1º PARCIAL DFVV (GRUPO **B**). 25 de noviembre de 2014

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ Toda aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ de un espacio normado de dimensión finita $\mathbb{X}$ en otro espacio normado cualquiera $\mathbb{Y}$ es acotada.

☐ **Teorema del valor medio**: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diferenciable en A abierto y conexo. Sean $a, b \in A$ y sea s el segmento que los une. Entonces, para cada vector $v \in \mathbb{R}^m$ existe un punto z en el interior del segmento s tal que $\langle h, f(b) - f(a) \rangle = \langle h, Df(z)(b-a) \rangle$.

Problema 1 (3.5 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \sin xy}{\sqrt{2x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a). Demuestra que para $\alpha > -1$, la función f es continua en $(0,0)$.

(b). Para $\alpha > -1$, escribe el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c). Demuestra que f es diferenciable en $(0,0)$ cuando $\alpha > 0$.

(d). ¿Para $\alpha = 0$ es f diferenciable en $(0,0)$? Razona la respuesta.

Problema 2 (3.5 puntos) Sea la función $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$,

$$g(x,y,z) = xye^z + xz\sin(y) + x^4yz.$$

1. Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. En caso de ser diferenciable escribe la derivada total de g en un punto (x,y,z).
4. ¿Cuánto vale el gradiente de g en $(1,\pi,0)$?
5. Calcula la derivada de g en el punto $(1,\pi,0)$ según la dirección del vector $(1,-1,1)$.
6. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = g(x,y,z)$ en el punto $(1,\pi,0)$.
7. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1,\pi,0)$.

2º PARCIAL DFVV (GRUPO **B**). 15 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Enuncia y demuestra la condición necesaria y suficiente de extremo libre de una función de varias variables.

Problema 1. ***(2 ptos.)***

Sea la ecuación $F(x, y, z) := x^2y^2z^2 + \exp(x + y + 2z) + 5y^3 - 4y - 2 = 0$.

1. Prueba que la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(-1, 1, 0)$ y que dicha función es una función $C^{(\infty)}(U)$ en dicho U.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
3. Calcula la derivada direccional de f en el punto $(-1, 1)$ según la dirección $(1, 1)$. ¿En que dirección dicha derivada direccional es mínima?

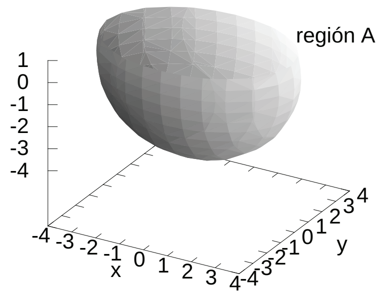
Problema 2. ***(5 ptos.)***

Sea la función

$f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 4x,$

donde A es la región definida por

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 16, \; z \leq 1\}.$



1. Calcula todos los extremos locales de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO **B**). 22 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **de Heffter-Young**. ☐ **Teorema de la función implícita**.

Problema 1: 3.5 puntos Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cos y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

1. Prueba que f es continua en todo su dominio.
2. Encuentra las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$.
3. Prueba que la derivada direccional $D_{\hat{u}}f(0,0) = u_1^3$ cualquiera sea el vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$.
4. Decide si f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
5. En caso que f sea diferenciable en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, calcula el vector gradiente $\nabla f\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Usando el apartado anterior si es neceario escribe la ecuación del plano tangente a la función $f(x,y)$ en el punto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Problema 2: 1 punto Estudiar el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{|x|+|y|}$.

Problema 3: 3.5 puntos

Sea el conjunto $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^4 \leq 1\}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = 4x^2 + 2y^4 - y$.

(a) Encuentra todos los extremos relativos de f en D.

(b) Prueba que f tiene extremos absolutos en D. Calcúlalos razonadamente.

(c) ¿Tiene f extremos absolutos (globales) en $D \cup \{(x,y) | x \geq 0\}$? Justifica tu respuesta y calcúlalos si procede.

Recuperación parcial 1 DFVV (GRUPO **B**). 22 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: ______________________________

Teoría. (2 puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

PARCIAL 1 ☐ **de Heffter-Young**. ☐ **Teorema de Taylor**.

Problema 1: 3.5 puntos Se considera la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^\alpha\tan(xy)}{\sqrt{x^2+4y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a). Decide si para $\alpha>-1$, la función f es continua en $(0,0)$.

(b). Para $\alpha>0$, escribe el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c). Demuestra que f es diferenciable en $(0,0)$ cuando $\alpha>0$.

(d). ¿Es f diferenciable en $(0,0)$, cuando $\alpha=0$?. Razona la respuesta.

Problema 2: 3.5 puntos Sea la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3\cos y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

1. Prueba que f es continua en todo su dominio.
2. Encuentra las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$.
3. Prueba que la derivada direccional $D_{\hat{u}}f(0,0)=u_1^3$ cualquiera sea el vector unitario $\vec{u}=(u_1,u_2)$.
4. Decide si f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?
5. En caso que f sea diferenciable en $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$, calcula el vector gradiente $\nabla f\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.
6. Usando el apartado anterior si es neceario escribe la ecuación del plano tangente a la función $f(x,y)$ en el punto $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

Problema 3: 1 punto Estudiar el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x|y|}{|x|+|y|}$.

Recuperación 2º parcial DFVV (GRUPO **B**). 22 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: ______________________________

Teoría. (2 puntos) Demuestra el **Teorema de la función implícita**.

Problema 1: 4 puntos Sea el conjunto $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^4 \leq 1\}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = 4x^2 + 2y^4 - y$.

(a) Encuentra todos los extremos relativos de f en D.

(b) Prueba que f tiene extremos absolutos en D. Calcúlalos razonadamente.

(c) ¿Tiene f extremos absolutos (globales) en $D \cup \{(x, y)|x \geq 0\}$? Justifica tu respuesta y calcúlalos si procede.

Problema 2: 4 puntos

Si x_1, x_2, x_3 son las raices del polinomio $p(x) = x^3 + y_1x^2 + y_2x + y_3$, existe la siguiente relación con los coeficientes:

$$\begin{aligned} y_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3), \\ y_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \qquad \text{(Ecuaciones de Cardano-Vieta)} \\ y_3 &= -x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Demostrar que en un entorno de una terna de raices reales (a, b, c) distintas dos a dos est

SUBIR NOTA DFVV (GRUPO **B**). 22 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: ____

Problema 1: Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cos y}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

1. Prueba que f es continua en todo su dominio.
2. Prueba que la derivada direccional $D_{\hat{u}} f(0,0) = u_1^3$ cualquiera sea el vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$.
3. Decide si f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Problema 2: Estudiar el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{|x|+|y|}$.

Problema 3: Sea el conjunto $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^4 \leq 1\}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = 4x^2 + 2y^4 - y$.

(a) Encuentra todos los extremos relativos de f en D.

(b) Prueba que f tiene extremos absolutos en D. Calcúlalos razonadamente.