f inyectiva? En caso negativo, encuentra el mayor subconjunto de \mathbb{R}^2 donde lo es, caracteriza su imagen y da una expresión de f^{-1} .

Problema 2.16

Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$. Probar que f es localmente invertible. Demostrar que en este caso, la función f es globalmente invertible. Calcular su función inversa. Comprobar que las derivadas de f y f^{-1} en puntos correspondientes, son inversas.

Problema 2.17

Sea $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

a) Probar que f es localmente invertible, pero no globalmente, aunque su jacobiano es distinto de 0 siempre.

b) Comprobar que si $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < y < \pi\}$ entonces $f|_U$ es invertible, siendo su inversa continua.

c) Probar que U con la condición anterior es maximal.

Problema 2.18

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (\cosh x \cos y, \sinh x \sin y)$.

a) Estudiar donde es f localmente invertible. ¿Lo es en los puntos $(0, n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$?

b) Si $S = \{(x, y) : x > 0\}$, ¿es f inyectiva en S ?

c) Sea $U = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < 2\pi\}$. Calcular $f(U)$ y ver que $f|_U$ es biyectiva sobre su imagen.

Problema 2.19

Encontrar las expresiones en las nuevas variables de las siguientes expresiones y cambios de variables (se usa la notación $z_x = D_1 z = \frac{\partial z}{\partial x}$, etc.)

- $(x z_x)^2 + (y z_y)^2 = z^2 z_x z_y$ con $x = u \exp(w)$, $y = v \exp(w)$, y $z = w \exp(w)$;
- $z_{xx} - z_{yy} = 0$ con $x = u + v$, $y = u - v$, y $z = w$;
- $z_{xx} - z_y = 0$ con $x = -u/v$, $y = -1/v$, $z = \sqrt{-v} e^{u^2/(4v)} w$;

Problema 2.20

a) Sea $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $u(r, t, z) = (r \cos t, r \sin t, z)$. Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^3 y supuesta conocida $f \circ u$, calcula $D_{11}f + D_{22}f + D_{33}f$.

Problema 2.21

- Escribir el laplaciano de orden dos $\Delta z(x, y) := z_{xx} + z_{yy}$ en las nuevas variables $x = r \cos(\phi)$, $y = r \sin(\phi)$, $z = w$.
- Escribir la ecuación de Laplace $w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0$ en las nuevas variables $x = r \cos(\phi) \sin(\theta)$, $y = r \sin(\phi) \sin(\theta)$, $z = r \cos(\theta)$, siendo la función $w(x, y, z) = w(r, \theta, \phi)$.

2.1.1. Miscelánea**Problema 2.22**

Sea la ecuación $z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$.

- Prueba que la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, -1, 1)$ y que dicha función es una función $C^{(\infty)}(U)$ en dicho U .
- Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
- Escribe el polinomio de Taylor de orden 1 de f en $(0, -1, 1)$.

Problema 2.23

Sea la ecuación $z^3 - xyz + y^2 = 16$.

- Prueba que dicha ecuación define una función $z = f(x, y)$ en cierto entorno U de $(1, 4, 2)$ y que dicha función f es $C^{(p)}(U)$ para todo $p \in \mathbb{N}$.
- Calcula la expresión formal de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un punto (x, y) de U .
- Calcula los valores numéricos de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 4)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 4)$. ¿Cuánto vale la derivada direccional de f en la dirección $(1, -2)$ en dicho punto $(1, 4)$?
- Calcula el valor de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 4)$

Problema 2.24

Sea la ecuación $F(x, y, z) := x^2 y^2 z^2 + \exp(x + y + 2z) + 5y^3 - 4y - 2 = 0$.

- Prueba que la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(-1, 1, 0)$ y que dicha función es una función $C^{(\infty)}(U)$ en dicho U .
- Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
- Calcula la derivada direccional de f en el punto $(-1, 1)$ según la dirección $(1, 1)$. ¿En que dirección dicha derivada direccional es mínima?

Problema 2.25

Sea la ecuación $e^{z^2-1} + (xe^{y^2} + e^{x^2}y)z - 1 = 0$.

- Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, 0, a)$. ¿Para alguno de dichos puntos la función $z = f(x, y)$ es diferenciable? ¿Cuántas veces? Justifica la respuesta.
- Calcula, si es posible, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el entorno de los puntos obtenidos en el apartado 1.
- Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la curva $z = f(x, y)$ en los puntos obtenidos en el apartado 1.

Problema 2.26

Sea la ecuación

$$F(x, y, z) = x^2 e^{-z+y^2+a} + x^2 y^2 z^2 - x^3 y, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- ¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(1, 1, 0)$? Justifica la respuesta.
- ¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(1, 1, 0)$? Justifica la respuesta.
- Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
- Calcula la derivada direccional de f en el punto $(1, 1)$ según la dirección $u = (2, -1)$.
- Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto $(1, 1, 0)$.

Problema 2.27

Sea la ecuación $x^2 z - z^2 x + x \cos(xz^2) - 1 = 0$

- Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(a, b, 0)$. ¿Es para alguno de dichos puntos la función $z = f(x, y)$ diferenciable? ¿Cuántas veces? Justifica la respuesta.
- Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en los puntos anteriores donde sea posible.
- En que dirección es máxima la variación de $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1, 0)$.

Problema 2.28

Sea $F(x, y, z) = x^2 y^2 e^{z^2 + y^2 + x^2 - a} + 4xyz - x^4 - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

1. ¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(1, 2, 0)$? Justifica la respuesta.
2. ¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(1, 2, 0)$? Justifica la respuesta.
3. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
4. Calcula la derivada direccional de f en el punto $(1, 2)$ según la dirección $(-1, 2)$.
5. Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto $(1, 2, 0)$.
6. Escribe la expresión del polinomio de Taylor de orden 1 de $f(x, y)$ alrededor del punto $(1, 2)$.

Problema 2.29

Sea la ecuación $F(x, y, z) = -3xe^{z^2 + y^2 - 1} + x^2 z^2 + 3y^2 z - a = 0$, con $a \in \mathbb{R}$.

1. ¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, 1, 1)$? Justifica la respuesta.
2. ¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, 1, 1)$? Justifica la respuesta.
3. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
4. Calcula la derivada direccional de f en el punto $(0, 1)$ según la dirección $(1, 1)$.
5. Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto $(0, 1, 1)$.

Problema 2.30

Sea la ecuación $F(x, y, z) = x^2 y^2 e^{z^2 + y^2 + x^2 - a} + 4xyz - x^4 - 3 = 0$, con $a \in \mathbb{R}$.

1. ¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(1, 2, 0)$? Justifica la respuesta.
2. ¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(1, 2, 0)$? Justifica la respuesta.
3. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
4. Calcula la derivada direccional de f en el punto $(1, 2)$ según la dirección $(-1, 2)$.
5. Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto $(1, 2, 0)$.
6. Escribe la expresión del polinomio de Taylor de orden 1 de $f(x, y)$ alrededor del punto $(1, 2)$.

2.2. Extremos en \mathbb{R}^n **2.2.1. Extremos libres****Problema 2.31**

Estudiar la existencia de máximos y mínimos locales de las funciones:

$$a) f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad b) f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad c) f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27,$$

$$d) f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2, \quad e) f(x, y) = (x + y) \exp(-x^2 - y^2), \quad f) f(x, y) = \sin x + \cos y.$$

Problema 2.32

Estudiar los extremos relativos de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x, y) = (1 + e^y) \cos(x) - ye^y, \quad \text{b) } f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \quad \text{c) } f(x, y) = xy + x^3 + \frac{1}{2}y^2 + 1.$$

Problema 2.33

Demostrar que la función $g(x, y) = (x + y)e^{-(x+2y)}$ alcanza sus extremos absolutos en $x \geq 0, y \geq 0$. Calcúlos razonadamente.

Problema 2.34

Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y, \\ y(x-1) & \text{si } x > y. \end{cases}$

Demostrar que f alcanza su máximo en el interior del cuadrado donde está definida. Calcular ese máximo y el punto donde se alcanza.

Problema 2.35

Sean $f(x, y) = xe^{x(1+y^2)^2}$ y $g(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$. Estudia sus extremos, tanto relativos como absolutos, en \mathbb{R}^2 .

Problema 2.36

Estudia los extremos relativos y absolutos de la función $f(x, y, z) = x^4 + z^4 - 2(x^2 + z^2) + y^2$

Problema 2.37

Deducir razonadamente que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 8 = 0$ define en un entorno de $(2, 2)$ una función $z = g(x, y)$ que verifica la ecuación y posee un máximo local estricto en dicho punto.

Problema 2.38

Demostrar que si el punto (a, b) verifica la ecuación $xy - \log x + \log y = 0$, $(x, y > 0)$, entonces existe una solución indefinidamente diferenciable $y = f(x)$ que pasa por dicho punto. Probar asimismo que existe un punto (a, b) tal que la solución correspondiente $y = f(x)$ tiene un máximo en a .

2.2.2. Extremos condicionados**Problema 2.39**

Encuentra los extremos de $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ si $2x - y - 3 = 0$. Resuélvelo sustituyendo directamente la y en función de la x mediante la ligadura y por el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.

Problema 2.40

Hallar las distancias máxima y mínima del origen a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 75 = 0$.

Problema 2.41

Calcular los extremos de $f(x, y) = x + y$ sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$. Idem para $f(x, y) = -4x - 3y + 6$ sobre $x^2 + y^2 = 1$.

Problema 2.42

Encuentra los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ sobre la región $x^2 + y^2 \leq 2$. ¿Tiene extremos relativos?

Problema 2.43

Probar que la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$ alcanza extremos absolutos en el recinto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 1\}$. Calcularlos.

Problema 2.44

Hallar la distancia mínima del origen de coordenadas a la cónica de ecuación $x^2 + 3xy + y^2 = 5$. ¿Qué se puede decir de la distancia máxima?

Problema 2.45

- Descomponer un número positivo a en producto de cuatro factores cuya suma sea la menor posible.
- Descomponer un número positivo a en suma de tres términos cuyo producto sea máximo

Problema 2.46

Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.

- Probar que f no tiene ni extremos relativos y ni absolutos.
- Prueba que f tiene extremos absolutos en $A = \{(x, y) : x \geq 1, (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$. Calcularlos razonadamente

Problema 2.47

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$. Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 12, z \leq 1\}$.

- Encuentra todos los puntos críticos de f en M .
- Prueba que f tiene en M extremos absolutos y calcúlalos.

Problema 2.48

Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$, y sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $F(x, y, z) = (1 - z^2)(x - y)$. Prueba que F alcanza extremos absolutos en M y calcúlalos.

Problema 2.49

Sea la curva en \mathbb{R}^3 definida por las ecuaciones $x + y + z = 12$ y $z = x^2 + y^2$.

- Encuentra los puntos más alto y más bajo de dicha curva.
- Encuentra los puntos de la curva más cercano y lejano al origen de coordenadas.

Problema 2.50

Estudiar los extremos de la función $f(x, y, z) = x + y + 2z$ sobre el elipsoide de ecuación $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

Problema 2.51

Sea el paraboloide truncado definido por las ecuaciones $x^2 + y^2 = z$, $z \leq 3$. Encuentra los puntos que estén respectivamente más próximos y más lejos del punto $(3, 3, 1)$.

Problema 2.52

Sea la superficie definida por $x^4 + 2y^2 + 4z^2 = 8$. Encuentra los puntos que estén respectivamente más próximos y más lejos del punto $(0, 0, 3)$.

Problema 2.53

Calcula los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ bajo la condición $x^3y + xy^3 = 2a^4$, $a > 0$.

Problema 2.54

Encuentra los extremos de la función $f(x, y, z) = x + y + z^2$ bajo las ligaduras

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$$

Resuélvelo mediante a) los coeficientes indeterminados de Lagrange y b) sustituyendo los valores de z e y en función de x en la función f .

Problema 2.55

Encontrar los puntos de la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, $6x + 3y + 2z = 6$ que estén respectivamente más próximos y más lejos del origen.

Problema 2.56

Dadas las rectas de ecuaciones

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{7} = z, \quad \frac{x-1}{6} = y = \frac{z-2}{7},$$

hallar la mínima distancia entre ellas.

Problema 2.57

Encuentras los extremos locales (y absolutos caso de que existan) de la función $u = x + y - z$ definida sobre la curva

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 12x + 12y + 12z = 13. \end{cases}$$

Ayuda: Es más fácil encontrar las relaciones entre los diferenciales dx , dy y dz y calcular du y d^2u .

Problema 2.58

Encuentra los puntos de la curva $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ que están más cerca del origen.

2.2.3. Miscelánea**Problema 2.59**

Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 4x$, donde A es la región definida por $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 8, z \leq 1\}$.

1. Calcula todos los puntos críticos de dicha función. Decide, si es posible si son extremos locales.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A ? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f .

Problema 2.60

Sea el conjunto $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 \leq 1\}$ y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = 4x^2 + 2y^4 - y$.

- (a) Encuentra todos los extremos relativos de f en D .
- (b) Prueba que f tiene extremos absolutos en D . Calcúlalos razonadamente.
- (c) ¿Tiene f extremos absolutos en $D \cup \{(x, y) | x \geq 0\}$? Justifica tu respuesta y calcúlalos si procede.

Problema 2.61

Sea la función

$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3,$$

donde A es la región definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0\}.$$

1. Calcula todos los extremos locales de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A ? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f .

Problema 2.62

Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z^2 - 2z + 2y^2 + 4x^2 - 3$, donde A es la región definida por (paraboloide elíptico) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$.

1. Calcula todos los puntos críticos de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A ? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f .

Problema 2.63

1. Dada la elipse de ecuación $x^2 - xy + y^2 = 1$, encuentra los puntos más cercanos y alejados del punto $(2, 2)$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 4y - 4$.
 - a) Decide si f tiene extremos relativos en \mathbb{R}^2 . En caso de que los tenga calcúlalos.
 - b) Decide si f tiene extremos absolutos sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y en caso de tenerlos encuentra dónde se encuentran y cuáles son sus valores.

Problema 2.64

Sea la superficie S de \mathbb{R}^3 definida por $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$.

1. Sea la función $f : S \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x - y + \sqrt{3}z$ definida sobre S . Encuentra todos los puntos críticos de f en S y decide si son extremos locales o puntos de silla.
2. ¿Tiene f extremos absolutos sobre S . Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuétralos.
3. Encuentra, si existen, los puntos de la superficie S más próximos y más alejados del punto $(0, 0, 3)$.

Problema 2.65

Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 4y - 4$.

1. Decide si f tiene extremos relativos en \mathbb{R}^2 . En caso de que los tenga calcúlalos.
2. Sea la elipse de ecuación $2x^2 + 4y^2 = 1$. Decide si f tiene extremos absolutos sobre dicha elipse y en caso de tenerlos encuentra dónde se encuentran y cuál es su valor.

Problema 2.66

Sea la superficie S de \mathbb{R}^3 definida por la fórmula $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$.

1. Sea la función $f : S \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x - y + \sqrt{3}z$ definida sobre S . Encuentra todos los puntos críticos de f en S y decide si son extremos locales o puntos de silla.
2. ¿Tiene f extremos absolutos sobre S . Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuétralos.
3. Encuentra, si existen, los puntos de la superficie S más próximos y más alejados del punto $(0, 0, 3)$.

Se recomienda a los alumnos consultar además los siguientes libros de problemas:

1. Carmona Álvarez, J., Facenda Aguirre, J. A., Freniche Ibáñez, F. J. *Ejercicios de Cálculo Diferencial de varias variables*. Secretariado de Publicaciones. Universidad de Sevilla, 2008.
2. Demidovich, B. *5000 problemas de Análisis Matemático*, Paraninfo, 1980. (Existe una versión de la editorial MIR).
3. Liashkó, I.I. y otros. *Matemática superior. Problemas resueltos (Vol. 3)*. Ed. URSS 1999.
4. Spiegel, M. R. *Variables reales*. Serie Schaum, McGraw-Hill 1969.