

## 1º PARCIAL DFVV (GRUPO B). 3 de diciembre de 2013

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (3 Puntos)** Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

□ **Condición suficiente de diferenciabilidad:** Si la función  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tiene derivadas parciales con respecto a cada una de las variables y estas son continuas en  $a \in A$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $a$ .

□ **Teorema del valor medio:** Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , diferenciable en  $A$  abierto y conexo. Sean  $a, b \in A$  y sea  $s$  el segmento que los une. Entonces, para cada vector  $v \in \mathbb{R}^m$  existe un punto  $z$  en el interior del segmento  $s$  tal que  $\langle h, f(b) - f(a) \rangle = \langle h, Df(z)(b - a) \rangle$ .

**Problema 1. (3 ptos.)** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = |y|^\alpha \tan x$ ,  $\alpha > 0$ .

1. Calcula  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .
2. ¿Para qué valores de  $\alpha$   $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ?
3. Calcula sus derivadas parciales de  $f$ .
4. ¿Para que valores de  $\alpha$   $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ ? Justifica la respuesta y calcula la derivada total de  $f$  en  $(0, 0)$  si existe.
5. Calcula la derivada total de  $f$  en  $(1, \pi)$ .

**Problema 2. (4 ptos.)** Sea la función  $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g(x, y, z) = x^2 + ye^{xz}$ .

1. Decide si  $g$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ . Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}$  y  $\frac{\partial g}{\partial z}$ .
3. ¿Cuánto vale la derivada  $g$  en el punto  $(1, 2, 0)$  según la dirección del vector  $(3/4, \sqrt{3}/2, 1/2)$ .
4. ¿En que dirección es máxima la variación de  $g$  en dicho punto  $(1, 2, 0)$ ?  
¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por  $w = g(x, y, z)$  en el punto  $(1, 2, 0)$ .
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto  $(1, 2, 0)$ .

## 2º PARCIAL DFVV (GRUPO B). 10 de enero de 2014

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (3 Puntos)** Enuncia y demuestra la condición necesaria y suficiente de extremo libre de una función de varias variables.

**Problema 1. (2 ptos.)**

Sea la ecuación  $z^3 + 2(x + y)^2z + e^{z-1} - 4 = 0$ .

1. Prueba que la ecuación anterior define una función  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(0, -1, 1)$  y que dicha función es una función  $C^{(\infty)}(U)$  en dicho  $U$ .
2. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en dicho punto.
3. Escribe el polinomio de Taylor de orden 1 de  $f$  en  $(0, -1, 1)$ .

**Problema 2. (5 ptos.)**

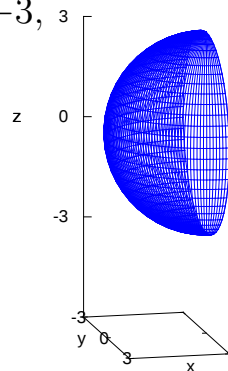
Sea la función

$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3,$$

donde  $A$  es la región definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0\}.$$

1. Calcula todos los puntos críticos de dicha función.
2. ¿Alcanza  $f$  su máximo y mínimo globales en  $A$ ? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de  $f$ .



EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO B). 7 de febrero de 2014  
 RECUPERACIÓN 1º o 2º PRUEBA o SUBIR NOTA DFVV<sup>1</sup>

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría Examen Final. (2 puntos)** Demuestra uno de los siguientes teoremas:

de Heffter-Young.  Teorema de la función implícita.

**Problema 1 (3.5 puntos)** Se considera la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha \arctan y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a). Demuestra que para  $\alpha > 0$ , la función  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .
- (b). Para  $\alpha > 0$ , escribe el valor de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
- (c). Demuestra que  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$  cuando  $\alpha > 1$ .
- (d). ¿Es  $f$  diferenciable en  $(0, 0)$ , cuando  $\alpha = 1$ ? Razona la respuesta.

**Problema 2 (1 punto)** Estudia el siguiente límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(x - \sin x)}{x^4 + y^2}$$

y calcúlalo caso de que exista.

**Problema 3 (3.5 puntos)**

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ .

- (a) Encuentra todos los extremos relativos de  $f$  en la región

$$A = \{(x, y) : x \geq 1, (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(b) Prueba que  $f$  tiene extremos absolutos en dicha región  $A$ . Calcúlalos razonadamente.

(c) Prueba que  $f$  no tiene ni extremos relativos y ni absolutos en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

<sup>1</sup>Examen final: problemas 1, 2 y 3. Recuperación 1º parcial: problemas 1 y 4. Recuperación 2º parcial: Problemas 3 y 5. Subir nota: problemas 1c,d, 3 y 6.

EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO B). 7 de febrero de 2014  
RECUPERACIÓN 1º o 2º PRUEBA o SUBIR NOTA DFVV<sup>2</sup>

**Teoría exámenes de recuperación. (3 puntos).** Demuestra uno de los siguientes teoremas:

- 1º prueba:  $\square$  de Heffter-Young o  $\square$  Teorema de Taylor con resto.  
2º prueba: Teorema de la función implícita.

**Problema 4 (3.5 puntos)**

Sea la función  $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$   $f(x, y, z) = (x \cos(y^2 + 1) + y \sin(ze^x))e^z$ .

1. Decide si  $f$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^3$ . Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}$  y  $\frac{\partial g}{\partial z}$ .
3. En caso de ser diferenciable escribe la derivada total de  $f$  en un punto  $(x, y, z)$ .
4. ¿Cuánto vale la derivada  $f$  en el punto  $(0, 1, -1)$  según la dirección del vector  $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ .
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por  $w = f(x, y, z)$  en el punto  $(0, 1, -1)$ .
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto  $(0, 1, -1)$ .

**Problema 5 (3.5 puntos)** Sea la ecuación  $z^3 - xyz + y^2 = 16$ .

- a) Prueba que dicha ecuación define una función  $z = f(x, y)$  en cierto entorno  $U$  de  $(1, 4, 2)$  y que dicha función  $f$  es  $C^{(p)}(U)$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ .
- b) Calcula la expresión formal de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en un punto  $(x, y)$  de  $U$ .
- c) Calcula los valores numéricos de las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 4)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 4)$ . ¿Cuánto vale la derivada direccional de  $f$  en la dirección  $(1, -2)$  en dicho punto  $(1, 4)$ ?
- d) Calcula el valor de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 4)$

**Problema 6** Calcula razonadamente el siguiente límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{|xy|^{3/2}}}{\arctan^2(x) + \arctan^2(y)}.$$

<sup>2</sup>Examen final: problemas 1, 2 y 3. Recuperación 1º parcial: problemas 1 y 4. Recuperación 2º parcial: Problemas 3 y 5. Subir nota: problemas 1c,d, 3 y 6.

1º PARCIAL DFVV (GRUPO B). 25 de noviembre de 2014

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (3 Puntos)** Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

Acotación de las aplicaciones lineales       Teorema del valor medio

**Problema 1 (3.5 puntos)** Se considera la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha \sin xy}{\sqrt{2x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a). Demuestra que para  $\alpha > -1$ , la función  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .
- (b). Para  $\alpha > -1$ , escribe el valor de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
- (c). Demuestra que  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$  cuando  $\alpha > 0$ .
- (d). ¿Para  $\alpha = 0$  es  $f$  diferenciable en  $(0, 0)$ ? Razona la respuesta.

**Problema 2 (3.5 puntos)** Sea la función  $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$g(x, y, z) = xye^z + xz \sin(y) + x^4yz.$$

1. Decide si  $g$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^3$ . Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}$  y  $\frac{\partial g}{\partial z}$ .
3. En caso de ser diferenciable escribe la derivada total de  $g$  en un punto  $(x, y, z)$ .
4. ¿Cuánto vale el gradiente de  $g$  en  $(1, \pi, 0)$ ?
5. Calcula la derivada de  $g$  en el punto  $(1, \pi, 0)$  según la dirección del vector  $(1, -1, 1)$ .
6. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por  $w = g(x, y, z)$  en el punto  $(1, \pi, 0)$ .
7. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto  $(1, \pi, 0)$ .

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (3 Puntos)** Enuncia y demuestra la condición necesaria y suficiente de extremo libre de una función de varias variables.

**Problema 1. (2 ptos.)**

Sea la ecuación  $F(x, y, z) := x^2y^2z^2 + \exp(x + y + 2z) + 5y^3 - 4y - 2 = 0$ .

1. Prueba que la ecuación anterior define una función  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(-1, 1, 0)$  y que dicha función es una función  $C^{(\infty)}(U)$  en dicho  $U$ .
2. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en dicho punto.
3. Calcula la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(-1, 1)$  según la dirección  $(1, 1)$ . ¿En que dirección dicha derivada direccional es mínima?

**Problema 2. (5 ptos.)**

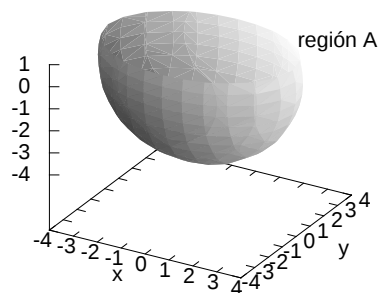
Sea la función

$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 4x,$$

donde  $A$  es la región definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 16, z \leq 1\}.$$

1. Calcula todos los posibles extremos locales de dicha función. Decide, cuando sea posible, si lo son.
2. ¿Alcanza  $f$  su máximo y mínimo globales en  $A$ ? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de  $f$ .



## EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO B). 22 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (2 puntos)** Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:
 de Heffter-Young.     Teorema de la función implícita.
**Problema 1: 3.5 puntos** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 \cos y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

1. Prueba que  $f$  es continua en todo su dominio.
2. Encuentra las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $\mathbb{R}^2$ .
3. Prueba que la derivada direccional  $D_{\vec{u}}f(0, 0) = u_1^3$  cualquiera sea el vector unitario  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ .
4. Decide si  $f$  es diferenciable  $(0, 0)$ . ¿Y en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ?
5. En caso que  $f$  sea diferenciable en  $(1, \frac{\pi}{2})$ , calcula el vector gradiente  $\nabla f(1, \frac{\pi}{2})$ .
6. Usando el apartado anterior si es necesario escribe la ecuación del plano tangente a la función  $f(x, y)$  en el punto  $(1, \frac{\pi}{2})$ .

**Problema 2: 1 punto** Estudiar el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|}{|x| + |y|}$ .**Problema 3: 3.5 puntos**Sea el conjunto  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 \leq 1\}$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x, y) = 4x^2 + 2y^4 - y$ .

- (a) Encuentra todos los extremos relativos de  $f$  en  $D$ .
- (b) Prueba que  $f$  tiene extremos absolutos en  $D$ . Calcúlalos razonadamente.
- (c) ¿Tiene  $f$  extremos absolutos (globales) en  $D \cup \{(x, y) | x \geq 0\}$ ? Justifica tu respuesta y calcúlalos si procede.

## Recuperación parcial 1 DFVV (GRUPO B). 22 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (2 puntos)** Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

---

 PARCIAL 1  de Heffter-Young.       Teorema de Taylor.
 

---

**Problema 1: 3.5 puntos** Se considera la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha \tan(xy)}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a). Decide si para  $\alpha > -1$ , la función  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .
- (b). Para  $\alpha > 0$ , escribe el valor de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
- (c). Demuestra que  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$  cuando  $\alpha > 0$ .
- (d). ¿Es  $f$  diferenciable en  $(0, 0)$ , cuando  $\alpha = 0$ ?. Razona la respuesta.

**Problema 2: 3.5 puntos** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 \cos y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prueba que  $f$  es continua en todo su dominio.
2. Encuentra las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $\mathbb{R}^2$ .
3. Prueba que la derivada direccional  $D_{\vec{u}}f(0, 0) = u_1^3$  cualquiera sea el vector unitario  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ .
4. Decide si  $f$  es diferenciable  $(0, 0)$ . ¿Y en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ?
5. En caso que  $f$  sea diferenciable en  $(1, \frac{\pi}{2})$ , calcula el vector gradiente  $\nabla f(1, \frac{\pi}{2})$ .
6. Usando el apartado anterior si es necesario escribe la ecuación del plano tangente a la función  $f(x, y)$  en el punto  $(1, \frac{\pi}{2})$ .

**Problema 3: 1 punto** Estudiar el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|}{|x| + |y|}$ .



Recuperación 2º parcial DFVV (GRUPO B). 22 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (2 puntos)** Demuestra el **Teorema de la función implícita**.

**Problema 1: 4 puntos** Sea el conjunto  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 \leq 1\}$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x, y) = 4x^2 + 2y^4 - y$ .

(a) Encuentra todos los extremos relativos de  $f$  en  $D$ .

(b) Prueba que  $f$  tiene extremos absolutos en  $D$ . Calcúlalos razonadamente.

(c) ¿Tiene  $f$  extremos absolutos (globales) en  $D \cup \{(x, y) | x \geq 0\}$ ? Justifica tu respuesta y calcúlalos si procede.

**Problema 2: 4 puntos**

Si  $x_1, x_2, x_3$  son las raíces del polinomio  $p(x) = x^3 + y_1x^2 + y_2x + y_3$ , existe la siguiente relación con los coeficientes:

$$\begin{aligned} y_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3), \\ y_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, & (\text{Ecuaciones de Cardano-Vieta}) \\ y_3 &= -x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Demostrar que en un entorno de una terna de raíces reales  $(a, b, c)$  distintas dos a dos está definida una función de clase  $C^1$  que expresa las raíces en término de los coeficientes. Calcula una de las derivadas parciales de una de las componentes de dicha función.

## EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO B). 10 de septiembre de 2015

**Teoría. (2 puntos)** Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

**Teorema de Taylor.**       **Teorema de a función implícita.**

---

**Problema 1** Se considera la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{2\alpha} \log(1 + x^2)}{\sqrt{x^4 + y^4}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \beta, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Decide para que valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , la función  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Para dichos valores de  $\alpha, \beta$ , escribe el valor de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
- (c) ¿Es diferenciable  $f$  en  $(0, 0)$  para todos los valores de  $\alpha$  encontrados en el apartado anterior? En caso de que no, encuentra para que valores de  $\alpha$   $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ . Razona la respuesta.

**Problema 2:** Sea la función  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2)e^{-y^2}}{1 + x^2 + y^2}.$$

- (a) ¿Decide si es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ ? Si no lo es, describe la región donde lo sea. En dicha región escribe la derivada de  $f$ .
- (b) Encuentra, si es posible, las derivadas parciales de  $f$  en el punto  $A = (\sqrt{\pi}, 0)$ .
- (c) Encuentra el gradiente de  $f$  en el punto  $A$  anterior. ¿En que dirección decrece más rápidamente  $f$  en  $A$ ?
- (d) Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie  $z = f(x, y)$  en el punto  $A$  anterior.
- (d) ¿Que ángulo forman los planos tangente a  $f$  en  $A = (\sqrt{\pi}, 0)$  y  $B = (0, 0)$ ?

**Problema 3:** Sea el conjunto  $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \leq 1\}$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x, y) = (x + y)^2 + (z + 1)^2 + 4$ .

- (a) Encuentra todos los puntos singulares  $f$  en  $D$ .
- (b) Cuales de dichos puntos singulares son extremos (máximos y mínimos) relativos de  $f$  en  $D$ .
- (c) Prueba que  $f$  tiene extremos absolutos en  $D$ . Calcúlalos razonadamente.

1º PARCIAL DFVV (GRUPO B). 23 de noviembre de 2015

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (3 Puntos)** Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

Teorema de Schwarz

Teorema del valor medio

**Problema 1. (3 ptos.)** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{|x|^\alpha \arcsin y}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$ ,

$\alpha > 0$ .

1. Calcula, si es posible, los límites  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  y  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$ .
2. ¿Para qué valores de  $\alpha$  se puede definir  $f$  en  $(0, 0)$  de forma que  $f$  sea continua en  $\mathbb{R}^2$ ? Justifica la respuesta.
3. Calcula, si es posible, las derivadas parciales de  $f$  en  $(0, 0)$ .
4. ¿Para que valores de  $\alpha$   $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ ? Justifica la respuesta y calcula la derivada total (diferencial) de  $f$  en  $(0, 0)$  si existe.

**Problema 2. (4 ptos.)** Sea  $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g(x, y, z) = -y \sin(z + x) + z^3 e^{x^2 + y^2} + xyz$ .

1. Decide si  $g$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^3$ . Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}$  y  $\frac{\partial g}{\partial z}$ .
3. ¿Cuánto vale la derivada  $g$  en el punto  $(\pi/2, 1, 0)$  según la dirección del vector  $(-3, 0, 4)$ .
4. ¿En que dirección es máxima la variación de  $g$  en dicho punto  $(\pi/2, 1, 0)$ ?  
¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por  $w = g(x, y, z)$  en el punto  $(\pi/2, 1, 0)$ ?
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto  $(\pi/2, 1, 0)$ .

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (3 puntos)** Demuestra el **Teorema de la función implícita**.

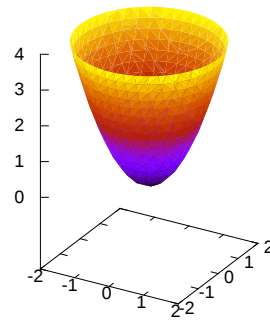
---

**Problema 1. 4 puntos:** Sea la función  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = z^2 - 2z + 2y^2 + 4x^2 - 3,$$

donde  $A$  es la región definida por (paraboloide elíptico)

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}.$$



1. Calcula todos los puntos críticos de dicha función.
2. ¿Alcanza  $f$  su máximo y mínimo globales en  $A$ ? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de  $f$ .

**Problema 2. 3 puntos:** Sea la ecuación  $e^{z^2-1} + (xe^{y^2} + e^{x^2}y)z - 1 = 0$ .

1. Para que valores de  $a \in \mathbb{R}$  la ecuación anterior define una función  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(0, 0, a)$ . ¿Para alguno de dichos puntos la función  $z = f(x, y)$  es diferenciable? ¿Cuántas veces? Justifica la respuesta.
2. Calcula, si es posible, las derivadas parciales  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$  en el entorno de los puntos obtenidos en el apartado 1.
3. Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la curva  $z = f(x, y)$  en los puntos obtenidos en el apartado 1.

## EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO B). 20 de enero de 2016

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (2 puntos)** Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:
 de Heffter-Young.       Teorema de la función implícita.
**Problema 1: 3 puntos** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha \arctan(y)}{x^4 + 2y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prueba que  $f$  es continua en todo su dominio para  $\alpha > 2$ .
2. Encuentra, si existen, las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $\mathbb{R}^2$ .
3. Decide para que valores de  $\alpha$   $f$  es diferenciable  $(0, 0)$ . ¿Y en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ?

**Problema 2: 1 punto**

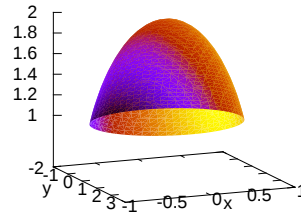
Estudiar el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x|y|^{3/2})}{|x|^2 + |y|}$ .

**Problema 3: 4 puntos**Sea la función  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = z^2 - 2z + y^2 - 2y + 2x^2 - 3,$$

donde  $A$  es la región definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}.$$



1. Calcula todos los posibles extremos locales de dicha función.
2. ¿Alcanza  $f$  su máximo y mínimo globales en  $A$ ? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de  $f$ .

## Recuperación parcial 1 DFVV (GRUPO B). 20 de enero de 2016

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (2 puntos)** Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas: de Heffter-Young.       Teorema de Taylor.**Problema 1. 3.5 puntos:** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha \arctan(y)}{x^4 + 2y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prueba que  $f$  es continua en todo su dominio para  $\alpha > 2$ .
2. Encuentra, si existen, las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $\mathbb{R}^2$ .
3. Decide para que valores de  $\alpha$   $f$  es diferenciable  $(0, 0)$ . ¿Y en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ?

**Problema 2. 1 punto:**Estudiar el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x|y|^{3/2})}{|x|^2 + |y|}$ .**Problema 2. 3.5 puntos:** Sea la función

$$g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, g(x, y, z) = x^2 + ye^{xz}.$$

1. Decide si  $g$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ . Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}$  y  $\frac{\partial g}{\partial z}$ .
3. ¿Cuánto vale la derivada  $g$  en el punto  $(1, 2, 0)$  según la dirección del vector  $(3, 0, -4)$ .
4. ¿En que dirección es máxima la variación de  $g$  en dicho punto  $(1, 2, 0)$ ? ¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por  $w = g(x, y, z)$  en el punto  $(1, 2, 0)$ .
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto  $(1, 2, 0)$

Recuperación 2º parcial DFVV (GRUPO B). 20 de enero de 2016

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (2 puntos)** Demuestra el **Teorema de la función implícita**.

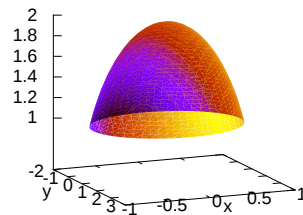
---

**Problema 1. 4 puntos:** Sea la función  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = z^2 - 2z + y^2 - 2y + 2x^2 - 3,$$

donde  $A$  es la región definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}.$$



1. Calcula todos los posibles extremos locales de dicha función.
2. ¿Alcanza  $f$  su máximo y mínimo globales en  $A$ ? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de  $f$ .

**Problema 2. 4 puntos:** Sea la ecuación  $x^2z - z^2x + x \cos(xz^2) - 1 = 0$

1. Para que valores de  $a, b \in \mathbb{R}$  la ecuación anterior define una función  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(a, b, 0)$ . ¿Es para alguno de dichos puntos la función  $z = f(x, y)$  diferenciable? ¿Cuántas veces? Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$  en los puntos anteriores donde sea posible.
3. En que dirección es máxima la variación de  $z = f(x, y)$  en el punto  $(1, 1, 0)$ .

## SUBIR NOTA DFVV (GRUPO B). 20 de enero de 2016

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Problema 1. 2 puntos:** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha \arctan(y)}{x^4 + 2y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

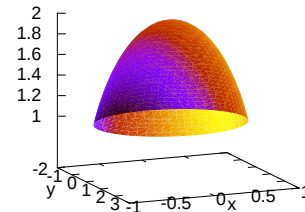
1. Prueba que  $f$  es continua en todo su dominio para  $\alpha > 2$ .
2. Decide para que valores de  $\alpha$   $f$  es diferenciable  $(0, 0)$ . ¿Y en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ?

**Problema 2. 4 puntos:** Sea la función  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = z^2 - 2z + y^2 - 2y + 2x^2 - 3,$$

donde  $A$  es la región definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}.$$



1. Calcula todos los posibles extremos locales de dicha función.
2. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de  $f$ . Justifica tu respuesta.

**Problema 3. 1 punto:** Estudiar el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x|y|^{3/2})}{|x|^2 + |y|}$ .



## EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO B). 1 de septiembre de 2016

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (2 puntos)** Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

de Schwarz.       Condición suficiente de extremo).

---

**Problema 1: 3 puntos** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y|^\alpha \arcsin(2x)}{4x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

1. ¿Para qué valores de  $\alpha$   $f$  es continua en todo su dominio?.
2. Encuentra, si existen, las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $\mathbb{R}^2$ .
3. Decide para que valores de  $\alpha$   $f$  es diferenciable  $(0, 0)$ . ¿Y en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ? Justifica tu respuesta.

**Problema 2: 1 punto**

Estudiar el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{y(x - \sin(x))}{x^4 + 3y^2}$ .

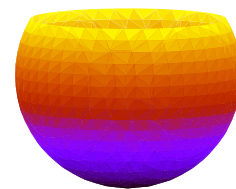
**Problema 3: 4 puntos** Sea la función  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 1,$$

donde  $A$  es la región definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq \sqrt{3}\}.$$

región A



1. Calcula todos los posibles extremos locales de dicha función.
2. ¿Alcanza  $f$  su máximo y mínimo globales en  $A$ ? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de  $f$ .

1º PARCIAL DFVV (GRUPO B). 30 de noviembre de 2017

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_

**Teoría. (3 Puntos)** Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

De la equivalencia de las normas en  $\mathbb{R}^n$   Del valor medio

**Problema 1. (3 ptos.)** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{|x|^\alpha \cos(x) \arcsin(xy)}{\sqrt{3x^2 + y^2}}$ ,  
 $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Demuestra que para  $\alpha > -1$  existe el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .
2. ¿Qué valor ha de tomar  $f$  en  $(0, 0)$  para que sea continua en  $\mathbb{R}^2$ ?  
Justifica la respuesta
3. Calcula, si es posible, las derivadas parciales de  $f$  en  $(0, 0)$ .
4. ¿Para que valores de  $\alpha$   $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ ? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de  $f$  en  $(0, 0)$  si existe.
5. ¿Es diferenciable para  $\alpha = 0$ ? Justifica la respuesta.

**Problema 2. (4 ptos.)** Sea  $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) = \frac{x^2 \cos(y) + y^2 \cos(x)}{2}$ .

1. Decide si  $g$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ . Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial g}{\partial x}$  y  $\frac{\partial g}{\partial y}$ .
3. ¿Cuánto vale la derivada de  $g$  en el punto  $(0, \pi/4)$  según la dirección del vector  $(1, -1)$ .
4. ¿En que dirección es máxima la variación de  $g$  en dicho punto  $(0, \pi/4)$ ?  
¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por  $z = g(x, y)$  en el punto  $(0, \pi/4)$ ?
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto  $(0, \pi/4)$ .

2º Parcial DFVV (GRUPO B). 11 de enero de 2017

**Apellidos, Nombre:** \_\_\_\_\_

**Teoría. (2 puntos)** Demuestra el **Teorema de la función implícita**.

**Problema 1. (5 ptos.)**

1. Dada la elipse de ecuación  $x^2 - xy + y^2 = 1$ , encuentra los puntos más cercanos y alejados del punto  $(2, 2)$ .

Puntos más cercanos: \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ ...

Puntos más alejados: \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ ...

2. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + 4y - 4$ .

- a) Decide si  $f$  tiene extremos relativos en  $\mathbb{R}^2$ . En caso de que los tenga calcúlalos.

¿Tiene extremos? \_\_\_\_\_.

¿Dónde? \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ ...

- b) Decide si  $f$  tiene extremos absolutos sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = 9$  y en caso de tenerlos encuentra dónde se encuentran y cuáles son sus valores.

¿Tiene extremos? \_\_\_\_\_.

Máximos locales \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, ...

Mínimos locales \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ ...

**Problema 2. (3 ptos.)** Sea la ecuación

$$F(x, y, z) = x^2 e^{-z+y^2+a} + x^2 y^2 z^2 - x^3 y, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. ¿Para qué valores de  $a$  la ecuación anterior define una función  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(1, 1, 0)$ ? Justifica la respuesta.

Valor de  $a$  \_\_\_\_\_.

2. ¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(1, 1, 0)$ ? Justifica la respuesta.

No. de veces: \_\_\_\_\_.

3. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en dicho punto.

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. Calcula la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(1, 1)$  según la dirección  $u = (2, -1)$ .

$$D_u(f(1, 1)) =$$

5. Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  en el punto  $(1, 1, 0)$ .

## Exámenes Parciales 1 y 2 de problemas DFVV (GRUPO A).2017/2018

**Problema 1. (2.5 ptos.)**

Sea  $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{|y|^\alpha \cos(x) \sin(x)}{\sin(x^2) + \sin(y^2)}$ ,  
 $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Demuestra que para  $\alpha > 1$  existe el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .
2. ¿Qué valor ha de tomar  $f$  en  $(0, 0)$  para que sea continua en  $\mathbb{R}^2$ ? Justifica la respuesta
3. Calcula, si es posible, las derivadas parciales de  $f$  en  $(0, 0)$ .
4. Demuestra que para  $\alpha > 2$   $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ ? Justifica la respuesta.
5. ¿Es diferenciable para  $\alpha = 2$ ? Justifica la respuesta.

**Problema 2. (2.5 ptos.)** Sea  $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) = xe^y + ye^x + 2xy$ .

1. Decide si  $g$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ . Justifica la respuesta.
2. Calcula, si es posible, las derivadas parciales  $\frac{\partial g}{\partial x}$  y  $\frac{\partial g}{\partial y}$ , así como todas las derivadas parciales de orden 2.
3. ¿Cuánto vale la derivada  $g$  en el punto  $(0, 0)$  según la dirección del vector  $(2, 1)$ .
4. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto  $(0, 0)$ .

**Problema 3. (2.5 ptos.)** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + 4y - 4$ .

1. Decide si  $f$  tiene extremos relativos en  $\mathbb{R}^2$ . En caso de que los tenga calcúlalos.
2. Sea la elipse de ecuación  $2x^2 + 4y^2 = 1$ . Decide si  $f$  tiene extremos absolutos sobre dicha elipse y en caso de tenerlos encuentra dónde se encuentran y cuál es su valor.

**Problema 4. (2.5 ptos.)** Sea la ecuación  $F(x, y, z) = -3xe^{z^2+y^2-1} + x^2z^2 + 3y^2z - a = 0$ , con  $a \in \mathbb{R}$ .

1. ¿Para qué valores de  $a$  la ecuación anterior define una función  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(0, 1, 1)$ ? Justifica la respuesta.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(0, 1, 1)$ ? Justifica la respuesta.*
3. *Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en dicho punto.*
4. *Calcula la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(0, 1)$  según la dirección  $(1, 1)$ .*
5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  en el punto  $(0, 1, 1)$ .*

## Examen final de DFVV (GRUPO A).2017/2018

**Problema 1.** (3 ptos) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{|y|^\alpha e^{2x} \sin(x)}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$ ,  
 $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Demuestra que para  $\alpha > 0$  existe el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  y calcúlalo.

2. ¿Qué valor ha de tomar  $f$  en  $(0,0)$  para que sea continua en  $\mathbb{R}^2$ ?  
 Justifica la respuesta

$$f(0,0) =$$

3. Calcula cuando sea posible las derivadas parciales de  $f$  en  $(0,0)$ .

$$f_x(0,0) =$$

$$f_y(0,0) =$$

4. ¿Para que valores de  $\alpha$   $f$  es diferenciable en  $(0,0)$ ? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de  $f$  en  $(0,0)$  si existe.  
 $Df(0,0) =$  \_\_\_\_\_

5. ¿Es diferenciable para  $\alpha = 1$ ? \_\_\_\_ Justifica la respuesta.

**Problema 2.** (4 ptos) Sea la superficie  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  definida por la fórmula  $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$ .

1. Sea la función  $f : S \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x - y + \sqrt{3}z$  definida sobre  $S$ .  
 Encuentra todos los puntos críticos de  $f$  en  $S$  y decide si son extremos locales o puntos de silla.

Puntos \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, ...

Puntos \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, ...

2. ¿Tiene  $f$  extremos absolutos sobre  $S$ . Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos. ¿Tiene extremos absolutos? \_\_\_\_.

Máximo \_\_\_\_\_ Mínimo \_\_\_\_\_

3. Encuentra, si existen, los puntos de la superficie  $S$  más próximos y más alejados del punto  $(0, 0, 3)$ .

Puntos más cercanos: \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ ...

Puntos más alejados: \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ ...

**Problema 3.** (3 pts)

Sea la ecuación  $F(x, y, z) = x^2 y^2 e^{z^2+y^2+x^2-a} + 4xyz - x^4 - 3 = 0$ , con  $a \in \mathbb{R}$ .

1. ¿Para qué valores de  $a$  la ecuación anterior define una función  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(1, 2, 0)$ ? Justifica la respuesta.

2. ¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(1, 2, 0)$ ? Justifica la respuesta.

3. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en dicho punto.

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. Calcula la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(1, 2)$  según la dirección  $(-1, 2)$ .

5. Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  en el punto  $(1, 2, 0)$ .

6. Escribe la expresión del polinomio de Taylor de orden 1 de  $f(x, y)$  alrededor del punto  $(1, 2)$ .



Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Lee atentamente las instrucciones y marca con una cruz el examen elegido. En caso contrario el profesor elegirá.

- Recuperación 1º parcial  Recuperación 2º parcial  Examen final  
 Examen para subir nota

El examen debe estar escrito con bolígrafo y debe ser legible y sin tachaduras. Cada uno de los exámenes consta de las siguientes partes:

**Teoría.** Demuestra uno de los siguientes teoremas:

1º prueba (3 puntos):  **Schwarz** o  **Teorema de Taylor con resto.**

2º prueba (2 puntos): **Condiciones necesarias y suficiente de extremos.**

Final (3 puntos):  **Schwarz** o  **Condición suficiente de extremos.**

### Problemas

Recuperación 1º parcial: Problemas 1 (3 puntos) y 2 (4 puntos)

Recuperación 2º parcial: Problemas 3 (3 puntos) y 4 (5 puntos)

Examen final: Problemas 1 (3 puntos) y 4 (4 puntos).

Examen para subir nota: Problemas 4 (4 puntos), 5 (4 puntos) y 6 (2 puntos).

**Problema 1.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x,y) = \frac{|x|^\alpha e^{3x^2} \arcsin(2x)}{\sqrt{2x^2 + y^2}}$ ,  
 $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Demuestra si  $\alpha > 0$  existe el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  y calcúlalo.
2. ¿Qué valor ha de tomar  $f$  en  $(0,0)$  para que sea continua en  $\mathbb{R}^2$ ?  
Justifica la respuesta

$$f(0,0) =$$

3. Calcula cuando sea posible las derivadas parciales de  $f$  en  $(0,0)$ .

$$f_x(0,0) =$$

$$f_y(0,0) =$$

4. ¿Para que valores de  $\alpha$   $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ ? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de  $f$  en  $(0, 0)$  si existe.

$$Df(0, 0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

5. ¿Es diferenciable para  $\alpha = 1$ ? \_\_\_\_ Justifica la respuesta.

**Problema 2.** Sea  $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g(x, y, z) = (y^2 + x^2) e^{z^2-1} - 2 e^{x^2-1} (z^2 + y^2)$ .

1. Decide si  $g$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ . Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}$  y  $\frac{\partial g}{\partial z}$ .
3. ¿Cuánto vale la derivada  $g$  en el punto  $(1, 0, 1)$  según la dirección del vector  $(3, 4, 0)$ .
4. ¿En que dirección es máxima la variación de  $g$  en dicho punto  $(1, 0, 1)$ ?  
¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por  $w = g(x, y, z)$  en el punto  $(1, 0, 1)$ ?
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de  $g$  en el punto  $(0, 0, 0)$ .

**Problema 3.** Sea  $F(x, y, z) = x^2 y^2 e^{z^2 + y^2 + x^2 - a} + 4xyz - x^4 - 3 = 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

1. ¿Para qué valores de  $a$  la ecuación anterior define una función  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(1, 2, 0)$ ? Justifica la respuesta.
2. ¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante  $z = f(x, y)$  en el entorno  $U$  del punto  $(1, 2, 0)$ ? Justifica la respuesta.
3. Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en dicho punto.

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. Calcula la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(1, 2)$  según la dirección  $(-1, 2)$ .
5. Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  en el punto  $(1, 2, 0)$ .

6. Escribe la expresión del polinomio de Taylor de orden 1 de  $f(x, y)$  alrededor del punto  $(1, 2)$ .

**Problema 4.** Sea la superficie  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  definida por  $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$ .

1. Sea la función  $f : S \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x - y + \sqrt{3}z$  definida sobre  $S$ . Encuentra todos los puntos críticos de  $f$  en  $S$  y decide si son extremos locales o puntos de silla.

Puntos \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, ...

Puntos \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, ...

2. ¿Tiene  $f$  extremos absolutos sobre  $S$ . Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos. ¿Tiene extremos absolutos? \_\_\_\_\_.

Máximo absoluto \_\_\_\_\_ Mínimo absoluto \_\_\_\_\_

3. Encuentra, si existen, los puntos de la superficie  $S$  más próximos y más alejados del punto  $(0, 0, 3)$ .

Puntos más cercanos: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ ...

Puntos más alejados: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ ...

**Problema 5.** Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  y sea  $f(x, y) = \frac{|x|^\alpha \cos(2x) \arctan(x)}{\sin(x^2) + \sin(y^2)}$ .

- Encuentra la mayor región de  $\mathbb{R}^2$  donde se pueda definir  $f$ .
- En los puntos donde no esté definida decide si para algún valor de  $\alpha$  se puede redefinir de forma que sea continua. Justifica la respuesta
- Calcula, si es posible, las derivadas parciales de  $f$  en  $(0, 0)$ .
- Demuestra que para  $\alpha > 2$   $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ ? Justifica la respuesta.
- ¿Es diferenciable para  $\alpha = 2$ ? Justifica la respuesta.

**Problema 6.** Calcula, si es posible, el siguiente límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 3y^2 + 6xy - 5xy^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} =$$