1. Introducción a las funciones de varias variables[1]. Diferenciación en $\mathbb{R}^n$

1.1. Espacios métricos, normados y euclídeos

Problema 1.1

Prueba la desigualdad de Young: Dados dos números reales $a, b > 0$ y $p > 1$, entonces,

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\, a + \frac{1}{q}\, b, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.1}$$

Además la igualdad sólo tiene lugar si $a = b$. **Ayuda**: Encuentra los extremos de la función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, $\alpha \in (0, 1)$ y prueba que $f(x) \leq 0$ para todo $x \geq 0$. Escogiendo $x = a/b$, $a, b > 0$ y $\alpha = 1/p$, $p > 1$ se deduce el resultado.

Problema 1.2

Prueba la desigualdad de Hölder: Sean los números x_i e y_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ y $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.2}$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i^p = c\, y_i^q$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (es decir si x_i^p y y_i^q son proporcionales). **Ayuda**: Usa la desigualdad de Young.

Problema 1.3

Prueba la desigualdad de Minkowski: Seas los números x_i e y_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.3}$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i = c\, y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (es decir si x_i y y_i son proporcionales). **Ayuda**: Usa la desigualdad de Hölder.

Problema 1.4

Unsando lo anterior prueba que el espacio $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, es decir el espacio de las n-tuplas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con la métrica

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

es un espacio métrico. Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}^n_p$. Un ejemplo de especial relevancia es el caso $p = 2$ (métrica euclídea). Lo anterior indica que el espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea es un espacio métrico.

Problema 1.5 Prueba que si dos elementos x e y de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

La igualdad anterior es una generalización del teorema de Pitágoras.

[1]Versión corregida el 14 de noviembre de 2017

Problema 1.6

Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo y $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto escalar. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Esta igualdad se suele denominar *ley del paralelogramo*. De hecho se tiene que un espacio normado $\mathbb{X}$ es euclídeo si y sólo si para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Es decir, la ley del paralelogramo caracteriza los espacios euclídeos.

1.2. Límites, continuidad y Diferenciablidad[2] en $\mathbb{R}^n$

Problema 1.7

Estudiar la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ en los siguientes casos:

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy - x + y}{x+y}, & \text{si } x+y \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad b)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}\operatorname{sen}(x^2+y^2), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad d)\ f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right), & \text{si } xy \neq 0; \\ (0,0), & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Calcula los siguientes límites

$$e)\ \lim_{(x,y)\to(0,2)} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}, \qquad f)\ \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+2y}{x^2+2xy+2y^2}.$$

Problema 1.8

Si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, siendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < x^2\}$, demostrar que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ cuando $(x,y) \in A$. ¿Cuál es su valor? ¿Que ocurre si elegimos $A = \mathbb{R}^2$?

Problema 1.9

a) Prueba que existe el límite de la función $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{y(x - \operatorname{arctang}(x))}{x^4 + y^2}$. ¿Cuál es su valor?

b) Estudia los siguientes límites y calcúlalos en caso de que existan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1-e^x)(y - \sin y)}{x^2 + y^4} \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{|x| + |y|}.$$

Problema 1.10

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones, (definidas como 0 donde no tenga sentido la expresión correspondiente):

$$a)\ f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}, \qquad b)\ f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^4+y^6}, \qquad c)\ f(x,y) = (x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{y},$$

$$d)\ f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } |x| \leq |y|, \\ y, & \text{si } |x| > |y|. \end{cases} \qquad e)\ f(x,y) = \frac{x + \operatorname{sen}(x+y)}{x+y}, \qquad f)\ f(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2},$$

$$g)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\tan x - \tan y}, & \text{si } \tan x \neq \tan y, \\ \cos^3 x, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad (x,y) \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

[2]En los ejercicios propuestos se usa la notación D_1 y D_2 para las derivadas parciales respecto a la primera y segunda variable, respectivamente. En general $D_i f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$.

Problema 1.11

Si $f(x,y) = (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(0,0)=0$, probar que f es diferenciable en el origen, pero ni $D_1 f$ ni $D_2 f$ son continuas en $(0,0)$.

Problema 1.12

Consideremos la función $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$, si $x+y \neq 0$, $f(x,-x)=0$. Demostrar que no es diferenciable en el origen. Prueba que la aplicación $u \to D_u f(0,0)$ no es lineal, de donde se deduce la no diferenciabilidad de f en $(0,0)$ (¿por qué?). ¿Es f continua en el origen?

Problema 1.13

Calcular formalmente las derivadas parciales de las funciones compuestas:

a) $f(x,y) = x^2+y^2$; $x = r\operatorname{sen} t$, $y = r\cos t$.
b) $f(x,y) = \exp xy$; $x = u+v$, $y = u-v$.
c) $f(x,y) = x^2 - \log y$; $x = \log t$, $y = t^2$.
d) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $x = a\cos t$, $y = a\cos t$, $z = ct$, con a,b,c constantes dadas.

Problema 1.14

Demostrar que la función $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$, tiene derivadas parciales en el origen, a pesar de ser discontinua en ese punto.

Problema 1.15

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ diferenciable tal que $\|f(t)\|_2 = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Demostrar que entonces $\nabla f(t) \cdot f(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Problema 1.16

a) Sea $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $u(r,t,z) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t, z)$. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^3$ y supuesta conocida $f \circ u$, calcula $D_{11}f + D_{22}f + D_{33}f$.

b) Repetir el ejercicio si ahora es $u(r,s,t) = (r\cos s\operatorname{sen} t, r\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t, r\cos t)$.

Problema 1.17

Sea $f(x,y) = \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0)=0$. Calcula las derivadas direccionales de f en $(0,0)$. La aplicación $u \to D_u f(0,0)$, ¿es lineal? ¿Es f continua en $(0,0)$?

Problema 1.18

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y+\dfrac{x^3 y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

estudia su continuidad y diferenciabilidad en el origen. La aplicación $u \to D_u f(0,0)$ ¿es lineal?

Problema 1.19

Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^a}{x^2-xy+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

donde $a>0$, estudia su continuidad y diferenciabilidad.

Problema 1.20

Sea $f(x,y)=(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$. Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

Problema 1.21

Estudia la continuidad y diferenciabilidad de la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Problema 1.22

Sea $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x^2+y^2)^x$.

a) ¿Se puede definir f en $(0,0)$ para que sea continua?
b) ¿Es entonces f diferenciable en dicho punto?
c) ¿Existe $D_uf(0,0)$ para algún $u\in\mathbb{R}^2$?
d) Calcula las derivadas parciales de f.

Problema 1.23

Hallar las ecuaciones del plano tangente a las siguientes superficies:

a) $z=\dfrac{x^2}{2}-y^2$ en el punto $(2,1)$, b) $z=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(-1,1)$, c) $z=\arctan(x^2+y^2)$ en $(0,1)$,

d) $z=(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)$ en $(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$, e) $3xyz-z^3=1$ en el punto $(0,1)$.

Problema 1.24

Sea $f(x,y)=\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$. Demuestra que f es continua en $\mathbb{R}^2$, que existen D_1f y D_2f en el origen pero f no es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 1.25

La función $f(x,y)=\begin{cases}xy\operatorname{sen}\dfrac{1}{y}, & \text{si } y\neq0,\\ 0, & \text{si } y=0,\end{cases}$ ¿es diferenciable en el origen?

Problema 1.26

a) Si $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$, halla las direcciones $u\in\mathbb{R}^2$ para las que existe $D_uf(0,0)$.

b) Si $f(x,y,z)=|x+y+z|$, ¿para qué direcciones $u\in\mathbb{R}^3$ existe $D_uf(1,-1,0)$?

Problema 1.27

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (a, b). Sean $u = (2, 3)$ y $v = (1, 1)$. Supongamos que $D_u f(a, b) = 1$ y $D_v f(a, b) = 2$. Se pide:

a) Hallar el gradiente de f en (a, b).

b) Hallar los vectores $u \in \mathbb{R}^2$ para los que $D_u f(a, b) = 6$.

c) Calcular $\max\{D_u f(a, b) : \|u\|_2 = 1\}$.

Problema 1.28

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que f es homogénea de grado m si $f(tx) = t^m f(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$ tal que $tx \in U$. Probar que si f es diferenciable entonces verifica la ecuación de Euler, $mf(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i D_i f(x)$. Demostrar también el recíproco, es decir, si f satisface la ecuación de Euler en un abierto, entonces debe ser homogénea en él.

Problema 1.29

Estudia la diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen}(y) - y \operatorname{sen}(x)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Problema 1.30

Sea $f(x, y) = \dfrac{1 - \cos xy}{y^2}$ si $y \neq 0$.

a) ¿Como definir f en $y = 0$ para hacerla continua?
b) Calcula las derivadas parciales de f y prueba que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Problema 1.31

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{x^a}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$, donde $a > 1$. Estudia la continuidad y diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

Problema 1.32

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$.

a) Probar que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
b) ¿Es f dos veces diferenciable en el origen?

Problema 1.33

Para $a > 0$ se define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|\operatorname{sen}(x)|^a \operatorname{arctang}(xy)}{x\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demuestra que para todo $a > 0$, f es continua en $(0, 0)$.
(b) Para $a = 1$, da explícitamente el valor de $D_u f(0, 0)$, donde u es un vector de $\mathbb{R}^2$ con $\|u\| = 1$.
(c) Para $a = 1$ ¿es f diferenciable en $(0, 0)$? Razona la respuesta.
(d) Demuestra que para $a > 1$ f es diferenciable en $(0, 0)$.

1.3. Derivadas de orden superior[3]

Problema 1.34

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y}, & \text{si } x \neq 0,\ y \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0, \end{cases}$$

estudia la continuidad y diferenciabilidad de f. Calcula, caso de que existan, las derivadas parciales de segundo orden de f. Analiza el punto $(0,0)$ de forma independiente.

Problema 1.35

Se considera la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right), & \text{si } x+y \neq 0; \\ 0, & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

Estudia la continuidad y diferenciabilidad de esta función. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

Problema 1.36

Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{y}, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ verifica las hipótesis del teorema de Heffter-Young sobre igualdad de derivadas cruzadas? En los puntos en que no se verifican, ¿se verifica la tesis del teorema?

Problema 1.37

Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \cos \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcular en valor de las segundas derivadas cruzadas en $(0,0)$. ¿Se verificas las hipótesis del teorema de Heffter-Young? ¿Y las del teorema de Schwarz?

Problema 1.38

Consideramos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy) - xy}{x^2 y}, & \text{si } x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
(b) Calcula las deivadas parciales de primer orden de f.
(c) ¿Es f diferenciable en el origen?
(d) Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

[3] En los ejercicios propuestos se usa la notación D_{ij} para las derivadas parciales de orden dos respecto a las variables x_j y la y variable x_i, respectivamente. Así, $D_{ij}f(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\dots,x_n)$. Concretamente $D_{12}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $D_{21}f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Problema 1.39

Hallar todas las derivadas parciales hasta el orden 2 inclusive de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = x^3y^2 + y^3 - 5xy$, b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$, $f(x,y,z) = \exp(x^2+y^2+z^2)$.

Problema 1.40

Si $f(x,y) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$, da un desarrollo de Taylor de orden 8 en el origen.

Utilizar la fórmula de Taylor para desarrollar las siguientes funciones (hasta orden dos) en los puntos indicados:

$$\begin{array}{lll} f(x,y) & = x^3 + y^2 + xy^2 & \text{en} \quad (1,2), \\ g(x,y) & = \log(x+y) & \text{en} \quad (1,1), \\ h(x,y,z) & = e^{a(x+y+z)} & \text{en} \quad (0,0,0). \end{array}$$

Problema 1.41

Comprobar que cada una de las siguientes funciones verifica la ecuación indicada:

$$a) \quad f(x,y) = e^{xy} + \operatorname{sen}(x+y) \quad \Rightarrow \quad xD_xf(x,y) - yD_yf(x,y) = (x-y)\cos(x+y),$$

$$b) \quad f(x,y) = xy + y\sqrt{x^2-a^2} + b \quad \Rightarrow \quad D_xf(x,y)D_yf(x,y) = xD_xf(x,y) + yD_yf(x,y),$$

$$c) \quad f(x,y) = a\ln(x^2+y^2) + b \quad \Rightarrow \quad \Delta f = D_{xx}f(x,y) + D_{yy}f(x,y) = 0.$$

1.4. Miscelánea

Problema 1.42

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Probar que $f \in \mathcal{C}^1(R^2)$.
b) Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.
c) ¿Es la función f dos veces diferenciable en $\mathbb{R}^2$? Razone la respuesta.

Problema 1.43

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = |y|^\alpha \tan x$, $\alpha > 0$.

1. Calcula $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
2. ¿Para qué valores de α f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k\in\mathbb{Z}}$?
3. Calcula sus derivadas parciales de f.
4. ¿Para que valores de α f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta y calcula la derivada total de f en $(0,0)$ si existe.
5. Calcula la derivada total de f en $(1,\pi)$.

Problema 1.44

Sea la función $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + ye^{x\,z}$.

1. Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. ¿Cuánto vale la derivada g en el punto $(1,2,0)$ según la dirección del vector $(3/4, \sqrt{3}/2, 1/2)$.

4. ¿En que dirección es máxima la variación de g en dicho punto $(1, 2, 0)$? ¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = g(x, y, z)$ en el punto $(1, 2, 0)$.
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1, 2, 0)$.

Problema 1.45

Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \arctan y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a). Demuestra que para $\alpha > 0$, la función f es continua en $(0, 0)$.

(b). Para $\alpha > 0$, escribe el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c). Demuestra que f es diferenciable en $(0, 0)$ cuando $\alpha > 1$.

(d). ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$, cuando $\alpha = 1$? Razona la respuesta.

Problema 1.46

Estudia el siguiente límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x - \sin x)}{x^4 + y^2}$ y calcúlalo caso de que exista.

Problema 1.47

Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = (x \cos(y^2 + 1) + y \sin(ze^x))e^z$.

1. Decide si f es diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. En caso de ser diferenciable escribe la derivada total de f en un punto (x, y, z).
4. ¿Cuánto vale la derivada f en el punto $(0, 1, -1)$ según la dirección del vector $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = f(x, y, z)$ en el punto $(0, 1, -1)$.
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0, 1, -1)$.

Problema 1.48

Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)|y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a). Decide si para $\alpha > -1$, la función f es continua en $(0, 0)$.

(b). Para $\alpha > 0$, escribe el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c). Demuestra que f es diferenciable en $(0, 0)$ cuando $\alpha > 0$.

(d). ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$, cuando $\alpha = 0$?. Razona la respuesta.

Problema 1.49

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cos y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

1. Prueba que f es continua en todo su dominio.
2. Encuentra las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$.
3. Prueba que la derivada direccional $D_{\hat{u}} f(0,0) = u_1^3$ cualquiera sea el vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$.
4. Decide si f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
5. En caso que f sea diferenciable en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, calcula el vector gradiente $\nabla f\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Usando el apartado anterior si es neceario escribe la ecuación del plano tangente a la función $f(x,y)$ en el punto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Problema 1.50

Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \dfrac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

a) Demostrar que $4x^4y^2 \leq (x^4+y^2)^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Deducir que f es continua en $\mathbb{R}^2$.

b) Si $0 \leq t \leq 2\pi$ y $r > 0$, sea $g_t(r) = f(r\cos t, r \operatorname{sen} t)$.
Probar que $g_t(0) = g_t'(0) = 0$; $g_t''(0) = 2$.

c) Deducir que la restricción de f a cada recta que pasa por el origen de coordenadas tiene un mínimo local estricto en $(0,0)$, pero tal punto no es mínimo local de f.

Problema 1.51

Para $a > 0$ se define la función $f : (-1, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)y^a}{\operatorname{sen}(y)\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

(a) Demuestra que para todo $a > 1$, f es continua en $(0,0)$.

(b) Para $a = 1$, da explícitamente el valor de $D_u f(0,0)$, donde u es un vector de $\mathbb{R}^2$ de norma euclídea igual a 1.

(c) Para $a = 2$ ¿es f diferenciable en $(0,0)$? Razona la respuesta.

(d) Demuestra que para $a > 2$ f es diferenciable en $(0,0)$.

2. Teoremas de inversión local. Extremos

2.1. Los teoremas de la función inversa y de la función implícita

Problema 2.1

a) Calcular las derivadas de las funciones implícitas definidas por

i) $x^2 + y^2 = 1$, $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; ii) $x^3 \log x^2 + y^2 = 0$, $x(0) = 1$.

b) ¿Se puede encontrar una función $x = f(y, z)$ tal que $x^2y + e^x + z = 0$? Razona tu respuesta.

Problema 2.2

Prueba que la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - r^2 = 0$ define una función $z = f(x, y)$ diferenciable en el entorno de cualquier punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 \neq 0$. Encuentra la ecuación de plano tangente a la superficie en dicho punto A. ¿Cómo encontrarías la ecuación del plano en un punto con $z_0 = 0$?

Problema 2.3

Determinar la función implícita g definida en un entorno del punto $(0, 0)$ por $g(0, 0) = 1$, $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x + y) - 2x + y - 2z + 1$ con $z = g(x, y)$. Da un desarrollo de Taylor de orden 2 de g en un entorno de $(0, 0)$.

Problema 2.4

Sea $f(x, y, z, t) = (x^3z + y^3t^2 - 1, 2zt^3 + xy^2)$. Probar que f define una función implícita de clase $\mathcal{C}^\infty$, $(z, t) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ en un entorno de $(0, 1, 0, 1)$. Calcula $Dh(0, 1)$.

Problema 2.5

Sea la ecuación $e^{z^2-1} + (xe^{y^2} + e^{x^2}y)z - 1 = 0$.

1. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, 0, a)$. ¿Para alguno de dichos puntos la función $z = f(x, y)$ es diferenciable? ¿Cuántas veces? Justifica la respuesta.
2. Calcula, si es posible, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el entorno de los puntos obtenidos en el apartado 1.
3. Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la curva $z = f(x, y)$ en los puntos obtenidos en el apartado 1.

Problema 2.6

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (\cosh x \cos y, \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y)$.
a) Estudiar donde es f localmente invertible. ¿Lo es en los puntos $(0, n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$?
b) Si $S = \{(x, y) : x > 0\}$, ¿es f inyectiva en S?
c) Sea $U = \{(x, y) : x > 0,\ 0 < y > 2\pi\}$. Calcular $f(U)$ y ver que $f_{|U}$ es biyectiva sobre su imagen.

Problema 2.7

Estudiar para qué valores de la constante a, la ecuación $x^2 + y^3 + xy + x^3 + ay = 0$ define y como función implícita de x en un entorno del punto (0,0). Hallar $y\prime(0)$. ¿Define la ecuación a x como función implícita de y en un entorno del mismo punto?

Problema 2.8

Probar que existen funciones f y g de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidas en un entorno de $(1,1)$, tales que $f(1,1)=-1$, $g(1,1)=0$ y verificando las ecuaciones:

$$f(x,y)^3+xg(x,y)^2+y=0, \qquad g(x,y)^3+yg(x,y)+f(x,y)^2=x.$$

Problema 2.9

Probar que la ecuación $x^2+y^2+z^2=\mathrm{e}^{x+y+z}-1$, define z como función $z=f(x,y)$, de clase infinito, en un entorno de $(0,0)$, verificando $f(0,0)=0$. Calcular el polinomio de Taylor de $f(x,y)$ en un entorno de (0,0) hasta los términos de segundo orden inclusive.

Problema 2.10

Sea $f(x,y,z)=x^2y+e^x+z$. Probar que existe una función g diferenciable, definida en un entorno del punto $(1,-1)$ tal que $g(1,-1)=0$ y $f(g(y,z),y,z)=0$. Calcula $Dg(1,-1)$.

Problema 2.11

La ecuación $\mathrm{sen}(ax+by+c)+e^{cxyz}+x+2y=1$ define z como función implícita de x e y en un entorno del origen. Calcular los valores de las constantes a, b y c que hacen que el desarrollo de Taylor en un entorno de $(0,0)$ de dicha función implícita tenga los tres primeros términos nulos.

Problema 2.12

Prueba que la ecuación $y^2z+x\log z-x=0$ define una función dos veces diferenciable $z=f(x,y)$ en el entorno del punto $(1,-1,1)$. Calcula el polinomio de Taylor de orden dos de dicha función en dicho punto.

Problema 2.13

Sea $f:\mathbb{R}^2\longmapsto\mathbb{R}^2$, definida por $f(u,v)=(e^u+e^v,e^u-e^v)$.

a) Determinar los puntos de $\mathbb{R}^2$ en los que f es localmente invertible.

b) ¿Es f globalmente invertible? En caso afirmativo caracterizar la imagen de f y calcular la función inversa f^{-1}.

c) Comprobar que las derivadas de f y de f^{-1} en puntos correspondientes son matrices inversas.

Problema 2.14

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=(e^{x+y},x^2)$.

a) ¿En qué puntos es aplicable el teorema de la función inversa. Calcula la derivada de la función inversa local.

b) Estudia la inversión global de f en regiones de $\mathbb{R}^2$.

Problema 2.15

Si x_1,x_2,x_3 son las raices del polinomio $p(x)=x^3+y_1x^2+y_2x+y_3$, existe la siguiente relación con los coeficientes:

$$\begin{aligned} y_1 &= -(x_1+x_2+x_3),\\ y_2 &= x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3, \qquad \text{(Ecuaciones de Cardano – Vieta)}\\ y_3 &= -x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Demostrar que en un entorno de una terna de raices reales (a,b,c) distintas dos a dos está definida una función de clase C^1 que expresa las raices en término de los coeficientes. Calcula una de las derivadas parciales de una de las componentes de dicha función.

Problema 2.16

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \ f(x,y) = (xe^y, xe^{-y})$.
1. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ se puede garantizar la existencia de inversa local?
2. ¿Es f inyectiva? En caso negativo, encuentra el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^2$ donde lo es, caracteriza su imagen y da una expresión de f^{-1}.

Problema 2.17

Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$. Probar que f es localmente invertible. Demostrar que en este caso, la función f es globalmente invertible. Calcular su función inversa. Comprobar que las derivadas de f y f^{-1} en puntos correspondientes, son inversas.

Problema 2.18

Sea $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.
a) Probar que f es localmente invertible, pero no globalmente, aunque su jacobiano es distinto de 0 siempre.
b) Comprobar que si $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < y < \pi\}$ entonces $f_{|U}$ es invertible, siendo su inversa continua.
c) Probar que U con la condición anterior es maximal.

Problema 2.19

Encontrar las expresiones en las nuevas variables de las siguientes expresiones y cambios de variables

1. $(x\, z_x)^2 + (y\, z_y)^2 = z^2\, z_x\, z_y$ con $x = u\exp(w)$, $y = v\exp(w)$, y $z = w\exp(w)$;
2. $z_{xx} - z_{yy} = 0$ con $x = u + v$, $y = u - v$, y $z = w$;
3. $z_{xx} - z_y = 0$ con $x = -u/v$, $y = -1/v$, $z = \sqrt{-v}e^{u^2/(4v)}w$;

Problema 2.20

1. Escribir el laplaciano de orden dos $\Delta z(x,y) := z_{xx} + z_{yy}$ en las nuevas variables $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $z = w$.
2. Escribir la ecuación de Laplace $w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0$ en las nuevas variables $x = r\cos(\phi)\sin(\theta)$, $y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\theta)$, siendo la función $w(x,y,z) = w(r,\theta,\phi)$.

2.2. Extremos en $\mathbb{R}^n$

Problema 2.21

Estudiar la existencia de máximos y mínimos locales de las funciones:

$$a)\ f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad b)\ f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+1}, \qquad c)\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27,$$

$$d)\ f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2, \quad e)\ f(x,y) = (x+y)\exp(-x^2-y^2), \quad f)\ f(x,y) = \sin x + \cos y.$$

Problema 2.22

Estudiar los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = (1+e^y)\cos(x) - ye^y$, b) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, c) $f(x,y) = xy + x^3 + \frac{1}{2}y^2 + 1$.

Problema 2.23

Demostrar que la funcion $g(x,y) = (x+y)e^{-(x+2y)}$ alcanza sus extremos absolutos en $x \geq 0, y \geq 0$. Calcúlalos razonadamente.

Problema 2.24

Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y, \\ y(x-1) & \text{si } x > y \end{cases}$.

Demostrar que f alcanza su máximo en el interior del cuadrado donde está definida. Calcular ese máximo y el punto donde se alcanza.

Problema 2.25

Sean $f(x,y) = xe^{x(1+y^2)^2}$ y $g(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$. Estudia sus extremos, tanto relativos como absolutos, en $\mathbb{R}^2$.

Problema 2.26

Deducir razonadamente que la ecuación $x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z+8=0$ define en un entorno de $(2,2)$ una función $z = g(x,y)$ que verifica la ecuación y posee un máximo local estricto en dicho punto.

Problema 2.27

Demostrar que si el punto (a,b) verifica la ecuación $xy - \log x + \log y = 0$, $(x, y > 0)$, entonces existe una solución indefinidamente diferenciable $y = f(x)$ que pasa por dicho punto. Probar asimismo que existe un punto (a,b) tal que la solución correspondiente $y = f(x)$ tiene un máximo en a.

Problema 2.28

Estudia los extremos relativos y absolutos de la función $f(x,y,z) = x^4 + z^4 - 2(x^2+z^2) + y^2$

Problema 2.29

Encuentra los extremos de $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ si $2x - y - 3 = 0$. Resuélvelo sustituyendo directamente la y en función de la x mediante la ligadura y por el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.

Problema 2.30

Hallar las distancias máxima y mínima del origen a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-6x-8y-75=0$.

Problema 2.31

Calcular los extremos de $f(x,y) = x+y$ sobre la elipse $x^2+2y^2=1$. Idem para $f(x,y) = -4x-3y+6$ sobre $x^2+y^2=1$.

Problema 2.32

Encuentra los extremos de $f(x,y) = x^2+y^2-x-y+1$ sobre la región $x^2+y^2 \leq 2$.

Problema 2.33

Probar que la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$ alcanza extremos absolutos en el recinto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 1\}$. Calcularlos.

Problema 2.34

Hallar la distancia mínima del origen de coordenadas a la cónica de ecuación $x^2 + 3xy + y^2 = 5$. ¿Qué se puede decir de la distancia máxima?

Problema 2.35

a) Descomponer un numero positivo a en producto de cuatro factores cuya suma sea la menor posible.
b) Descomponer un número positivo a en suma de tres términos cuyo producto sea máximo

Problema 2.36

Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \log\Big(x^2 + y^2\Big)$.
(a) Probar que f no tiene ni extremos relativos y ni absolutos.
(b) Prueba que f tiene extremos absolutos en $A = \{(x, y) : x \geq 1, (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$. Calculalos razonadamente

Problema 2.37

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$. Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 12,\ z \leq 1\}$.

a) Encuentra todos los puntos críticos de f en M y clasifícalos.
b) Prueba que f tiene en M extremos absolutos y calcúlalos.

Problema 2.38

Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2\}$, y sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $F(x, y, z) = (1-z^2)(x-y)$. Prueba que F alcanza extremos absolutos en M y calcúlalos.

Problema 2.39

Sea la curva en $\mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones $x + y + z = 12$ y $z = x^2 + y^2$.

a) Encuentra los puntos más alto y más bajo de dicha curva.
b) Encuentra los puntos de la curva más cercano y lejano al origen de coordenadas.

Problema 2.40

Estudiar los extremos de la función $f(x, y, z) = x + y + 2z$ sobre el elipsoide de ecuación $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

Problema 2.41

Sea el paraboloide truncado definido por las ecuaciones $x^2 + y^2 = z,\ z \leq 3$. Encuentra los puntos que estén respectivamente más próximos y más lejos del punto $(3, 3, 1)$.

Problema 2.42

Sea la superficie definida por $x^4 + 2y^2 + 4z^2 = 8$. Encuentra los puntos que estén respectivamente más próximos y más lejos del punto $(0, 0, 3)$.

Problema 2.43

Calcula los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ bajo la condición $x^3y + xy^3 = 2a^4$, $a > 0$.

Problema 2.44

Encuentra los extremos de la función $f(x, y, z) = x + y + z^2$ bajo las ligaduras

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$$

Resuélvelo mediante a) los coeficientes indeterminados de Lagrange y b) sustituyendo los valores de z e y en función de x en la función f.

Problema 2.45

Encontrar los puntos de la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, $6x + 3y + 2z = 6$ que estén respectivamente más próximos y más lejos del origen.

Problema 2.46

Dadas las rectas de ecuaciones

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{7} = z, \qquad \frac{x-1}{6} = y = \frac{z-2}{7},$$

hallar la mínima distancia entre ellas.

Problema 2.47

Encuentrar los puntos de la curva $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ que están más cerca del origen.

Problema 2.48

Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $\quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 4x$, donde A es la región definida por $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ |x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 8,\ z \leq 1\}$.

1. Calcula todos los extremos locales de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

Problema 2.49

Sea el conjunto $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^4 \leq 1\}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = 4x^2 + 2y^4 - y$.

(a) Encuentra todos los extremos relativos de f en D.

(b) Prueba que f tiene extremos absolutos en D. Calcúlalos razonadamente.

(c) ¿Tiene f extremos absolutos en $D \cup \{(x, y)|x \geq 0\}$? Justifica tu respuesta y calcúlalos si procede.

Problema 2.50

Sea la función
$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3,$$
donde A es la región definida por
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \, |x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \, x \geq 0\}.$$

1. Calcula todos los extremos locales de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

Problema 2.51

Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z^2 - 2z + 2y^2 + 4x^2 - 3$, donde A es la región definida por (paraboloide elíptico) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \, x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$.

1. Calcula todos los extremos locales de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

Problema 2.52

Encuentras los extremos locales (y absolutos caso de que existan) de la función $u = x + y - z$ definida sobre la curva
$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 12x + 12y + 12z = 13. \end{cases}$$
Ayuda: Es más fácil encontrar las relaciones entre los diferenciales dx, dy y dz y calcular du y d^2u.

Se recomienda a los alumnos consultar además los siguientes libros de problemas:

1. Carmona Álvarez, J., Facenda Aguirre, J. A., Freniche Ibáñez, F. J. *Ejercicios de Cálculo Diferencial de varias variables.* Secretariado de Publicaciones. Universidad de Sevilla, 2008.
2. Demidovich, B. *5000 problemas de Análisis Matemático*, Paraninfo, 1980. (Existe una versión de la editorial MIR).
3. Liashkó, I.I. y otros. Matemática superior. Problemas resueltos (Vol. 3). Ed. URSS 1999.
4. Spiegel, M. R. Variables reales. Serie Schaum, McGraw-Hill 1969.