1º PARCIAL DFVV (GRUPO **B**). 3 de diciembre de 2013

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Condición suficiente de diferenciabilidad**: Si la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene derivadas parciales con respecto a cada una de las variables y estas son continuas en $a \in A$, entonces f es diferenciable en a.

☐ **Teorema del valor medio**: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diferenciable en A abierto y conexo. Sean $a, b \in A$ y sea s el segmento que los une. Entonces, para cada vector $v \in \mathbb{R}^m$ existe un punto z en el interior del segmento s tal que $\langle h, f(b) - f(a)\rangle = \langle h, Df(z)(b-a)\rangle$.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea la función* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = |y|^\alpha \tan x$, $\alpha > 0$.

1. *Calcula* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
2. *¿Para qué valores de* α f *es continua en* $\mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k\in\mathbb{Z}}$*?*
3. *Calcula sus derivadas parciales de* f.
4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula la derivada total de* f *en* $(0,0)$ *si existe.*
5. *Calcula la derivada total de* f *en* $(1,\pi)$.

Problema 2. ***(4 ptos.)****Sea la función* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + ye^{x\,z}$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*
2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. *¿Cuánto vale la derivada* g *en el punto* $(1,2,0)$ *según la dirección del vector* $(3/4, \sqrt{3}/2, 1/2)$.
4. *¿En que dirección es máxima la variación de* g *en dicho punto* $(1,2,0)$*? ¿Y mínima?*
5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x,y,z)$ *en el punto* $(1,2,0)$.
6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* $(1,2,0)$.

2º PARCIAL DFVV (GRUPO **B**). 10 de enero de 2014

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Enuncia y demuestra la condición necesaria y suficiente de extremo libre de una función de varias variables.

Problema 1. ***(2 ptos.)***

Sea la ecuación $z^3 + 2(x+y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$.

1. Prueba que la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $(0,-1,1)$ y que dicha función es una función $C^{(\infty)}(U)$ en dicho U.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
3. Escribe el polinomio de Taylor de orden 1 de f en $(0,-1,1)$.

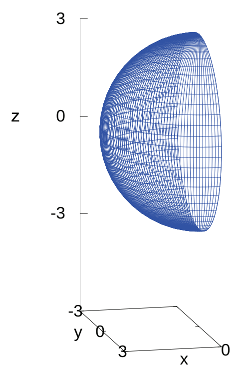
Problema 2. ***(5 ptos.)***

Sea la función

$f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x+4y-3,$

donde A es la región definida por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ |x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ x \geq 0\}.$$



1. Calcula todos los extremos locales de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO **B**). 7 de febrero de 2014

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 puntos) Enuncia y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **de Heffter-Young**. ☐ **Teorema de la función implícita**.

Problema 1 (3.5 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \arctan y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a). Demuestra que para $\alpha > 0$, la función f es continua en $(0,0)$.

(b). Para $\alpha > 0$, escribe el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c). Demuestra que f es diferenciable en $(0,0)$ cuando $\alpha > 1$.

(d). ¿Es f diferenciable en $(0,0)$, cuando $\alpha = 1$?. Razona la respuesta.

Problema 2 (1 punto) Estudia el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x-\sin x)}{x^4+y^2}$$

y calcúlalo caso de que exista.

Problema 3 (3.5 puntos)
Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \log\Big(x^2+y^2\Big)$.

(a) Encuentra todos los extremos relativos de f en la región

$$A = \{(x,y) : x \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(b) Prueba que f tiene extremos absolutos en dicha región A. Calcúlalos razonadamente.

(c) Prueba que f no tiene ni extremos relativos y ni absolutos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Para el examen final hay que resolver los problemas 1, 2 y 3.
Recuperación 1º parcial: Problemas 1 y 4
Recuperación 2º parcial: Problemas 3 y 5
Para subir nota hay que resolver los problemas 1c,d, 3 y 6.

RECUPERACIÓN 1º o 2º PRUEBA o subir nota DFVV (GRUPO **B**). 7/2/2014

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Enuncia y demuestra uno de los siguientes teoremas:

1º prueba: ☐ **de Heffter-Young** o ☐ **Teorema de Taylor con resto**.

2º prueba: **Teorema de la función implícita**.

Problema 4 (3.5 puntos)
Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = (x\cos(y^2 + 1) + y\sin(ze^x))e^z$.

1. Decide si f es diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. En caso de ser diferenciable escribe la derivada total de f en un punto (x, y, z).
4. ¿Cuánto vale la derivada f en el punto $(0, 1, -1)$ según la dirección del vector $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = f(x, y, z)$ en el punto $(0, 1, -1)$.
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0, 1, -1)$.

Problema 5 (3.5 puntos) Sea la ecuación $z^3 - xyz + y^2 = 16$.

a) Prueba que dicha ecuación define una función $z = f(x, y)$ en cierto entorno U de $(1, 4, 2)$ y que dicha función f es $C^{(p)}(U)$ para todo $p \in \mathbb{N}$.
b) Calcula la expresión formal de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un punto (x, y) de U.
c) Calcula los valores numéricos de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 4)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 4)$. ¿Cuánto vale la derivada direccional de f en la dirección $(1, -2)$ en dicho punto $(1, 4)$?
d) Calcula el valor de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 4)$

Problema 6 Calcula razonadamente el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - e^{|xy|^{3/2}}}{\arctan^2(x) + \arctan^2(y)}.$$

Para el examen final hay que resolver los problemas 1, 2 y 3.
Recuperación 1º parcial: Problemas 1 y 4
Recuperación 2º parcial: Problemas 3 y 5
Para subir nota hay que resolver los problemas 1c,d, 3 y 6.