CÁLCULO DIFERENCIAL EN $\mathbb{R}^n$ con MAXIMA

Cambio de variables

Renato Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

http://euler.us.es/˜renato/clases.html

Caso más simple de una función escalar con dos variables:
Supongamos que tenemos una expresión del tipo

$$\Phi(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots)$$

donde x e y son variables independientes y z es una función $z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $z = z(x, y)$ y queremos escribirlas en las nuevas variables u, v y $w = w(u, v)$ asumiendo que las variables nuevas y viejas se relacionan mediante el sistema

$$g_i(x, y, z, u, v, w) = 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

que denominaremos expresiones del cambio de variables, donde las funciones g_i, $i = 1, 2, 3$ se asumen diferenciables tantas veces como haga falta.

Caso más simple de una función escalar con dos variables:
Supongamos que tenemos una expresión del tipo

$$\Phi(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots)$$

donde x e y son variables independientes y z es una función $z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $z = z(x, y)$ y queremos escribirlas en las nuevas variables u, v y $w = w(u, v)$ asumiendo que las variables nuevas y viejas se relacionan mediante el sistema

$$g_i(x, y, z, u, v, w) = 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

que denominaremos expresiones del cambio de variables, donde las funciones g_i, $i = 1, 2, 3$ se asumen diferenciables tantas veces como haga falta.

Ejemplo: Escribir el laplaciano $\mathbf{\Delta z(x, y)} := \mathbf{z_{xx}} + \mathbf{z_{yy}}$ en las nuevas variables $\mathbf{x} = \mathbf{r}\cos(\phi)$, $\mathbf{y} = \mathbf{r}\sin(\phi)$, $\mathbf{z} = \mathbf{w}$.

Hay dos opciones de especial interés y es cuando el cambio de variables es de la forma (variables viejas en función de las nuevas)

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w), \qquad (1)$$

o (variables nuevas en función de las viejas)

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z). \qquad (2)$$

Nos centraremos en el caso cuando se tiene la expresión explícita de las variables viejas en función de las nuevas

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w). \qquad (3)$$

Diferenciando (3) tenemos

$$\begin{aligned} dx &= D_u f_1 du + D_v f_1 dv + D_w f_1 dw, \\ dy &= D_u f_2 du + D_v f_2 dv + D_w f_2 dw, \\ dw &= D_u f_3 du + D_v f_3 dv + D_w f_3 dw, \end{aligned}$$

donde D_u, D_v y D_w son las correspondientes derivadas parciales respecto a las variables u, v y w, respectivamente.

Si usamos que $dw = D_u w du + D_v w dv$ tenemos

$$\begin{aligned} dx =& \mathcal{D}_u f_1 du + \mathcal{D}_v f_1 dv, \\ dy =& \mathcal{D}_u f_2 du + \mathcal{D}_v f_2 dv, \\ dz =& \mathcal{D}_u f_3 du + \mathcal{D}_v f_3 dv \end{aligned} \tag{4}$$

donde

$$\mathcal{D}_u = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u} + w_u \frac{\partial}{\partial w}, \quad \mathcal{D}_v = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v} + w_v \frac{\partial}{\partial w}.$$

Si el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_u f_1 & \mathcal{D}_v f_1 \\ \mathcal{D}_u f_2 & \mathcal{D}_v f_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces las dos primeras ecuaciones de (4) se pueden resolver expresándose las diferenciales du y dv en función de las dx y dy

$$
\begin{aligned}
du &= \frac{1}{\Delta}\Big(\mathcal{D}_v f_2 dx - \mathcal{D}_v f_1 dy\Big), \\
dv &= \frac{1}{\Delta}\Big(-\mathcal{D}_u f_2 dx + \mathcal{D}_u f_1 dy\Big),
\end{aligned} \tag{5}
$$

que sustituimos en la tercera expresión de (4) obteniendo

$$
dz = \frac{1}{\Delta}\Big(\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_2 - \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_2\Big) dx + \frac{1}{\Delta}\Big(-\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_1 + \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_1\Big) dy,
$$

de donde deducimos

$$
\begin{aligned}
z_x &= \frac{1}{\Delta}\Big(\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_2 - \mathcal{D}_v f_3 D_u f_2\Big) = F_1(u, v, w, w_u, w_v), \\
z_y &= \frac{1}{\Delta}\Big(-\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_1 + \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_1\Big) = F_2(u, v, w, w_u, w_v).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Ejemplo: Escribir las expresiones de z_x y z_y en las nuevas variables $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $z = w$.

Ejemplo: Escribir las expresiones de z_x y z_y en las nuevas variables $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $z = w$.

Definimos nuestras nuevas variables y calculamos los diferenciales

```
(%i1) depends(w,[r,phi]); depends(z,[x,y]);
(%o1) [w(r,phi)]
(%o2) [z(x,y)]
(%i3) x=r*cos(phi);eq1:diff(%);
(%o3) x=cos(phi)*r
(%o4) del(x)=cos(phi)*del(r)-sin(phi)*r*del(phi)
(%i5) y=r*sin(phi);eq2:diff(%);
(%o5) y=sin(phi)*r
(%o6) del(y)=sin(phi)*del(r)+cos(phi)*r*del(phi)
(%i7) z=w;eq3:diff(%);
(%o7) z=w
(%o8) ('diff(z,y,1))*del(y)+('diff(z,x,1))*del(x)=
      ('diff(w,r,1))*del(r)+('diff(w,phi,1))*del(phi)
```

Escribimos las ecuaciones correspondientes a

$$du = \frac{1}{\Delta}\left(\mathcal{D}_v f_2 dx - \mathcal{D}_v f_1 dy\right), \quad dv = \frac{1}{\Delta}\left(-\mathcal{D}_u f_2 dx + \mathcal{D}_u f_1 dy\right).$$

```
(%i9) linsolve([eq1,eq2],[del(r),del(phi)])$
      sol1:trigsimp(%);
(%o10) [del(r)=sin(phi)*del(y)+cos(phi)*del(x),
        del(phi)=cos(phi)*del(y)-sin(phi)*del(x))/r]
```

Que sustituimos en la expresión para el diferencial de z

```
(%i11)subst(sol1,eq3)$ expand(%)$ a:second(%);
(%o13) sin(phi)*('diff(w,r,1))*del(y)+
       (cos(phi)*('diff(w,phi,1))*del(y))/r+
       cos(phi)*('diff(w,r,1))*del(x)-
       (sin(phi)*('diff(w,phi,1))*del(x))/r
```

A continuación seleccionamos los coeficientes delante de ambos diferenciales que nos dan los valores de las derivadas z_x y z_y, respectivamente

```
(%i14) zx:coeff(a,del(x),1);
(%o14) cos(phi)*('diff(w,r,1))-
                   (sin(phi)*('diff(w,phi,1)))/r
(%i15) zy:coeff(a,del(y),1);
(%o15) sin(phi)*('diff(w,r,1))+
                   (cos(phi)*('diff(w,phi,1)))/r
```

Es decir

$$z_x = w_r \cos\phi - \frac{1}{r} w_\phi \sin\phi, \qquad z_y = w_r \sin\phi + \frac{1}{r} w_\phi \cos\phi.$$

A continuación seleccionamos los coeficientes delante de ambos diferenciales que nos dan los valores de las derivadas z_x y z_y, respectivamente

```
(%i14) zx:coeff(a,del(x),1);
(%o14) cos(phi)*('diff(w,r,1))-
                    (sin(phi)*('diff(w,phi,1)))/r
(%i15) zy:coeff(a,del(y),1);
(%o15) sin(phi)*('diff(w,r,1))+
                    (cos(phi)*('diff(w,phi,1)))/r
```

Es decir

$$z_x = w_r \cos\phi - \frac{1}{r} w_\phi \sin\phi, \qquad z_y = w_r \sin\phi + \frac{1}{r} w_\phi \cos\phi.$$

Problema: Escribir el laplaciano de orden dos $z_{xx} + z_{yy} = 0$ en las nuevas variables $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $z = w$.

Para obtener las expresiones de las 2ª derivadas calculamos

$$
\begin{aligned}
d(z_x) =& z_{xx} dx + z_{xy} dy = \\
=& D_u F_1 du + D_v F_1 dv + D_w F_1 dw + D_{w_u} F_1 dw_u + D_{w_v} F_1 dw_v .
\end{aligned}
$$

y sustituimos en la parte derecha los valores de las diferenciales nuevas

$$dw = w_u du + w_v dv, \quad dw_u = w_{uu} du + w_{vu} dv, \quad dw_v = w_{uv} du + w_{vv} dv$$

y en la expresión resultante sustituimos los valores de las diferenciales du y dv obtenidos anterioremente. Esto nos da una expresión de $d(z_x)$ en función de las diferenciales antiguas. Igualando las expresiones delante de las diferenciales dx y dy obtenemos los valores z_{xx} y z_{xy} respectivamente.

Hagámolo con MAXIMA. Primero calculamos el diferencial de $dz_x = z_{xx}dx + z_{xy}dy$

```
(%i16) eqdzx:diff(zx);
```

y en el resultado sustituimos los diferenciales dr y $d\phi$ por los antiguos dx y dy

```
(%i17) subst(sol1,eqdzx)$   b:expand(%);
```

Finalmente, identificamos el coefiente delante del diferencial dx que corresponde a la derivada z_{xx}

```
(%i19) zxx:coeff(b,del(x),1);
(%o19) cos(phi)^2*('diff(w,r,2))+
                 (sin(phi)^2*('diff(w,r,1)))/r+
       (sin(phi)^2*('diff(w,phi,2)))/r^2
       -(2*cos(phi)*sin(phi)*('diff(w,phi,1,r,1)))/r
       +(2*cos(phi)*sin(phi)*('diff(w,phi,1)))/r^2
```

Para obtener z_{yy} se procede de forma análoga pero partiendo de la expresión de z_y.

Así tenemos:

```
(%i20) eqdzy:diff(zy)$
(%i21) subst(sol1,eqdzy)$ c:expand(%);
(%i23) zyy:coeff(c,del(y),1);
(%o23) sin(phi)^2*('diff(w,r,2))+
            (cos(phi)^2*('diff(w,r,1)))/r+
          (cos(phi)^2*('diff(w,phi,2)))/r^2
       +(2*cos(phi)*sin(phi)*('diff(w,phi,1,r,1)))/r
       -(2*cos(phi)*sin(phi)*('diff(w,phi,1)))/r^2
```

Para terminar calculamos $z_{xx} + z_{yy}$

```
(%i24) zxx+zyy$
(%i25) trigsimp(%); expand(%);
(%o26) 'diff(w,r,2)+'diff(w,r,1)/r+'diff(w,phi,2)/r^2
(%i27) subst(w=z,%);
(%o27) 'diff(z,r,2)+'diff(z,r,1)/r+'diff(z,phi,2)/r^2
```

que nos da

$$\frac{d^2 z}{d\, r^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{d\, r} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 z}{d\, \varphi^2} = 0.$$

Ejercicio: Encontrar las expresiones en las nuevas variables de las siguientes expresiones según los correspondientes cambios de variables

1. $(x\,z_x)^2 + (y\,z_y)^2 = z^2\,z_x\,z_y$ con $x = u\exp(w)$, $y = v\exp(w)$, y $z = w\exp(w)$;
2. $z_{xx} - z_{yy} = 0$ con $x = u + v$, $y = u - v$, y $z = w$;
3. $z_{xx} - z_y = 0$ con $x = -u/v$, $y = -1/v$, $z = \sqrt{-v}e^{u^2/(4v)}w$.

Ejercicio: Encontrar las expresiones en las nuevas variables de las siguientes expresiones según los correspondientes cambios de variables

1. $(x\, z_x)^2 + (y\, z_y)^2 = z^2\, z_x\, z_y$ con $x = u \exp(w)$, $y = v \exp(w)$, y $z = w \exp(w)$;
2. $z_{xx} - z_{yy} = 0$ con $x = u + v$, $y = u - v$, y $z = w$;
3. $z_{xx} - z_y = 0$ con $x = -u/v$, $y = -1/v$, $z = \sqrt{-v} e^{u^2/(4v)} w$.

Ejercicio: Implementa un pequeño programa para aplicar la técnica de cambio de variables aquí descrita a una expresión de tres variables. Como ejemplo de apliación escribe la ecuación de Laplace $w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0$ en las nuevas variables $x = r \cos(\phi) \sin(\theta)$, $y = r \sin(\phi) \sin(\theta)$, $z = r \cos(\theta)$, siendo la función $w(x, y, z) = w(r, \theta, \phi)$.