ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Licenciatura de Matemáticas.

Curso 2004/2005. Grupo B

Prof. Renato Álvarez Nodarse

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas

(despacho: Módulo 15, 1er piso, 15-06)

WWW: `http://euler.us.es/~renato/`

Índice

Licenciatura en Matemáticas "Análisis Matemático I".

Programa

1. Introducción a los números complejos
2. Cálculo de primitivas: métodos de integración
3. Introducción a la integración: integral de Riemann
4. Integrales impropias
5. Aplicaciones de la integral
6. Series de números
7. Sucesiones y series de funciones
8. Series de potencias y funciones analíticas

Símbolos.

Dado un conjunto A, si el elemento a es miembro del conjunto A, diremos que a pertenece a A y lo denotaremos por $a \in A$. Si a no pertenece a A lo denotaremos por $a \notin A$.

Si una condición se cumple para cualquiera sea el elemento a de A lo denotaremos por $\forall a \in A$, donde $\forall$ significa "para todo".

Si existe un valor a del conjunto A para el cual se cumple determinada condición *cond* escribimos $\exists a \in A$ tal que se cumple *cond*, donde $\exists$ significa "existe". Si existe un sólo elemento a del conjunto que cumpla con la condición *cond* (el elemento es único) se escribe $\exists! a$.

Para los intervalos usaremos la notación común:
$[a, b]$ denota un intervalo cerrado y acotado.
(a, b) denota un intervalo abierto
$[a, b)$ y $(a, b]$ denotan intervalos cerrado por la izquierda y abierto por la derecha y abierto por la izquierda y cerrado por la derecha respectivamente.

Otros símbolos son:

"Supongamos" se denota por $\sqsupset$.
"Implica" se denota por $\Longrightarrow$ o $\longrightarrow$.
"si y sólo si" (implicación en ambos sentidos) $\Longleftrightarrow$ o $\longleftrightarrow$.
La unión de dos conjuntos A y B que es el conjunto C de elementos que o pertenecen a A o pertenecen a B lo denotaremos por $C = A \cup B$.
La intersección de dos conjuntos A y B que es el conjunto C de elementos que pertenecen a A y pertenecen a B al mismo tiempo lo denotaremos por $C = A \cap B$.

Parte I
Breve resumen de la teoría

1. Definiciones y teoremas principales

Definición 1 *La división del intervalo* $[a, b]$ *en* n *subintervalos definidos por los puntos* $\{a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b\}$ *de forma que se tenga:*

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}] \cup [x_{n-1}, b],$$

se denomina partición del intervalo $[a, b]$. *Denotaremos las particiones por* P_n, *donde* n *indica el número de subintervalos utilizados.*

Definición 2 *Sea* $f(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. *Sea* P_n *una partición de* $[a, b]$ *y* $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *un número cualquiera del intervalo* $[x_{k-1}, x_k]$. *Sea* $\lambda(P) = \text{máx}\{|x_k - x_{k-1}|\}$. *Diremos que una función es integrable según Riemann en* $[a, b]$ *y diremos que el número* I *es su integral de Riemann en* $[a, b]$ *si para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para cualquier partición* P_n *con* $\lambda(P) < \delta$ *se cumple que*

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \epsilon,$$

o, equivalentemente, si existe el límite

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = I.$$

A la suma $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ se le denomina suma integral asociada a la partición P_n y los números $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$.

Definición 3 *La suma*

$$s_f(P_N) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \qquad m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \tag{1.1}$$

se denomina suma inferior asociada a la partición $P_n = \{a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b\}$.

Definición 4 *La suma*

$$S_f(P_N) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}), \qquad M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \tag{1.2}$$

se denomina suma superior asociada a la partición $P_n = \{a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b\}$.

La siguiente defínción de integral Riemann es equivalente a la anterior:

Definición 5 *El único número* I *tal que para cualquiera sea la partición* P_n *de* $[a, b]$ *cumple con*

$$s_f = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \le I \le \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = S_f$$

se denomina integral definida de $f(x)$ *en* $[a, b]$ *y se denota por* $\int_a^b f(x)\,dx$ *y al número* I *se le llama integral Riemann de* $f(x)$ *en* $[a, b]$.

Teorema 1 *(*Condición necesaria de integrabilidad*)*
Para que una función $f(x) : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sea integrable es necesario que esté acotada.

Teorema 2 *(*Teorema de Darboux*)*
Para que una función acotada $f(x) : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sea integrable es necesario y suficiente que la integral superior de Darboux $\overline{I} = \inf_P S(P)$ y la integral inferior de Darboux $\underline{I} = \sup_P s(P)$ coincidan, donde el inf *y* sup *se toman sobre el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.*

Teorema 3 *(*Criterio de Riemann de integrabilidad*)*
Para que una función acotada $f(x) : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sea integrable es necesario y suficiente que para todo $\epsilon > 0$, exista una partición P_n de $[a,b]$ tal que

$$S(P) - s(P) = \left| \sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k])(x_k - x_{k-1}) \right| < \epsilon,$$

donde $\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \equiv \sup_{x', y' \in [x_{k-1}, x_k]} \left[f(x') - f(y') \right]$.

Teorema 4 *(*Criterio de Du Bois-Reymond*)*
Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ acotada en $[a,b]$ cuyos puntos de discontinuidad sean tales que se puedan recubrir por un número finito de intervalos cuya longitud total sea tan pequeña como se quiera. Entonces f es integrable en $[a,b]$.

Observación: Como consecuencia de este teorema se tiene que toda función acotada y continua a trozos (y en particular toda función continua) con un número finito de discontinuidades es integrable.

Teorema 5 *(*Teorema de monotonía y acotación de la integral*)*
Sean f, g dos funciones integrables en $[a,b]$. Entonces se cumple que:

a) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

b) Existen dos constantes m y M tales que $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Teorema 6 *(*Primer teorema del valor medio integral.*)*
Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \mapsto [0, +\infty)$ integrables en $[a,b]$ y sean $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ y $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Entonces existe un $\mu \in [m, M]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Además, si f es continua en $[a,b]$ entonces existirá un $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \, = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.4}$$

Observación: Nótese que en el caso $g(x) = 1$, se obtiene el clásico Teorema del valor medio integral.

Teorema 7 *(*Segundo teorema del valor medio integral o Fórmula de Bonnet.*)*
Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$, $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ una función monótona no decreciente y no negativa en $[a,b]$. Entonces existe un $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Teorema 8 *(*Teorema fundamental del cálculo y Fórmula de Newton-Leibniz.*)*
Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Entonces f tiene primitiva en $[a,b]$ y una de ellas es la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \qquad c \in (a,b). \tag{1.6}$$

Además, $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{1.7}$$

siendo $\Phi(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$.

Teorema 9 *(*Formula de Taylor en con el resto en forma integral*)*
Supongamos que la función $f(x)$ es $(n+1)-$veces derivable y cuyas derivadas hasta orden $n+1$ son continuas en el intervalo $[a,x]$ y sea $P_n(x,a)$ el polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x)$ definido por

$$P_n(x,a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots f'(a)(x-a) + f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Entonces,

$$f(x) = P_n(x,a) + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Definición 6 *Sea una función $f(x)$ integrable Riemann en cualquier intervalo $[a,t] \subset [a,b)$. Si existe el límite*

$$\lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx = l < \infty$$

diremos que existe la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en $[a,b)$ que converge a l y escribiremos

$$l = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Si no existe el l anterior diremos que la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Análogamente se pueden definir las integrales impropias en $(-\infty, a]$.

Definición 7 *Sea $f(x)$ una función integrable en cualquier intervalo $[a,t] \subset [a,b)$, $|b| < +\infty$. Si existe el límite*

$$\lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)\,dx = l < \infty$$

diremos que existe la integral impropia de segunda especie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en $[a,b)$ que converge a l y escribiremos

$$l = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Si no existe el l anterior diremos que la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Observación: Obviamente ambas definiciones se pueden unificar en una única

Definición 8 *Sea una función $f(x)$ integrable Riemann en cualquier intervalo $[a,t] \subset [a,b)$. Si existe el límite*

$$\lim_{t\to b-} \int_a^b f(x)\,dx = l < \infty$$

diremos que existe la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *en* $[a,b)$ *que converge a* l *y escribiremos*

$$l = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Si no existe el l *anterior diremos que la integral impropia* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge.*

Teorema 10 *(*Criterio de comparación para las integrales impropias.*)*
Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en cualquier intervalo $[a,t] \subset [a,b)$ tales que

$$\forall x \in [a,b), \qquad 0 \le f(x) \le g(x).$$

Entonces si la integral $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *es convergente, la integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *también lo es, y si* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *es divergente, entonces* $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *también será divergente.*

Teorema 11 *(*Criterio de Abel-Dirichlet para las integrales impropias.*)*
Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en cualquier intervalo $[a,t] \subset [a,b)$ y sea g una función monótona. Entonces, para que la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ *converja es suficiente que se cumplan cualquiera de las dos siguientes pares de condiciones:*

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *converja y g acotada en $[a,b)$,* *o*

b) $\displaystyle\int_a^t f(x)dx$ *este acotada para todo $t \in [a,b)$ y $g(x)$ converja a cero cuando $x \to b$.*

Definición 9 *La expresión*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$$

se denomina serie infinita o serie de números reales y a los números a_1, a_2, ..., elementos de la serie. Las sumas

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

se denominan sumas parciales de la serie.

Definición 10 *Diremos que la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge a s, si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ tiene límite s y a dicho número le denominaremos "suma" de la serie. Si, por el contrario, la sucesión de sumas parciales no tiene límite, entonces diremos que la serie diverge.*

Definición 11 *Diremos que una serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es absolutamente convergente si* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *es convergente, es decir, si* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$ [1]*. Si la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente pero no absolutamente, entonces diremos que la serie es condicionalmente convergente.*

[1] Nótese que la sucesión de sumas parciales es una sucesión monótona, luego si además le exigimos que esté acotada, entonces existirá el límite que es precisamente la suma de la serie.

Es evidente que si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Teorema 12 *(*Criterio de Comparación para series númericas*)*
Sean $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *dos series de términos positivos. Si existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$*,* $a_n \leq b_n$*, entonces:*

1. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$*, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$

2. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$*, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$

Un corolario inmediato del teorema anterior es que si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$, entonces ambas series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tienen el mismo carácter convergente o divergente. En el caso cuando $L = 0$, esto no es cierto en general. En este caso sólo se puede concluir lo mismo que en teorema de comparación (este corolario sigue siendo válido sólo para series de términos positivos).

Teorema 13 *(*Criterio del cociente de D'Alembert*)*
Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie de términos positivos tal que* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$*. Entonces,*

1. *Si* $q < 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente*

2. *Si* $q > 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es divergente.*

3. *Si* $q = 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *puede ser convergente o divergente.*

Teorema 14 *(*Criterio de la raíz de Cauchy*)*
Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie de términos positivos tal que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$*. Entonces,*

1. *Si* $q < 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente*

2. *Si* $q > 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es divergente.*

3. *Si* $q = 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *puede ser convergente o divergente.*

Teorema 15 *(*Teorema de reordenación de Riemann*)*
Toda serie condicionalmente convergente se puede reordenar de tal forma que sume cualquier valor real prefijado de antemano.

Definición 12 *Sea* $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de funciones* $f_n(x)$ *definidas en* $A \subset \mathbb{R}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Diremos que la sucesión de funciones converge "puntualmente" en* $x_0 \in A$*, si la sucesión* $f_n(x_0)$ *converge. Diremos además que* $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *converge puntualmente en todo un conjunto* $I \subset A$ *si* $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *converge para todo* $x \in I$*.*

Obviamente, por la unicidad del límite de una sucesión númerica, tenemos que si $f_n(x)$ converge en un intervalo I, entonces existe para cada x de I un único valor $f(x)$ al cual tiende la sucesión de funciones, por tanto podemos definir la función límite de $f_n(x)$ como aquella función que a cada x de I le hace corresponder dicho límite. Al mayor intervalo $I \subset A$ donde converge $f_n(x)$ se le llama "región de convergencia" de la sucesión. Así, podemos dar la siguiente definición:

Definición 13 *Diremos que una sucesión de funciones $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge* puntualmente *en un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ a la función $f(x)$, si*

$$\forall x \in I, \quad y \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \textit{tal que} \quad \forall n > N, \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Definición 14 *Diremos que una sucesión de funciones $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge* uniformemente *en un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ a la función $f(x)$, si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \textit{tal que} \quad \forall n > N, \quad y \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Nótese que en el caso de la convergencia uniforme la N sólo depende de ϵ mientras que en el de la puntual puede depender también del punto x donde se esté calculando el límite.

Teorema 16 *(*Condición necesaria y suficiente de convergencia uniforme para una sucesión de funciones*)*
Para que una sucesión de funciones $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converja uniformemente a una función f en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es necesario y suficiente que $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Teorema 17 *(*Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones*)*
Una sucesión de funciones $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ es uniformemente convergente en $I \subset \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad \forall n > N, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad \textit{se tiene que} \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Teorema 18 *(*Criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de una serie de funciones*)*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$, y $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales no negativos, tales que $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in I$ y cuya serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente. Entonces la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ es uniformemente convergente an I.

Teorema 19 *(*Criterio de Abel-Dirichlet para series de funciones*)*
Sea la serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ siendo $a_{n+1}(x)$ una sucesión monótona para cada $x \in I \subset \mathbb{R}$. Para que dicha serie sea uniformemente convergente en I es suficiente que se cumplan cualquiera de los dos pares de condiciones siguientes:

1. *La sucesión de sumas parciales $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ sea acotada y $a_n(x)$ converja uniformemente a cero, ó*

2. *La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converja uniformemente en I y $a_n(x)$ esté acotada en I.*

Teorema 20 *(*Sobre la continuidad de una sucesión de funciones*)*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$. Si f_n es continua en I para todo $n \in \mathbb{N}$, y f_n converge uniformemente a f en I entonces f es continua en I.

Teorema 21 *(*Sobre la integrabilidad de una sucesión de funciones*)*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de funciones definidas en* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *e integrables en* $[a,b]$ *y sea* f_n *uniformemente convergente a* f *en* $[a,b]$*. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 22 *(*Sobre la derivabilidad de una sucesión de funciones*)*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de funciones definidas en* $I \subset \mathbb{R}$ *y derivables en* I *tales que para cierto* $x_0 \in I$ *se tiene* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = l$ *y además la sucesión de funciones* $(f_n')_{n=0}^{\infty}$ *converja uniformemente a* g *en* I*. Entonces la sucesión* $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *converge uniformemente a cierta función* f *en* I *y además* $f'(x) = g(x)$ *para todo* $x \in I$*.*

Teorema 23 *(*Primer Teorema de Abel para las series de potencias*)*
Sea la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n z^n$*,* a_n*,* $z \in \mathbb{C}$*. Si la serie converge para cierto* $w \in \mathbb{C}$*, entonces la serie converge absolutamente para todo* $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z| < |w|$*.*

Observación: La región de convergencia de una serie de potencias siempre son círculos en el plano complejo.

Teorema 24 *(*Fórmula de Cauchy-Hadamard*)*
Dada una serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n z^n$*, su radio de convergencia* R *viene dado por la fórmula* $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Teorema 25 *(*Sobre la convergencia uniforme de una serie de potencias*)*
Sea la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n x^n$*,* a_n*,* $z \in \mathbb{C}$ *con radio de convergencia* $R > 0$*. Entonces la serie converge uniformemente en cualquier región del plano complejo contenida en* $|z| \leq r < R$*.*

Teorema 26 *(*Derivación e integración término a término de una serie de potencias real*)*
Sea la serie de potencias $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n x^n$*,* a_n*,* $x \in \mathbb{R}$ *con radio de convergencia* $R > 0$*. Entonces*

1. $f(x)$ *es continua en* $(-R, R)$
2. *La serie se puede integrar término a término y la serie resultante tiene el mismo radio de convergencia, o sea, se cumple que*

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

3. *La serie se puede derivar término a término y la serie resultante tiene el mismo radio de convergencia, o sea, se cumple que*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Teorema 27 *(*Condición necesaria y suficiente de analiticidad*)*
Para que una función $f(x)$ *infinitamente derivable en* $x = a$ *y todo su entorno sea analítica es necesario y suficiente que el resto de Taylor de la función* $R_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$*, tienda a cero para todo* x *de dicho entorno.*

Parte II
Colección de problemas

1. Cálculo de Primitivas

Problema 1.1 *Calcular las siguientes primitivas*

$$i)\ \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}, \qquad ii)\ \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx \qquad iii)\ \int \frac{x}{(x-1)^3(x-2)^2}\,dx$$

$$iv)\ \int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}\,dx, \quad v)\ \int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx \quad vi)\ \int \frac{x^5+3x^4+x^2-3x+5}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$vii)\ \int \frac{dx}{a\cos x + b\operatorname{sen} x} \qquad viii)\ \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,dx \qquad ix)\ \int \cos^5 x\,dx \qquad x)\ \int \tan^5 x\,dx$$

$$xi)\ \int \sqrt{(x-1)^2+1}\,dx \qquad xii)\ \int \sqrt{4-x^2}\,dx \qquad xiii)\ \int \sqrt{x^2-25}\,dx$$

Problema 1.2 *Calcular las siguientes primitivas*

$$i)\ \int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} \qquad ii)\ \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}} \qquad iii)\ \int \exp^x \operatorname{sen} 2x\,dx$$

$$iv)\ \int x^2 \log x\,dx \qquad v)\ \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx \qquad vi)\ \int \cos^4 x\,dx$$

$$vii)\ \int \operatorname{tg}^4 x\,dx \qquad viii)\ \int \sec^3 x\,dx \qquad ix)\ \int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$x)\ \int \cos^2(\log x)\,dx \qquad xi)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} \qquad xii)\ \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$xiii)\ \int \frac{dx}{\sqrt{\exp^{2x}-1}} \qquad xiv)\ \int \frac{\exp^{4x}}{\exp^{2x}+2\exp^x+2}\,dx \qquad xv)\ \int \frac{x^5-2x^3}{x^4-2x^2+1}\,dx.$$

Problema 1.3 *Calcular la primitiva, para $x \in [-1,1]$, de las siguientes funciones:*

$$i)\ \ f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|, \qquad ii)\ \ g(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x < 0 \\ x+1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}.$$

2. Integral definida

Problema 2.1 *Estudiar si las siguientes funciones son integrables Riemann en $[a,b]$:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \;, \qquad f(x) = const\,, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}.$$

Problema 2.2 *Sea $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$. Demostrar que f no es integrable Riemann en el intervalo $[0,1]$. Calcular las integrales superior e inferior.*

Problema 2.3 *Calcular $\displaystyle\int_a^b x\,dx$ y $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx$ mediante sumas superiores e inferiores asociadas a particiones regulares del intervalo $[a,b]$.*

Problema 2.4 *Pruebe que toda función acotada y continua en $[a,b]$ excepto en un número finito de puntos de $[a,b]$ es integrable. El recíproco de esta afirmación no es cierto. De ejemplo de funciones integrables en $[a,b]$ con infinitos puntos de discontinuidad en $[a,b]$.*

Problema 2.5 *Sean f, g dos funciones definidas en $[a,b] \subset \mathbb{R}$.*

1. *Prueba que si f y g difieren en un número finito de puntos entonces, f es integrable si y sólo si g es integrable y además $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.*
2. *Prueba que si $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, entonces $\text{mín}(f,g) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ y $\text{máx}(f,g) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.*
3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua verificando $f(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$. Demostrar que si $\int_a^b f(t)dt = 0$, entonces $f(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.*

Problema 2.6 *Calcular los siguientes límites asociándolos a alguna integral definida:*

$$i) \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\tfrac{n}{n^2+1} + \tfrac{n}{n^2+4} + \cdots + \tfrac{n}{n^2+n^2}\right]$$

$$ii) \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{1}{n+n}\right]$$

$$iii) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\exp^2} + \sqrt[n]{\exp^4} + \cdots + \sqrt[n]{\exp^{2n}}}{n}.$$

$$v) \qquad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Problema 2.7 *Calcular las integrales definidas siguientes, cambiando los límites de integración si se realiza algún cambio de variable:*

$$i) \quad \int_0^{\log 2} \sqrt{\exp^x - 1}\,dx, \qquad ii) \quad \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$$

Problema 2.8 *Hallar*

$$\int_{-1}^{2} \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} + 4}\,dx \quad y \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3 + \cos^2 x}\,dx.$$

Problema 2.9 *Demostrar las siguientes afirmaciones:*

$$i) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$$

$$ii) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

$$iii) \qquad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$iv) \qquad \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^b \frac{dx}{x} = \int_1^{ab} \frac{dx}{x}.$$

Problema 2.10 *Derivar las siguientes funciones:*

$$i) \qquad F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\exp^t}{t}\, dt, \qquad ii) \quad F(x) = \int_1^{\exp \int_1^{x^2} \operatorname{tg} \sqrt{t}\, dt} \frac{ds}{\log s}$$

$$iii) \qquad F(x) = \int_0^x x^2 f(t)\, dt, \quad \text{con } f \text{ continua.}$$

Problema 2.11 *Calcular el punto donde la siguiente función alcanza su máximo:*

$$f(x) = \int_0^{x-1} \left(\exp^{-t^2} - \exp^{-2t}\right)\, dt.$$

Problema 2.12

1. *Enúnciese el Teorema Fundamental del Cálculo. Aplicar este Teorema para encontrar la derivada de la función*
$$F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen} t^{1/4}\, dt\,.$$

2. *Hallar* $\lim\limits_{x\to 0} x^{-3/2}\, F(x)$.

Problema 2.13 *Sea la función*

$$F(x) = \int_0^x t\, e^{t^4}\, dt.$$

1. *Hallar un mínimo local de* F. *¿Es un mínimo absoluto de* F*?*

2. *Hallar*
$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2}.$$

Problema 2.14 *Calcular la recta tangente a la curva* $y = \int_{x^2}^{\sqrt{3\pi}} \operatorname{tg}(t^2)\, dt$ *en el punto* $x = \sqrt[4]{3\pi}$.

Problema 2.15 *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \exp^{t^2}\, dt - x}{x^3}.$$

Problema 2.16 *Sea la función*

$$F(x) = \int_0^x t^2\, cos(t^2)\, dt.$$

1. *Hallar su polinomio de Taylor de orden 3 en el punto 0.*

2. *Hallar*
$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3}.$$

3. Aplicaciones de la integral.

Problema 3.1 *Calcular el área encerrada entre las curvas dadas:*

$$i) \quad y = x^2, \quad y = \sqrt{x};$$

$$ii) \quad y = \tfrac{1-x}{1+x}, \quad y = \tfrac{2-x}{1+x}, \quad y = 0, \quad y = 1;$$

$$iii) \quad x^2 + y^2 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

$$iv) \quad f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 1 \qquad y \qquad g(x) = 2x^2 + 4x - 1.$$

Problema 3.2 *Sea una función continua en* $[a, b]$.

1. Probar que el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la figura Φ *definida por la gráfica de* f *y las rectas* $x = a$, $x = b$ *e* $y = 0$ *alrededor del eje* x *(ver figura (1) se expresa como*

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

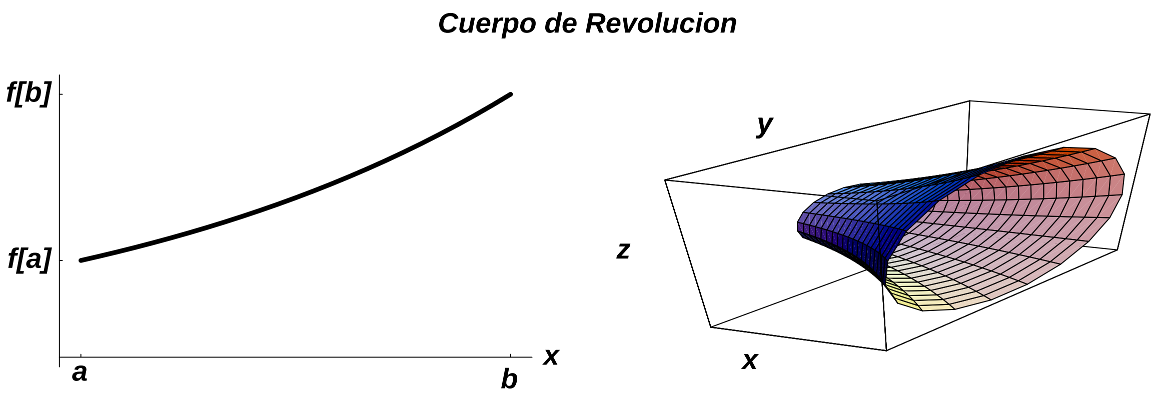


Figura 1: Volumen de un cuerpo de revolución.

2. Probar que si $f(x) \geq 0$, *entonces el volumen al girar* Φ *alrededor del eje* y *se expresa mediante la fórmula*

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)dx$$

3. Encuentre una expresión para el caso cuando la curva viene dada en forma paramétrica.

Problema 3.3 *Calcular el volumen generado al girar el conjunto dado en el plano alrededor del eje horizontal:*

$$i) \quad 0 \leq y \leq x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$$

$$ii) \quad x^2 + (y - 2a)^2 \leq a^2;$$

$$iii) \quad r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4r^2, \quad y \geq 0;$$

$$iv) \quad 4x^2 + y^4 = 1, \quad \textit{(elipse)}.$$

Problema 3.4 *Calcular el volumen del cuerpo de revolución generado al girar las siguientes curvas respecto al eje* x *y al eje* y *respectivamente.*

1. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$ *y en* $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. *Una elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

3. La cicloide $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4. La astroide $x(t) = a\cos^3(t)$, $y(t) = a \operatorname{sen}^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

5. La región comprendida entre las curvas $x^2 + y^2 = 1$ *y* $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Problema 3.5 *Sea una función continua en* $[a, b]$.

1. Probar que el área de la superficie del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la figura Φ *definida por la gráfica de* f *y las rectas* $x = a$, $x = b$ *e* $y = 0$ *alrededor del eje* x *(ver figura (1) se expresa como*

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad o \quad S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

2. ¿Que ocurrirá al girar respecto al eje y*?*
3. Calcular el área de la superficies de los cuerpos de revolución definidos en el problema 3.4

Problema 3.6 *Demostrar que la longitud de una curva se expresa mediante las expresiones:*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad o \quad l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Problema 3.7 *Calcular la longitud de los tramos de curva siguientes:*

i) $y = \log \sec x, \quad 0 \leq x \leq \pi/3;$

ii) $y = \exp^{x/2} + \exp^{-x/2}, \quad 0 \leq x \leq 2;$

iii) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}, \quad -8 \leq x \leq 8;$

iv) $f(x) = \alpha x^2, \quad 0 \leq x \leq a;$

v) *La cicloide (ver problema 3.4) para* $0 \leq t \leq 2\pi$;

vi) *La astroide (ver problema 3.4) para* $0 \leq t \leq 2\pi$.

Aplicaciones a problemas físicos y geométricos sencillos

Problema 3.8 *Encontrar una familia de curvas* $y(x)$ *tal que el segmento de la tangente* t *a la curva* y *en un punto cualquiera* $P(x, y)$ *dibujado entre* P *y el eje* $0y$ *quede bisecado por el eje* Ox. $\quad y' = 2y/x$

Problema 3.9 *Encontrar una familia de curvas* $y(x)$ *tal que la pendiente de la tangente* t *a la curva* y *en cada punto sea la suma de las coordenadas del punto. Encuentra además la curva que pasa por el origen.*

Problema 3.10 *Se sabe que la intensidad* i *del circuito eléctrico representado en la figura 2 está gobernada por la ecuación diferencial*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U,$$

donde L *es la impedancia,* R *la resistencia y* U *el voltaje. Supongamos que el voltaje* U *es constante y que* $i(0) = i_0$. *Encontrar la dependencia de* i *respecto al tiempo* t. *Realizar el mismo estudio si* $U = U_0 \operatorname{sen}(\omega t)$.

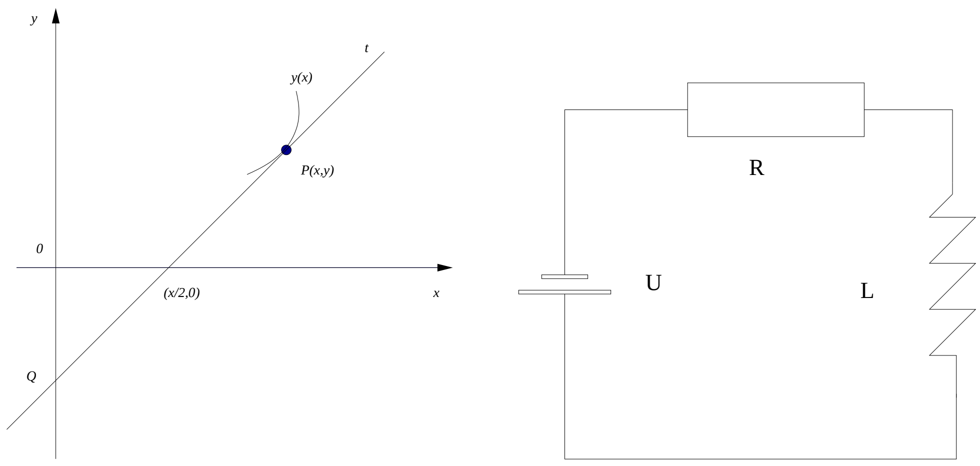


Figura 2: Curva del ejemplo 3.8 (derecha) y circuito eléctrico del ejemplo 3.10 (izquierda)

Problema 3.11 *La ecuación barométrica de Pascal es la EDO*

$$p'(h) = -\lambda p(h), \qquad \lambda > 0,$$

donde p es la presión en función de la altura h. Si $h = 0$, la presión al nivel del mar (1 atm). ¿Cómo varía la presión con la altura? Si $\lambda \approx 1{,}27 \times 10^{-26}\mathrm{cm}^{-1}$, calcula la presión en la cima de las sierras de la tabla adjunta.

Sierra	altura máxima (metros)	presión (atm)
Grazalema (Cádiz)	1654	0.81
Picos de Europa (Cantabria)	2648	0.71
Sierra Nevada (Granada)	3478	0.64
Teide (tenerife)	3710	0.62
Everest (Himalaya)	8848	0.32

Problema 3.12 *La descomposición radioactiva*

Si N es el número de átomos de una substancia radioactiva, entonces

$$N(t+h) - N(t) = -\lambda N(t)h \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = -\lambda N(t).$$

Si $h \to 0$, entonces podemos aproximar la ecuación anterior mediante la siguiente EDO

$$N'(t) = -\lambda N(t), \qquad N(t_0) = N_0. \tag{3.1}$$

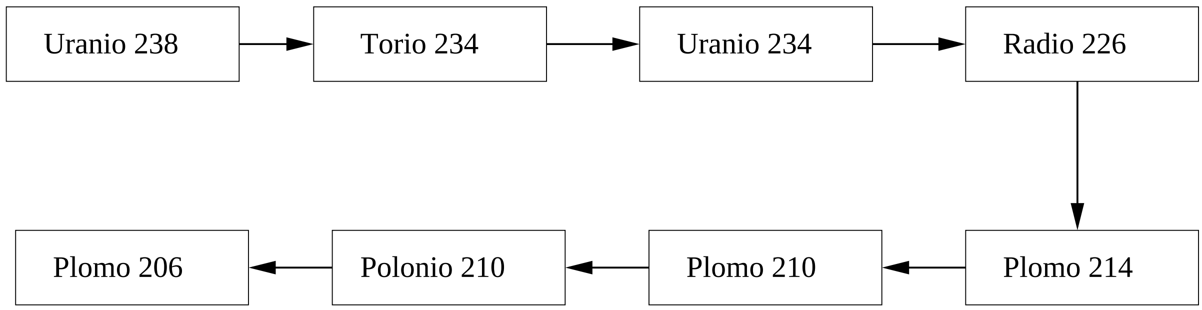
Resuelve la EDO anterior.

Se llama *período de semi-desintegración* T al tiempo necesario para disminuir en la mitad el número de átomos. Prueba que

$$\lambda = \frac{\log 2}{T} = \frac{0{,}693147}{T}.$$

En muchos casos un elemento radioactivo puede obtenerse a partir de otros mediante una *cadena radioactiva*. E.g.

Elemento	Período T	λ
Radio 226 $\to$ Plomo 214	1600 años	0.000433217 1/años
Plomo 214 $\to$ Plomo 210	47 min	0.0147478 1/min
Plomo 210 $\to$ Polonio 210	22 años	0.0315067 1/años
Polonio 210 $\to$ Plomo 206	138 días	.00502281 1/dias
Carbono 14 $\to$ Nitrógeno 14	5568 años	0.000124488 1/años
Uranio 238 $\to$ Torio 234	$4{,}5110^9$ años	$1{,}5101210^{-10}$ 1/años



Así, por ejemplo, si estudiamos la cantidad de Plomo 210 que hay en una muestra tenemos que tener en cuenta no sólo la cantidad que se desintegra sino la que aporta cualquiera de los elementos que aparecen por encima de él en la cadena radioactiva. Por ejemplo, prácticamente en cualquier muestra que tomemos siempre hay una determinada cantidad de Radio 226, lo que implica una aportación a la cantidad de Plomo 210 después de varias desintegraciones. Si llamamos a esa aportación $r(t)$, entonces la ecuación que gobierna la desintegración del Plomo 210 es la siguiente

$$N'(t) = -\lambda N(t) + r(t), \qquad N(t_0) = N_0, \tag{3.2}$$

donde $r(t)$ representa la cantidad de átomos de Radio que se desintegra en la muestra. Resuelve la EDO anterior.

Problema 3.13 *Supongamos que tenemos una reacción química $A + B \to C$ y que en $t = 0$ la concentración de A es a y la de B es b. Se sabe que la velocidad la velocidad de formación de C es proporcional a la concentración de A y B. Lo anterior nos conduce a la EDO*

$$x' = \varkappa(a - x)(b - x), \qquad x(0) = 0, \tag{3.3}$$

donde $\varkappa$ es la constante de proporcionalidad. Deduce el valor de $x(t)$ suponiendo que $a \neq b$ y que $x(0) = 0$, $C = a/b$.

Problema 3.14 *La velocidad de escape de la Tierra. Nos interesa resolver el problema de encontrar la velocidad de escape al espacio exterior de un cuerpo que se encuentre en la superficie de la tierra. Si usamos la ley de Newton tenemos*

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM_T}{r^2},$$

donde G es la constante universal gravitatoria y M_T es la masa de la tierra. Como $g = GM_T/R^2$, siendo R el radio de la tierra (que supondremos una esfera), tenemos $GM_T = gR^2$. Obviamente r varia con el tiempo por lo que la ecuación anterior se torna algo complicada a simple vista. Usando la regla de la cadena tenemos

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2}.$$

La solución de esta EDO usando el método de separación de variables es $v^2 = 2gR^2/R + C$. Supongamos que v_0 es la velocidad inicial del cuerpo sobre la superficie terrestre, prueba que la *velocidad del cuerpo a cualquier distancia de la tierra viene dada por*

$$v^2 = \frac{2gR}{r} + v_0^2 - 2gR.$$

A partir de lo anterior deduce el valor de la velocidad de escape.

Problema 3.15 *La caída de un cuerpo en un medio viscoso se puede modelizar mediante la ecuación para la velocidad $v(t)$*

$$v' = g - \kappa v^r, \qquad v(0) = v_0, \tag{3.4}$$

donde g y κ son ciertas constantes (la gravedad y la viscosidad). Resuelve la EDO anterior para $r = 1, 2, 3$.

Problema 3.16 *El modelo de crecimiento de poblaciones. Imaginemos que tenemos una población de cierta especie (consideraremos que tenemos un número bastante alto de individuos) y sea $p(t)$ el número de individuos de dicha especie en el momento t (evidentemente $p(t) \in \mathbb{N}$). Sea $r(t,p)$ la diferencia entre en índice de natalidad y mortalidad de la población. Supongamos que la población está aislada (o sea, no hay emigración ni inmigración). Entonces la variación $p(t+h) - p(t)$ es proporcional a $p(t)h$ y el coeficiente de proporcionalidad es $r(t,p)$. Luego*

$$p(t+h) - p(t) = r(t,p)p(t)h, \quad h \to 0, \quad \Longrightarrow \quad p'(t) = r(t,p)p(t).$$

La ecuación más sencilla posible se obtiene si consideramos $r(t,p) = r$, constante. Así, la población de individuos de la especie puede ser modelizada mediante el PVI

$$p'(t) = r\,p(t), \qquad p(t_0) = p_0, \quad r > 0, \tag{3.5}$$

que es del tipo de la EDO de Pascal o la de desintegración radioactiva y cuya solución $p(t) = p_0 e^{r(t-t_0)}$. El modelo anterior se conoce como modelo de Malthus o modelo maltusiano pues fué propuesto por el economista inglés Thomas R. Malthus (1766–1834). Si $r < 0$ la especie esta condenada a la extinción y si $r > 0$ ésta crece en proporción geométrica. Un modelo más realista es el modelo logístico propuesto por el matemático y biólogo holandés, P. F. Verhulst. Verhulst razonó que como estadísticamente el encuentro de dos individuos es proporcional a p^2 (¿por qué?) entonces tendremos que sustraerle al término rp un término cp^2, de forma que la EDO que modeliza una población será

$$p'(t) = r\,p(t) - cp^2(t), \qquad p(t_0) = p_0, \quad r, c > 0. \tag{3.6}$$

En general c ha de ser mucho más pequeño que r ya que si r no es muy grande la EDO (3.5) es una aproximación bastante buena, pero si p comienza a crecer demasiado entonces el término $-cp^2$ no se puede obviar y termina frenando el crecimiento exponencial.

Resuelve la EDO (3.6) y prueba que que $\lim_{t\to\infty} p(t) = r/c$ independientemente de p_0.

4. Integrales impropias

Problema 4.1 *Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:*

$$i) \quad \int_0^\infty e^{-x}\,dx \qquad ii) \quad \int_1^\infty \cos\pi x\,dx \qquad iii) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

$$iv) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \qquad v) \quad \int_0^1 \frac{dx}{1-x} \qquad vi) \quad \int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

Problema 4.2 *Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:*

$$i) \quad \int_0^1 \log x\,dx, \qquad ii) \quad \int_0^\infty \exp^{-x^2}\,dx,$$

$$iii) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx, \qquad iv) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha\sqrt{1+x^2}}.$$

Problema 4.3 *Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:*

$$i) \quad \int_0^\infty \sqrt{\frac{x}{x^4+1}}\,dx, \qquad ii) \quad \int_5^\infty \frac{1}{\log x}dx,$$

$$iii) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} x\,dx, \qquad iv) \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x dx}{x}.$$

Problema 4.4 1. *Calcular:* $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1+x}{x^3-2x^2+x}\,dx.$

2. *Estudiar la convergencia de la integral* $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}e^{-t}dt$, $\forall t \in \mathbb{R}$. *Probar que,* $\forall t > 0$ $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. *Calcular* $\Gamma(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

3. *Estudiar la convergencia de la integral* $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dt$, $\forall p,q \in \mathbb{R}$. *Prueba que* $B(p,q) = \frac{q-1}{p}B(p+1,q-1) = \frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)$. *Calcular* $B(n,m)$, $n,m \in \mathbb{N}$.

Problema 4.5 *Sea la función* $f(x) = x\,e^{-x}$.

1. *Represéntela gráficamente, estudiando el crecimiento, concavidad, y asíntotas.*
2. *Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar en torno del eje OX, el área contenida en el primer cuadrante que limitan la gráfica de* $f(x) = x\,e^{-x}$ *y el propio eje OX.*

Problema 4.6 *Sea la función* $f(x) = 1/(1+e^{-x})$.

1. *Represéntela gráficamente, estudiando el crecimiento, concavidad, y asíntotas.*
2. *Calcúlese el área del conjunto determinado por la curva* $y = f(x)$ *y las rectas* $y = 1$, $x = 0$.

5. Series númericas

Problema 5.1

Prueba los siguientes criterios de convergencia de series:

(a) Criterio de McLaurin-Cauchy: Sea $f(x)$ una función no negativa definida en $[0, +\infty)$ y monótona decreciente en todo su dominio. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ y la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ tienen el mismo carácter de convergencia.

(b) Criterio de Leibniz para una serie alternada: Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de términos no negativos, monótona decreciente y tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

(c) Criterio de condensación de Cauchy: Sean $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ dos series de términos positivos con $\{a_n\}$ una sucesión decreciente cualquiera y $b_n = 2^n$. Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si y sólo si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge.

(d) Criterio generalizado de la raíz $n-$ésima de Cauchy: Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de términos positivos tal que $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup \sqrt[n]{a_n} = q$. Entonces,

1. Si $q < 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente
2. Si $q > 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.
3. Si $q = 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ puede ser convergente o divergente.

Problema 5.2

Estudia el carácter de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^4+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},\ p \in \mathbb{R}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p},\ p \in \mathbb{R}.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2+n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n[\sqrt{n^2-1} - n], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+4/n^2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(1/n),$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+b^n}{a^n-b^n} x^n, \quad a, b, x \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}.$

Problema 5.3

Suma, si es posible, las siguientes series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n-3}}{4^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Problema 5.4

(a) Si las series de téminos positivos $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ son convergentes, prueba que también lo es $\displaystyle\sum_n \sqrt{a_n b_n}$. **Indicación:** Utilice la desigualdad de Cauchy-Schwarz

(b) Si $\sum_n a_n < \infty$, con $a_n \geq 0$, prueba que $\displaystyle\sum_n \frac{\sqrt{a_n}}{n} < \infty$.

Problema 5.5

Sea $\{u_n\}$ la sucesión de los números naturales que no contienen al cero en su expresión. Prueba que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n} < 90\,.$

Problema 5.6

(a) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$, con $a > 0$, según los valores de a.

(b) Demuestra que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} < \infty$, donde $b_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ para $n \geq 1$ y $b_0 \in \mathbb{Z}$. ¿Qué representa esta serie y cuál es su importancia?

Problema 5.7

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de términos $u_n > 0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Demuestra que las series $\displaystyle\sum_n u_n$ y $\displaystyle\sum_n \ln(1 + u_n)$ comparten el mismo carácter convergente o divergente. Aplica este resultado para determinar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n^2 + n + 1}\right)$.

Problema 5.8

1. Probar que la manipulación de un número finito de términos de una seria no altera la convergencia de la misma.

2. Probar que si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen entonces

   a) la serie $\sum(a_n + b_n)$ converge pero el recíproco es falso.

   b) la serie $\sum \alpha a_n$ converge si y sólo si $\sum a_n$ converge.

   c) $\sum(a_n \cdot b_n)$ no tiene porque converger.

Problema 5.9

Además de los criterios estudiados en clase existe otro muy útil debido a Raabe. La demostración se deja como ejercicio.

Criterio de Raabe: Si existe el $\lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = L$. Entonces,

1. Si $L > 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente

2. Si $L < 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

Utilizando el criterio de Raabe estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a^{1+1/2+\cdots+1/(k-1)}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n! n^q},$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\right]^{\alpha}, \quad p, q > 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}, \quad p > 0.$$

6. Sucesiones y series de funciones.

Problema 6.1

Estudiar la convergencia y la convergencia uniforme de las sucesiones funcionales $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ en los conjuntos A dados.

1. $f_n(x) = x^n$ en $A = [0,1]$, $[0,1)]$ y $[0,a]$, $0 < a < 1$.
2. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$ y $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ en $A = \mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$ en $A = [-1,1]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$.
4. $f_n(x) = \lim\limits_{m\to+\infty} [\cos(n!\pi x)]^{2m}$ en $A = [a,b]$ y $\mathbb{R}$.

Problema 6.2

Estudia la convergencia puntual y uniforme de las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{sen}^n x.$$

Problema 6.3

Prueba que si las sucesiones $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ son uniformemente convergentes en A, entonces la sucesión $\{\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ también lo es.

Problema 6.4

Demostrar el Teorema de Dini: Sea $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas que tienden, monótonamente, a $f(x)$ para cada $x \in A$, cerrado y acotado (compacto). Entonces f_n converge uniformemente a f en A si y sólo si f es continua en A.

Dar un ejemplo de una sucesión de funciones continuas que converjan a una función continua pero no uniformemente.

Problema 6.5

Que ocurre con la continuidad, derivabilidad e integrabilidad de las funciones límite del ejercicio 1?

Problema 6.6

(a) Sea la sucesión de funciones de término general $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \le n \\ 0 & \text{si } |x| > n \end{cases}$. ¿Converge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$? ¿Lo hace uniformemente?

(b) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, siendo $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{si } 0 \le x \le 1/2n \\ 2n - 2n^2x & \text{si } 1/2n \le x \le 1/n \\ 0 & \text{si } 1/n \le x \le 1 \end{cases}$. ¿Es uniforme la convergencia?

(c) Demuestra que la serie funcional de término general $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$, $n \ge 1$, es uniformemente convergente en cualquier intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, pero no converge absolutamente.

Problema 6.7

Estudia la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $0 \le x \le 1$, b) $f_n(x) = xe^{-nx}$, $0 \le x < +\infty$ c) $f_n(x) = \dfrac{2n^2x}{1+n^2x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Problema 6.8

Demostrar que la serie de funciones $\sum_{n\ge 0} x^n(1-x)$ converge puntual pero no uniformemente en $[0,1]$, mientras que la serie $\sum_{n\ge 0}(-x)^n(1-x)$ si es uniformemente convergente en dicho intervalo.

Problema 6.9

Sea $f_n(x) = x^{-n}\log x$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Estudiar la convergencia puntual de la sucesión $\{f_n\}_{n\ge 1}$ en $(0,+\infty)$.

b) Estudiar la convergencia uniforme en $[1,+\infty)$.

c) Probar que la serie $\sum_{n\ge 1} f_n$ converge si $x \ge 1$, y calcular su suma explícitamente.

d) Estudiar la convergencia uniforme de $\sum_{n\ge 1} f_n$ en $[1,+\infty)$ y en $[a,+\infty)$, con $a > 1$.

Problema 6.10

Sea $f_n(x) = \arctan(nx)$.

a) Estudiar la convergencia puntual de $\{f_n\}$. ¿Es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$?.

b) Demostrar que converge uniformemente en $\{x \in \mathbb{R} : |x| \ge a > 0\}$.

c) Estudiar la convergencia uniforme de la serie de funciones $\sum_{n\ge 1} \dfrac{\arctan(nx)}{n^2+1}$.

d) Demostrar que la función suma de la serie anterior es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Problema 6.11

Sea $f_n(x) = \begin{cases} xe^{nx}, & x < 0 \\ x^2e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$. Demostrar que:

1. f_n tiende uniformemente a cero en $A = \mathbb{R}$.
2. Demostrar que que la serie $\sum_{n\ge 1} f_n(x)$ converge puntualmente en $A = \mathbb{R}$.
3. Estudiar la convergencia uniforme de la serie anterior.
4. Calcular, si es posible, la suma de la serie.

7. Series de potencias y funciones analíticas

Problema 7.1

Determina el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{a) } a_n = \log n \quad \text{b) } a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{c) } a_n = \frac{[(-1)^n + 3]^n}{n}, \quad \text{d) } a_n = \frac{n^2}{a^2},$$

$$\text{e) } a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad \text{e) } a_n = \frac{1}{n^n}, \quad \text{f) } a_n = \frac{1}{n!}, \quad \text{e) } a_n = (\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4})^n, \quad \text{g) } a_n = (1 + 1/2 + \cdots + 1/n),$$

$$\text{h) } a_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n} \ (E(x) \text{ es la parte entera de } x, \quad \text{i) } a_n(x) = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\right)^p \frac{1}{2^n}.$$

Problema 7.2

Demuestra el siguiente teorema de Abel: Si la serie de potencias (en $\mathbb{R}$) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$ y además converge para $x = R$, entonces converge uniformemente en $[0, R]$.
Corolario: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene radio de convergencia R y converge a una función $f(x)$ y además converge en $x = R$, entonces $\lim_{x \to R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \to R} f(x)$. (Esta fórmula se conoce como método de sumación de Abel.)

Utilizando los dos apartados anteriores prueba que $\log 2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Problema 7.3

Obtener las series de potencias de las siguientes funciones indicando la región de convergencia de las mismas:

$$\text{a) } f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \text{b) } f(x) = \arctan(x), \quad \text{c) } f(x) = \cos(\sqrt{x}), \quad \text{d) } f(x) = \frac{(x-2)^n}{3^n},$$

$$\text{e) } f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad \text{f) } f(x) = \cosh(x), \quad \text{g) } f(x) = \log(a + bx), \ (a \neq 0) \quad \text{h) } f(x) = (1 + e^x)^3.$$

Problema 7.4

Sumar las siguientes series indicando la región de válidez de la misma:

$$\text{a) } a_n = \frac{p(p-q)(p-2q)\cdots(p-nq+q)}{n! q^n}, \quad \text{b) } a_n = \frac{n^2 + 3n + 5}{n}, \quad \text{c) } a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)},$$

$$\text{d) } a_n = \frac{3n^2 - n + 2}{a^2}, \quad \text{e) } a_{3n-2} = \frac{1}{3n}, \ a_n = 0 \text{ en el resto}, \quad \text{f) } a_n = \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)},$$

Problema 7.5

1. Probar que la función $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ cumple con las propiedades $(e^x)' = e^x$, $e^{x+y} = e^x e^y$

2. Probar la fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Prueba que las funciones $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ y $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n}$, realmente representan al seno y al coseno respectivamente. O sea, que se cumple que:

   a) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$, $\quad \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$,

   b) ambas son funciones periódicas y acotadas.

4. Prueba que la función
$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$
es la función inversa de e^x (en un entorno de $x=1$).

Problema 7.6

Estudiar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t}dt$.

1. Prueba que $\forall t \in (0,1)$, $\displaystyle\frac{\log(1-t)}{t} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}$.

2. Prueba que $\forall x \in (0,1)$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$.

3. Concluir que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t}dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, calculando, si es posible, el valor de la integral.

Problema 7.7

Obtener por el método de los coeficientes indeterminados los cinco primeros términos de las series de potencias de las funciones:

a) $f(x) = \tan x$, b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-2x}$, c) $f(x) = \sqrt{1-a^2 \operatorname{sen}^2 x}$.

Problema 7.8

Halla una función $f(x)$, desarrollable en serie de potencias, que verifique:

a) $\left\{ \begin{array}{rcl} f'(x) & = & f(x)+x \\ f(0) & = & 2 \end{array} \right.$, b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ (Ecuación de Bessel),

c) $x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' + \alpha\beta y = 0$ (Ecuación hipergeométrica de Gauss).

Problema 7.9

Prueba las siguientes expresiones para calcular las integrales elípticas
$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right),$$
$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}dt = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right),$$
siendo $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$ y $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n)$.

Problema 7.10

¿Como afecta al radio de convergencia de una serie de potencias que tomemos puntos distintos para el desarrollo? Para primero ello prueba que
$$f(x) = \frac{1}{1-\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(1-\alpha a)^k}(x-a)^k.$$

Calcula, usando lo anterior, la serie de $f(x) = \dfrac{1}{1 \pm \alpha^2 x^2}$.

Estudia el efecto en la serie de la función: $f(x) = \dfrac{1}{1 \pm \alpha^2 x^2}$, desarrollada alrededor del origen y alrededor de un punto $a \in (0,1)$.

8. Problemas complementarios

Problema 8.1

(a) Calcular la integral indefinida

$$\int \frac{(1+\operatorname{sen} x)\cos x}{3+\cos^2 x}\, dx$$

(b) Calcular el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función $y = \sqrt{x}\operatorname{sen} 2x$ en $[0, \pi/2]$.

Problema 8.2

Dada la función $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^{\frac{1}{2}}}\, dt$,

(a) Calcule el polinomio de McLaurin de orden 2 que aproxima a dicha función en el intervalo $[0, 1]$ y dé una expresión para el resto (fórmula del error).

(b) Calcule un valor aproximado de $F(1/2)$. ¿De qué orden es el error cometido?

Problema 8.3

(a) Calcular la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$.

(b) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$, siendo n un número natural. **Ayuda:** Utilice inducción e integración por partes. $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$

Problema 8.4

Hallar el centro de masas (x_{CM}) y el centro de inercia de un cono homogéneo de densidad ρ, radio r y altura h con el vértice en el origen de coordenadas y cuyo eje está en el eje de las x.
Ayuda: Utilice la definción

$$x_{CM} = \frac{\displaystyle\int_0^h x\rho(x)dV(x)}{\displaystyle\int_0^h \rho(x)dV(x)}, \qquad I = \int_0^h x^2\rho(x)dV(x),$$

siendo V el volumen del cono en dependencia de la altura del mismo

Problema 8.5

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}$ para cualquiera sea $p > 0$.

Problema 8.6

1. Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

2. Sea Λ la region delimitada entre la función $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$ y las rectas $x = \pi/2$ e $y = 3$

   a) Calcula el area de la región Λ.

   b) Calcula el volumen del cuerpo obtenido al girar la región Λ respecto al eje $0X$.

   c) Calcula el volumen del cuerpo obtenido al girar la región Λ respecto al eje $0Y$.

Problema 8.7

Sea la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{1+n\,x}{e^{nx}}$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. Estudia la convergencia puntual de $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ en todo $\mathbb{R}$
2. Estudia la convergencia uniforme de $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ en los intervalos $[0,1]$ y $[1/2,\infty)$ respectivamente.
3. Calcula $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{1/2}^{3} f_n(x)\,dx$.
4. Decide si la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\,x}{e^{nx}}$ converge uniformemente en $[\frac{1}{2},3]$. Justifique su respuesta.

Problema 8.8

1. Estudia la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$.
2. Encuentra una primitiva de la función $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$.
3. Utilizando el resultado del apartado anterior encuentra, en caso que sea posible, el valor de la integral del apartado 1

Problema 8.9

1. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{2n^2x + \sqrt{n}\,\mathrm{sen}^6(nx)}{n^2}$, $n \geq 1$, en el intervalo $[0,\pi]$ y encuentre la función límite si ésta existe.
2. Calcula, si es posible, el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{2n^2x + \sqrt{n}\,\mathrm{sen}^6(nx)}{n^2}dx$.
3. Estudia la convergencia uniforme de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^6(nx)}{n^2}$ en el intervalo $[0,\pi]$.

Problema 8.10

Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{(2x-1)(x^2+1)}$.

1. Calcule una primitiva de f.

2. Decida para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{x\,dx}{(2x-1)(x^2+1)}$, es convergente o no.

3. Calcule el área de la región comprendida entre en gráfico de $f(x)$ y las rectas $x=1$ y $y=0$.

Problema 8.11

Sea la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}$.

1. Calcule el radio de convergencia de la serie.

2. Encuentre la suma de la serie anterior especificando el dominio de la función resultante (Ayuda: haga el cambio $y = x/3$).

3. Pruebe que la serie númerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ es convergente.

4. Calcule, utilizando el apartado 2, la suma de la serie númerica anterior.

Problema 8.12

Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{(a^2 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$.

1. Calcule una primitiva de f.
2. Decida para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$, es convergente o no.
3. Decida si la función $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(\pi x/6)$ para $x \in [0, 1)$ y $g(1) = 0$ es integrable según Riemann en $[0, 1]$. Justifique su respuesta.
4. Calcule, si es posible, el área de la región comprendida entre el gráfico de $g(x)$ y el eje de las "x" en $[0, \pi]$.

Problema 8.13

Sea la ecuación $f'(x) = 2f(x) + 1$, siendo f una función diferenciable en $\mathbb{R}$.
1. Prueba que f se puede expresar como una serie de potencias.
2. Encuentra la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ solución de la ecuación anterior (Indicación: Iguala los coeficientes de las potencias en la ecuación)
3. Calcule el radio de convergencia de la serie.
4. Encuentre la suma de la serie anterior especificando el dominio de la función resultante.

Problema 8.14

1. Calcule una primitiva de $f = \dfrac{1}{(1 + x^2)(x + 1)^2}$.
2. Decide para que valores de $p \in \mathbb{R}$, con $p \in \mathbb{R}$, la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x - a)^p(1 + x^2)}$ es convergente, siendo $a \geq 0$.
3. Calcula, si es posible, el área bajo la curva $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2)(x + 1)^2}$ en el intervalo $[1, \infty)$.

Problema 8.15

Sea la ecuación $f'(x) = f(x) - 2x$, con f una función diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = C$.

1. Prueba que f admite un desarrollo en serie de potencias alrededor del origen.
2. Encuentra la solución en forma de series de potencias de la ecuación anterior y calcula el radio de convergencia de la misma, así como la región de convergencia uniforme.
3. Suma la serie de potencias obtenida y encuentra el dominio de la función resultante.

Parte III
Bibliografía

Bibliografía básica

- V. ILIN y E. POZNIAK, *Fundamentos del Análisis Matemático*, 3 tomos (Mir, 1991).
- L.D. KUDRIÁTSEV, *Curso de Análisis Matemático*, tomos I y II (Mir, 1984).
- V. ZORICH, *Mathematical Analysis I y II*, (Springer, Series: Universitext, 2004).

Colecciones de problemas

- I. I. LIASHKÓ, A. K. BOIARCHUK, Iá. G. GAI y G. P. GOLOVACH, Matemática Superiores. Problemas Resuetos (Anti-Demidovich) Vol II (Cálculo Integral para funciones de una variable) III. (Series y Cálculo diferencial para funciones de varias variables) (Editorial URSS, 1999).

Bibliografía complementaria

- T.M. APOSTOL, *Calculus*, tomos I y II (Reverté, 1989).
- R.G. BARTLE, *Introducción al Análisis Matemático* (Limusa, 1990).
- J. BURGOS, *Cálculo Infinitesimal de una variable* (MaGraw-Hill, 1995).
- V.F. BUTUZOV y otros, *Análisis matemático en preguntas y problemas* (Mir, 1984)
- R. COURANT y F. JOHN, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, tomos I y II (Limusa, 1976 y 1978)
- B. DEMIDOVICH, *5000 problemas de Análisis Matemático* (Paraninfo, 1980).
- A. DURÁN, *Historia, con personajes, de los conceptos del Cálculo.* (Alianza, 1996)
- E. HAIRER y G. WANNER, *Analysis by its History* (Springer Verlag, 1996)
- S. LANG, *Introducción al Análisis Matemático* (Addison-Wesley, 1990)
- M. SPIVAK *Calculus* (Reverté, 1987).
- L. D. KUDRIÁTSEV, A. D. KUTÁSOV, V. I. CHEJLOV y M. I. SHABUNIN, Problemas de Análisis Matemático Vol I y II. (Mir-Rubiños, 1992).
- G. POLYA y G. SZEGÖ, *Problems and theorems in Analysis*, tomos I y II (Springer-Verlag, 1976)