2. Cálculo de primitivas

Definición 2.1 *Se dice que una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$ sobre un intervalo (a, b) si para todo x de (a, b) se tiene que $F'(x) = f(x)$.*

Por ejemplo, la función $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x) = 2x$ en todo $\mathbb{R}$ pues $(x^2)' = 2x$.

El siguiente teorema es una consecuencia trivial del teorema del valor medio de Lagrange.

Teorema 2.1 *Sean $F_1(x)$ y $F_2(x)$ dos primitivas de la función $f(x)$ en (a, b). Entonces, para todo x de (a, b), $F_1(x) - F_2(x) = const$. Es decir dada una función $f(x)$ sus primitivas difieren en una constante (en adelante denotaremos por C a una constante cualquiera).*

Definición 2.2 *El conjunto de todas las primitivas de una función $f(x)$ definida en (a, b) se denomina integral indefinida de $f(x)$ y se denota por $\displaystyle\int f(x)\,dx$. De manera que, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$,*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{2.3}$$

Mediante una simple derivación es sencillo comprobar el siguiente

Teorema 2.2 *(Propiedades de la integral indefinida.)*

1. $\displaystyle\frac{d}{d\,x}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$
2. $\displaystyle\int dF(x) = F(x) + C$
3. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int [A \cdot f(x)]\,dx = A \int f(x)\,dx$

Teorema 2.3 Tabla de Integrales

1. $\displaystyle\int 0\,dx = C$
2. $\displaystyle\int 1\,dx = x + C$
3. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \qquad \alpha \neq -1$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$
5. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C, \qquad a > 0, a \neq 1$
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\operatorname{cotan} x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \operatorname{arc\,sen} x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \begin{cases} \arctan x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\, dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

14. $\displaystyle\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$

15. $\displaystyle\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\, dx = \tanh x + C$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x}\, dx = \coth x + C$

2.1. Métodos de integración.

2.1.1. Integración por cambio de variable.

Teorema 2.4 *Sea $t = \phi(x)$ una función derivable en x y sean $X = (a,b)$ el dominio y $T = \phi[(a,b)]$ la imagen de $\phi(x)$. Supongamos que sobre el conjunto T existe la primitiva de la función $g(t)$, o sea,*

$$\int g(t)dt = G(t) + C.$$

Entonces sobre todo el conjunto (a,b) la función $g[\phi(x)]\phi'(x)$ tiene una primitiva y además

$$\int g[\phi(x)]\phi'(x)\, dx = G[\phi(x)] + C.$$

Demostración: Basta notar que $(G[\phi(x)])' = G'[\phi(x)]\phi'(x) = g[\phi(x)]\phi'(x)$. ∎

Ejemplo 2.1

a) Calcular $\int \cos(2x)\, dx$. Como la integral no es de la tabla es necesario convertirla en una de la tabla. Para ello hacemos:

$$\int \cos(2x)\, dx = \left\{ \begin{array}{c} y = 2x \\ dy = 2\, dx \end{array} \right\} = \int \cos(y)\frac{dy}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} y + C = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C$$

b) Calcular $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x\, dx$. Como la integral no es de la tabla es necesario convertirla en una de la tabla:

$$\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x\, dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\operatorname{sen}\, dx \end{array} \right\} = -\int e^y dy = -e^y + C = -e^{\cos x} + C$$

2.1.2. Integración por partes.

Supongamos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son derivables en un intervalo (a, b) y existe la primitiva de la función $v(x)u'(x)$ en (a, b). Entonces, sobre (a, b) existe la primitiva de $u(x)v'(x)$ y se cumple que

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx, \tag{2.4}$$

o en forma diferencial

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \tag{2.5}$$

Demostración: Para probarlo es suficiente notar que $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ y la propiedad 1 del teorema 2.2.

Ejemplo 2.2

a) Calcular $\int x^n \log x\,dx$. Como la integral no es de la tabla es necesario convertirla en una de la tabla. Utilicemos la integración por partes:

$$\int x^n \log x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x) = \log x, & du(x) = \frac{1}{x}\,dx \\ dv(x) = x^n\,dx, & v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right\} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \int \frac{x^n}{n+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right) + C$$

b) Calcular $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$. Como la integral no es de la tabla es necesario convertirla en una de la tabla. Utilicemos la integración por partes:

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x) = e^{ax}, & du(x) = ae^{ax}\,dx \\ dv(x) = \cos bx\,dx, & v(x) = \frac{1}{b}\operatorname{sen} bx \end{array} \right\} = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx.$$

La integral $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$ es de la misma forma que la original así que volveremos a aplicar integración por partes:

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x) = e^{ax}, & du(x) = ae^{ax}\,dx \\ dv(x) = \operatorname{sen} bx\,dx, & u(x) = -\frac{1}{b}\cos bx \end{array} \right\} = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Juntando las dos fórmulas anteriores concluimos que

$$I = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I,$$

de donde, resolviendo la ecuación respecto a I obtenemos:

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{b\operatorname{sen} bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$$

Algunas de las integrales que pueden ser calculadas utilizando la integración por partes son:

1. Las integrales donde aparezcan las funciones $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\log\phi(x)$, potencias enteras de las funciones anteriores, entre otras donde tendremos que escoger como función $u(x)$ a alguna de las funciones anteriores (ver ejemplo a).

2. Las integrales $\int (ax+b)^n \operatorname{sen} cx\,dx$, $\int (ax+b)^n \cos cx\,dx$ y $\int (ax+b)^n e^{cx}\,dx$. Donde para encontrar las primitivas hay que utilizar la fórmula de integración por partes n veces tomando cada vez $u(x) = (ax+b)^n$, $u(x) = (ax+b)^{n-1}$, ..., respectivamente.

3. Las integrales de la forma $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$, $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx$ y $\int \cos(\log x)\,dx$. Para encontrar las primitivas hay que denotar por I a cualquiera de las integrales anteriores, aplicar dos veces integración por partes y resolver la ecuación resultante respecto a I (ver ejemplo b).

2.2. Integración de funciones racionales.

Definición 2.3 *Diremos que una función racional* $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ es simple *si el grado del polinomio* $P_n(x)$ *es menor que el del polinomio* $Q_m(x)$*, o sea, si* $n < m$.

Si $n > m$ entonces podemos dividir los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ de tal forma que

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = p_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}, \qquad \text{donde} \qquad k < m.$$

Teorema 2.5 *Supongamos que* $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *es una fracción simple, y que el polinomio denominador se puede factorizar de la siguiente forma*

$$Q_n(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_p)^{n_p} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_k x + q_k)^{m_k}, \tag{2.6}$$

donde $x_1, ..., x_p$ *son las raíces reales de* $Q_m(x)$*, y los factores* $x^2 + p_i x + q_i$*,* $i = 1, .., k$ *no tienen raíces reales. Entonces, la fracción simple* $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *se puede descomponer en las siguientes fracciones* elementales simples*:*

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \; & \frac{A_{n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} + \frac{A_{n_1-1}}{(x - x_1)^{n_1-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x - x_1)} + \cdots + \\ & + \frac{B_{n_p}}{(x - x_p)^{n_p}} + \frac{B_{n_p-1}}{(x - x_p)^{n_p-1}} + \cdots + \frac{B_1}{(x - x_p)} + \cdots + \\ & + \frac{M_{m_1} x + N_{m_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)} + \cdots + \\ & + \frac{L_{m_k} x + K_{m_k}}{(x^2 + p_k x + q_k)^{m_k}} + \cdots + \frac{L_1 x + K_1}{(x^2 + p_k x + q_k)}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde A_i*,* B_i*,* M_i*,* N_i*,* L_i *y* K_i *son ciertas constantes reales.*

Para determinar dichas constantes sumamos los términos de la derecha. Nótese que el denominador común coincide con (2.6) y el numerador es un polinomio de grado a lo sumo n. Luego comparamos el polinomio numerador que se obtiene al sumar las fracciones más simples en (2.7) con $P_n(x)$. Igualando los coeficientes de ambos obtendremos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas que podemos resolver para encontrar los coeficientes indeterminados A_i, B_i, M_i, N_i, L_i y K_i. No obstante es posible encontrar el coeficiente A_{n_i} de los sumandos correspondientes a uno de los ceros reales x_i, o sea, el A_{n_i} de

$$\frac{A_{n_i}}{(x - x_i)^{n_i}} + \frac{A_{n_i-1}}{(x - x_i)^{n_i-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x - x_i)},$$

utilizando la propiedad que

$$\lim_{x \to x_i} \frac{P_n(x)(x - x_i)^{n_i}}{Q_m(x)} = A_{n_i}. \tag{2.8}$$

Como consecuencia de lo anterior, si $Q_m(x)$ tiene m ceros reales y simples, o sea, si su factorización es de la forma

$$Q_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{m-1})(x - x_m), \tag{2.9}$$

entonces, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se puede descomponer en las fracciones *elementales simples*:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{(x - x_{m-1})} + \frac{A_m}{(x - x_m)}, \tag{2.10}$$

donde A_1,..., A_m se calculan por la fórmula

$$A_k = \lim_{x \to x_k} \frac{P_n(x)(x - x_k)}{Q_m(x)}, \qquad k = 1, 2, ..., m. \tag{2.11}$$

Teorema 2.6 *(Primitivas de las fracciones simples más elementales)* [1]

$$\begin{aligned}
&1) \quad \int \frac{A}{x-a}\,dx = A \log|x-a| + C;\\
&2) \quad \int \frac{B}{(x-a)^k}\,dx = \frac{B}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \qquad k > 1;\\
&3) \quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\log|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Ejemplo 2.3

a) Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$. Primero encontraremos las fracciones simples mas elementales:

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Luego, utilizando (2.11) obtenemos

$$A = \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = -1, \qquad B = \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} = 2.$$

Finalmente, utilizando (2.12) obtenemos

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right)dx = -\log|x-1| + 2\log|x-2| + C.$$

a) Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$. Primero encontraremos las fracciones simples mas elementales:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\\
&= \frac{A(x^2+1) + B(x^2+1)(x-1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}.
\end{aligned}$$

Para encontrar los coeficientes A, B, C, D igualamos los polinomios de los numeradores:

$$x = A(x^2+1) + B(x^2+1)(x-1) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Dos polinomios de grado 3 son iguales si los coeficientes de las potencias x^3, x^2, x y x^0 son iguales, por lo que igualando dichos coeficientes obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rr} x^3: & B + C = 0\\ x^2: & A - B - 2C + D = 0\\ x^1: & B + C - 2D = 1\\ x^0: & A - B + D = 0 \end{array} \qquad \text{cuya solución es} \qquad \begin{array}{l} A = \frac{1}{2}\\ B = 0\\ C = 0\\ D = -\frac{1}{2} \end{array}$$

También es posible utilizar otra propiedad de los polinomios: dos polinomios de grado n que toman $n-1$ valores iguales en $n+1$ puntos dados son idénticamente iguales, es decir, si $P_n(x_k) = Q_n(x_k)$ para ciertos $x_1, ..., x_{n+1}$ (distintos entre si), entonces $P_n(x) \equiv Q_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[1] Se supone que $x^2 + px + q$ no tiene raíces reales.

En nuestro ejemplo es conveniente tomar como los x_k los ceros de los polinomios denominadores y luego el resto de los valores tomarlos los más sencillos posibles:

$$\begin{array}{lr} x=1: & A=\frac{1}{2} \\ x=-1: & 2A-4B-4C+4D=-1 \\ x=2: & 5A+5B+2C+D=2 \\ x=0: & A-B+D=0 \end{array} \qquad \text{cuya solución es} \qquad \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=0 \\ C=0 \\ D=-\frac{1}{2} \end{array}$$

que coincide con la encontrada por el método anterior. Luego,

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+1}\right] dx = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

2.3. Integrales trigonométricas.

En este apartado vamos a estudiar las integrales de la forma $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ las cuales se convierten en integrales racionales mediante la sustitución trigonométrica $t = \tan\frac{x}{2}$,

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} t=\tan\frac{x}{2} & dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2} & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right\} = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt,$$

que es un integral de una función racional.

Ejemplo 2.4

Calcular la integral $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen} x}$.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \left\{\begin{array}{ll} t=\tan\frac{x}{2} & dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2} & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right\} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Existen varios tipos de integrales trigonométricas que se pueden *racionalizar* con cambios más sencillos. Ellas son las siguientes:

1. $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, donde $f(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x)$, cambio $t = \cos x$
2. $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, donde $f(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x)$, cambio $t = \operatorname{sen} x$
3. $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, donde $f(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = f(\operatorname{sen} x, \cos x)$, cambio $t = \tan x$

Ejemplo 2.5

a) Calcular la integral $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen} x}$. Esta integral es del tipo 1. Luego,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \left\{\begin{array}{ll} t=\cos x & dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \operatorname{sen} x=\sqrt{1-t^2} & \cos x = t \end{array}\right\} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

que coincide con el resultado obtenido al utilizar la sustitución $t = \tan\frac{x}{2}$

b) Calcular la integral $\int \cos^3 x\; dx$. Esta integral es del tipo 2. Luego,

$$\int \cos^3 x\; dx = \left\{\begin{array}{ll} t=\operatorname{sen} x & dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x=\sqrt{1-t^2} & \operatorname{sen} x = t \end{array}\right\} = \int 1-t^2\,dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C.$$

c) Calcular la integral $\displaystyle\int \tan^3 x\, dx$. Esta integral es del tipo 3. Luego,

$$\int \tan^3 x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = \tan x & dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} & \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right\} = \int \frac{t^3}{1+t^2}\, dt = \int \left[t - \frac{t}{1+t^2} \right] dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + C = \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2}\log(1+\tan^2 x) + C = \frac{\tan^2 x}{2} + \log|\cos x| + C.$$

2.4. Integrales irracionales.

En este apartado vamos a estudiar las integrales de la forma $\int f(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})\, dx$, $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$ y $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\, dx$.

2.4.1. Las integrales $\displaystyle\int f(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})\, dx$ y $\displaystyle\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$.

Estas integrales irracionales se convierten en integrales trigonométricas mediante los cambios:

1. $\displaystyle\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$, cambio $x = a \operatorname{sen} t$
2. $\displaystyle\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$, cambio $x = \dfrac{a}{\operatorname{sen} t}$
3. $\displaystyle\int f(x, \sqrt{x^2 + a^2})\, dx$, cambio $x = a \tan t$

Ejemplo 2.6

a) Calcular la integral $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. Esta integral es del tipo 1. Luego,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} x = a \operatorname{sen} t \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right\} = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2t + C,$$

pero, $\operatorname{sen} 2t = 2 sent \cos t = 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$, por tanto

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

b) Calcular la integral $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$. Esta integral es del tipo 2. Luego,

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{a}{\operatorname{sen} t} \\ dx = -\dfrac{a \cos t}{\operatorname{sen}^2 t} dt \end{array} \right\} = -a^2 \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^3 t} dt = \left\{ \begin{array}{ll} y = \cos t & dt = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ \operatorname{sen} t = \sqrt{1-y^2} & \cos t = y \end{array} \right\}$$

$$= a^2 \int \frac{y^2}{(1-y^2)^2} dt = \frac{a^2}{4} \int \left[\frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(1-y)} + \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1+y)} \right] dt = \frac{a^2}{4} \left[\frac{2y}{1-y^2} + \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| \right] + C,$$

pero, $y = \cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$, por tanto

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{4} \log\left| \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right| + C = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C.$$

c) Calcular la integral $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$. Esta integral es del tipo 3. Luego,

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = a\tan t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right\} = a^2 \int \frac{1}{\cos^3 t} dt = \left\{ \begin{array}{ll} y = \operatorname{sen} t & dt = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ \cos t = \sqrt{1-y^2} & \operatorname{sen} t = y \end{array} \right\}$$

$$= a^2 \int \frac{1}{(1-y^2)^2} dt = \frac{a^2}{4} \int \left[\frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{(1-y)} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)} \right] dt = \frac{a^2}{4}\left[\frac{2y}{1-y^2} + \log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| \right] + C,$$

pero, $y = \operatorname{sen} t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, por tanto

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{4}\log\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

2.4.2. Las integrales $\int f\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$.

Las integrales del tipo

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

se racionalizan mediante el cambio $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Ejemplo 2.7

Calcular la integral $\int \dfrac{d\,x}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. Esta integral se racionaliza con el cambio $t = \sqrt[3]{x+1}$. Luego,

$$\int \frac{d\,x}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \left\{ \begin{array}{c} t = \sqrt[3]{x+1} \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\} = 3\int \frac{t^2 d\,t}{1+t} = 3\int (t-1)dt + 3\int \frac{dt}{t+1} = \frac{3}{2}t(t-2) + 3\log(1+t) + C,$$

de donde, deshaciendo el cambio $t = \sqrt[3]{x+1}$, obtenemos

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x+1}(\sqrt[3]{x+1}-2) + 3\log(1+\sqrt[3]{x+1}) + C.$$

El cálculo de primitivas es necesario para calcular integrales definidas de funciones continuas.

Teorema 2.7 *Teorema fundamental del cálculo y Fórmula de Newton-Leibniz. Sea $f:[a,b]\mapsto \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Entonces f tiene primitiva en $[a,b]$ y una de ellas es la función*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \qquad c \in (a,b). \tag{2.13}$$

Además, $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{2.14}$$

siendo $\Phi(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$.