

CÁLCULO DIFERENCIAL EN \mathbb{R}^n con MAXIMA

Cambio de variables

Renato Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

<http://euler.us.es/~renato/clases.html>

Caso más simple de una función escalar con dos variables:

Supongamos que tenemos una expresión del tipo

$$\Phi(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots)$$

donde x e y son variables independientes y z es una función $z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $z = z(x, y)$ y queremos escribirlas en las nuevas variables u, v y $w = w(u, v)$ asumiendo que las variables nuevas y viejas se relacionan mediante el sistema

$$g_i(x, y, z, u, v, w) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

que denominaremos expresiones del cambio de variables, donde las funciones g_i , $i = 1, 2, 3$ se asumen diferenciables tantas veces como haga falta.

Caso más simple de una función escalar con dos variables:

Supongamos que tenemos una expresión del tipo

$$\Phi(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots)$$

donde x e y son variables independientes y z es una función $z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $z = z(x, y)$ y queremos escribirlas en las nuevas variables u, v y $w = w(u, v)$ asumiendo que las variables nuevas y viejas se relacionan mediante el sistema

$$g_i(x, y, z, u, v, w) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

que denominaremos expresiones del cambio de variables, donde las funciones g_i , $i = 1, 2, 3$ se asumen diferenciables tantas veces como haga falta.

Ejemplo: Escribir el laplaciano $\Delta z(x, y) := z_{xx} + z_{yy}$ en las nuevas variables $\mathbf{x} = \mathbf{r} \cos(\phi)$, $\mathbf{y} = \mathbf{r} \sin(\phi)$, $\mathbf{z} = \mathbf{w}$.

Hay dos opciones de especial interés y es cuando el cambio de variables es de la forma (variables viejas en función de las nuevas)

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w), \quad (1)$$

o (variables nuevas en función de las viejas)

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z). \quad (2)$$

Nos centraremos en el caso cuando se tiene la expresión explícita de las variables viejas en función de las nuevas

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w). \quad (3)$$

Diferenciando (3) tenemos

$$dx = D_u f_1 du + D_v f_1 dv + D_w f_1 dw,$$

$$dy = D_u f_2 du + D_v f_2 dv + D_w f_2 dw,$$

$$dz = D_u f_3 du + D_v f_3 dv + D_w f_3 dw,$$

donde D_u , D_v y D_w son las correspondientes derivadas parciales respecto a las variables u , v y w , respectivamente.

Si usamos que $dw = D_u w du + D_v w dv$ tenemos

$$\begin{aligned} dx &= \mathcal{D}_u f_1 du + \mathcal{D}_v f_1 dv, \\ dy &= \mathcal{D}_u f_2 du + \mathcal{D}_v f_2 dv, \\ dz &= \mathcal{D}_u f_3 du + \mathcal{D}_v f_3 dv \end{aligned} \tag{4}$$

donde

$$\mathcal{D}_u = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u} + w_u \frac{\partial}{\partial w}, \quad \mathcal{D}_v = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v} + w_v \frac{\partial}{\partial w}.$$

Si el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_u f_1 & \mathcal{D}_v f_1 \\ \mathcal{D}_u f_2 & \mathcal{D}_v f_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces las dos primeras ecuaciones de (4) se pueden resolver expresándose las diferenciales du y dv en función de las dx y dy

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{\Delta} \left(\mathcal{D}_v f_2 dx - \mathcal{D}_v f_1 dy \right), \\ dv &= \frac{1}{\Delta} \left(-\mathcal{D}_u f_2 dx + \mathcal{D}_u f_1 dy \right), \end{aligned} \tag{5}$$

que sustituimos en la tercera expresión de (4) obteniendo

$$dz = \frac{1}{\Delta} \left(\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_2 - \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_2 \right) dx + \frac{1}{\Delta} \left(-\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_1 + \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_1 \right) dy,$$

de donde deducimos

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{1}{\Delta} \left(\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_2 - \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_2 \right) = F_1(u, v, w, w_u, w_v), \\ z_y &= \frac{1}{\Delta} \left(-\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_1 + \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_1 \right) = F_2(u, v, w, w_u, w_v). \end{aligned} \tag{6}$$

Ejemplo: Escribir las expresiones de z_x y z_y en las nuevas variables $x = r \cos(\phi)$, $y = r \sin(\phi)$, $z = w$.

Ejemplo: Escribir las expresiones de z_x y z_y en las nuevas variables $x = r \cos(\phi)$, $y = r \sin(\phi)$, $z = w$.

Definimos nuestras nuevas variables y calculamos los diferenciales

```
(%i1) depends(w, [r, phi]); depends(z, [x, y]);  
(%o1) [w(r, phi)]  
(%o2) [z(x, y)]  
(%i3) x=r*cos(phi); eq1:diff(%);  
(%o3) x=cos(phi)*r  
(%o4) del(x)=cos(phi)*del(r)-sin(phi)*r*del(phi)  
(%i5) y=r*sin(phi); eq2:diff(%);  
(%o5) y=sin(phi)*r  
(%o6) del(y)=sin(phi)*del(r)+cos(phi)*r*del(phi)  
(%i7) z=w; eq3:diff(%);  
(%o7) z=w  
(%o8) ('diff(z, y, 1))*del(y)+('diff(z, x, 1))*del(x)=  
      ('diff(w, r, 1))*del(r)+('diff(w, phi, 1))*del(phi)
```

Escribimos las ecuaciones correspondientes a

$$du = \frac{1}{\Delta} \left(\mathcal{D}_v f_2 dx - \mathcal{D}_v f_1 dy \right), \quad dv = \frac{1}{\Delta} \left(-\mathcal{D}_u f_2 dx + \mathcal{D}_u f_1 dy \right).$$

```
(%i9) linsolve([eq1,eq2],[del(r),del(phi)])$
      sol1:trigsimp(%);
```

```
(%o10) [del(r)=sin(phi)*del(y)+cos(phi)*del(x),
        del(phi)=cos(phi)*del(y)-sin(phi)*del(x)]/r]
```

Que sustituimos en la expresión para el diferencial de z

```
(%i11) subst(sol1,eq3)$ expand(%)$ a:second(%);
```

```
(%o13) sin(phi)*('diff(w,r,1))*del(y)+
        (cos(phi)*('diff(w,phi,1))*del(y))/r+
        cos(phi)*('diff(w,r,1))*del(x)-
        (sin(phi)*('diff(w,phi,1))*del(x))/r
```

A continuación seleccionamos los coeficientes delante de ambos diferenciales que nos dan los valores de las derivadas z_x y z_y , respectivamente

```
(%i14) zx:coeff(a,delta(x),1);  
(%o14) cos(phi)*(diff(w,r,1))-  
          (sin(phi)*(diff(w,phi,1)))/r  
(%i15) zy:coeff(a,delta(y),1);  
(%o15) sin(phi)*(diff(w,r,1))+  
          (cos(phi)*(diff(w,phi,1)))/r
```

Es decir

$$z_x = w_r \cos \phi - \frac{1}{r} w_\phi \sin \phi, \quad z_y = w_r \sin \phi + \frac{1}{r} w_\phi \cos \phi.$$

A continuación seleccionamos los coeficientes delante de ambos diferenciales que nos dan los valores de las derivadas z_x y z_y , respectivamente

```
(%i14) zx:coeff(a,delta(x),1);  
(%o14) cos(phi)*(diff(w,r,1))-  
          (sin(phi)*(diff(w,phi,1)))/r  
(%i15) zy:coeff(a,delta(y),1);  
(%o15) sin(phi)*(diff(w,r,1))+  
          (cos(phi)*(diff(w,phi,1)))/r
```

Es decir

$$z_x = w_r \cos \phi - \frac{1}{r} w_\phi \sin \phi, \quad z_y = w_r \sin \phi + \frac{1}{r} w_\phi \cos \phi.$$

Problema: Escribir el laplaciano de orden dos $z_{xx} + z_{yy} = 0$ en las nuevas variables $x = r \cos(\phi)$, $y = r \sin(\phi)$, $z = w$.

Para obtener las expresiones de las 2ª derivadas calculamos

$$\begin{aligned}d(z_x) &= z_{xx}dx + z_{xy}dy = \\ &= D_u F_1 du + D_v F_1 dv + D_w F_1 dw + D_{w_u} F_1 dw_u + D_{w_v} F_1 dw_v.\end{aligned}$$

y sustituimos en la parte derecha los valores de las diferenciales nuevas

$$dw = w_u du + w_v dv, \quad dw_u = w_{uu} du + w_{vu} dv, \quad dw_v = w_{uv} du + w_{vv} dv$$

y en la expresión resultante sustituimos los valores de las diferenciales du y dv obtenidos anteriormente. Esto nos da una expresión de $d(z_x)$ en función de las diferenciales antiguas. Igualando las expresiones delante de las diferenciales dx y dy obtenemos los valores z_{xx} y z_{xy} respectivamente.

Hagámolo con MAXIMA. Primero calculamos el diferencial de $dz_x = z_{xx}dx + z_{xy}dy$

```
(%i16) eqdzx:diff(zx);
```

y en el resultado sustituimos los diferenciales dr y $d\phi$ por los antiguos dx y dy

```
(%i17) subst(sol1,eqdzx)$ b:expand(%);
```

Finalmente, identificamos el coeficiente delante del diferencial dx que corresponde a la derivada z_{xx}

```
(%i19) zxx:coeff(b,del(x),1);
```

```
(%o19) cos(phi)^2*( 'diff(w,r,2))+
          (sin(phi)^2*( 'diff(w,r,1)))/r+
          (sin(phi)^2*( 'diff(w,phi,2)))/r^2
          -(2*cos(phi)*sin(phi)*( 'diff(w,phi,1,r,1)))/r
          +(2*cos(phi)*sin(phi)*( 'diff(w,phi,1)))/r^2
```

Para obtener z_{yy} se procede de forma análoga pero partiendo de la expresión de z_y .

Así tenemos:

```
(%i20) eqdzy:diff(zy)$
(%i21) subst(sol1,eqdzy)$ c:expand(%);
(%i23) zyy:coeff(c,del(y),1);
(%o23) sin(phi)^2*( 'diff(w,r,2))+
        (cos(phi)^2*( 'diff(w,r,1)))/r+
        (cos(phi)^2*( 'diff(w,phi,2)))/r^2
+ (2*cos(phi)*sin(phi)*( 'diff(w,phi,1,r,1)))/r
- (2*cos(phi)*sin(phi)*( 'diff(w,phi,1)))/r^2
```

Para terminar calculamos $z_{xx} + z_{yy}$

```
(%i24) zxx+zyy$
```

```
(%i25) trigsimp(%); expand(%);
```

```
(%o26) 'diff(w,r,2)+'diff(w,r,1)/r+'diff(w,phi,2)/r^2
```

```
(%i27) subst(w=z,%);
```

```
(%o27) 'diff(z,r,2)+'diff(z,r,1)/r+'diff(z,phi,2)/r^2
```

que nos da

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2z}{d\varphi^2} = 0.$$

Ejercicio: Encontrar las expresiones en las nuevas variables de las siguientes expresiones según los correspondientes cambios de variables

- 1 $(x z_x)^2 + (y z_y)^2 = z^2 z_x z_y$ con $x = u \exp(w)$, $y = v \exp(w)$,
 $z = w \exp(w)$;
- 2 $z_{xx} - z_{yy} = 0$ con $x = u + v$, $y = u - v$, $z = w$;
- 3 $z_{xx} - z_y = 0$ con $x = -u/v$, $y = -1/v$, $z = \sqrt{-v} e^{u^2/(4v)} w$.

Ejercicio: Encontrar las expresiones en las nuevas variables de las siguientes expresiones según los correspondientes cambios de variables

- 1 $(x z_x)^2 + (y z_y)^2 = z^2 z_x z_y$ con $x = u \exp(w)$, $y = v \exp(w)$,
 $z = w \exp(w)$;
- 2 $z_{xx} - z_{yy} = 0$ con $x = u + v$, $y = u - v$, $z = w$;
- 3 $z_{xx} - z_y = 0$ con $x = -u/v$, $y = -1/v$, $z = \sqrt{-v} e^{u^2/(4v)} w$.

Ejercicio: Implementa un pequeño programa para aplicar la técnica de cambio de variables aquí descrita a una expresión de tres variables. Como ejemplo de aplicación escribe la ecuación de Laplace $w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0$ en las nuevas variables $x = r \cos(\phi) \sin(\theta)$, $y = r \sin(\phi) \sin(\theta)$, $z = r \cos(\theta)$, siendo la función $w(x, y, z) = w(r, \theta, \phi)$.