Métodos matemáticos: Análisis funcional

Conceptos y resultados fundamentales

Curso 2011/2012

Aquí encontrarás los Teoremas hay que saber para el primer parcial (§1) así como las definiciones, problemas y teoremas que hay que saber para el segundo parcial (§2).

1. Teoremas fundamentales de los temas 1, 2, 3 y 4

Teoremas fundamentales: Series numéricas

Teorema 1 (Criterio de Cauchy) *Para que una sucesión de números complejos* $(z_n)_n$ *sea de convergente es necesario y suficiente que sea de Cauchy.*

Teorema 2 (Criterio de Comparación de Weierstrass) *Sean* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *dos series de números complejos. Si existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$, $|a_n| \leq |b_n|$, *entonces si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ *converge, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| <$ *converge, y si* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *diverge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ *diverge.*

Teorema 3 (Criterio de la raíz de Cauchy) *Sea* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie de números complejos tal que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. *Entonces,*

1. *Si* $q < 1$, *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente*
2. *Si* $q > 1$, *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es divergente.*
3. *Si* $q = 1$, *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *puede ser convergente o divergente.*

Teorema 4 (Primer Teorema de Abel para las series de potencias) *Sea la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$. *Si la serie converge para cierto* $w \in \mathbb{C}$, *entonces la serie converge absolutamente para todo* $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z| < |w|$.

Teorema 5 (Fórmula de Cauchy-Hadamard) *Dada una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *su radio de convergencia* R *viene dado por la fórmula*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n}} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{1.1}$$

Teorema 6 *Sea una serie de potencias* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *con radio de convergencia* $R > 0$. *Entonces*

1. *Para todo* $k \geq 1$ *la serie*
$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}, \tag{1.2}$$
tiene radio de convergencia R.
2. *La función* $f(z)$ *es infinitamente diferenciable en* $U_R(0)$ *y la* k*-ésima derivada de* f, $f^{(k)}(z)$, *viene dada por la serie (1.2).*
3. *Para todo* $n \geq 0$, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

Teoremas fundamentales: sucesiones y series de funciones

Teorema 7 (Condición necesaria y suficiente de convergencia uniforme) *Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathbb{X}$, $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.*

Teorema 8 (Criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme) *Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$, y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales no negativos, tales que $|a_n(x)| \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in I$ y cuya serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente. Entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente an I.*

Teorema 9 (Sobre la conmutatividad del límite de una sucesión de funciones) *Sea $(f_n(x))_n$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe el límite $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$, $x_0 \in I$. Si $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x\to x_0} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right)$$

Teorema 10 (Sobre la integrabilidad de una sucesión de funciones) *Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e integrables[1] en $[a, b]$ y sea f_n uniformemente convergente a f en $[a, b]$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Teoremas fundamentales: Espacios métricos

Teorema 11 *Un subconjunto $M \in \mathbb{X}$ es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$.*

Teorema 12 (De las esferas encajadas) *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico. $\mathbb{X}$ es completo si y sólo si, cualquier sucesión de esferas encajadas cuyos radios tiendan a cero ($r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) tiene intersección no vacía, i.e., $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n) \neq \emptyset$.*

Teorema 13 (Del punto fijo) *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico completo y $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación de contracción. Entonces T tiene un único punto fijo.*

[1] En el examen basta demostrarlo para sucesiones de funciones continuas.

2. Definiciones, Teoremas y Problemas de los temas 5 y 6: Espacios normados y de Hilbert

Definiciones

1. Comenta la definición de *espacios normados* y da algunos ejemplos.

2. Comenta la definición de *espacios de Banach* y da algunos ejemplos.

3. Comenta la definición de *conjunto compacto* y da algunos ejemplos.

4. Comenta la definición de *operador lineal* en espacios normados y da ejemplos.

5. Comenta la definición de *operador invertible* en espacios de Banach y da ejemplos.

6. Comenta la definición de *operador acotado* y da ejemplos.

7. Comenta la definición de *espacio euclídeo* y da algunos ejemplos.

8. Comenta la definición de *espacios de Hilbert* y da algunos ejemplos.

9. Comenta la definición de *sistema completo de vectores* en un espacio de Hilbert.

10. Comenta la definición de *sistema cerrado de vectores* en un espacio de Hilbert.

11. Comenta la definición de *vectores ortogonales* y da ejemplos.

12. Comenta la definición de *complemento ortogonal de un subespacio M* de un espacio de Hilbert.

13. Comenta la definición de *operadores autoadjuntos* en un espacio de Hilbert y da ejemplos.

14. Comenta la definición de *operadores compactos* en un espacio de Hilbert.

Teoremas

1. Prueba que un subespacio M de un espacio métrico completo $\mathbb{X}$ es completo si y sólo si es cerrado en $\mathbb{X}$.

2. Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Prueba que entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.

3. Prueba que si $M \subset \mathbb{X}$ es compacto, entonces M es cerrado y acotado.

4. Prueba que todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.

5. Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset (\mathbb{X}, \rho) \mapsto (\mathbb{Y}, \sigma)$ continua en el compacto $M \subset \mathcal{D}(T)$. Prueba que la imagen de M, $\mathcal{I}(M)$ también es un conjunto compacto. O sea, las aplicaciones continuas transforman compactos en compactos.

6. Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal. Prueba que

a) $\mathcal{I}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Y}$.

b) Si $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, entonces $\dim \mathcal{I}(T) \geq n$.

c) $\mathcal{N}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}(T)$.

7. Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal con $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ y $\mathcal{I}(T) \subset \mathbb{Y}$. Prueba que

   a) Existe la aplicación inversa T^{-1} de T, si y sólo si $Tx = 0$ implica $x = 0$.

   b) Si existe T^{-1}, entonces T^{-1} es lineal.

   c) Si $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, entonces $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathcal{D}(T) = n$.

8. Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal de un espacio normado $\mathbb{X}$ a otro espacio normado $\mathbb{Y}$. Prueba que

   a) T es continuo si y sólo si T es acotado.

   b) Si T es continuo en algún $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, T es continuo en $\mathcal{D}(T)$.

9. Prueba la desigualdad de Cauchy-Schwarz: Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Entonces para todos $f, g \in \mathbb{E}$,
$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle.$$

10. Prueba que si el espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es separable, entonces cualquier sistema ortogonal (ortonormal) de $\mathbb{E}$ es numerable.

11. Prueba que en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ de cualquier conjunto de vectores linealmente independiente se puede construir un conjunto de vectores ortonormales (proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt).

12. Prueba el siguiente resultado: Sea H el subespacio lineal de $\mathbb{H}$ generado por los vectores ortonormales $\{\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, i.e., $H = \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n)$. Entonces
$$\min_{q\in H} ||x - q||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2$$
donde c_k son los coeficientes de Fourier, y se alcanza cuando q es la suma parcial de la serie de Fourier
$$q = s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k.$$

13. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sea el sistema ortonormal de vectores $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{H}$. Prueba que las siguientes condiciones son equivalentes:

   a) $(\phi_n)_n$ es completo en $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$.

   b) Para todo $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, \phi_k\rangle\phi_k$.

   c) Para todo $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$, se cumple la igualdad de Parseval
$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_k\rangle|^2.$$

   d) Si $\langle x, \phi_k\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$.

14. Prueba que todo espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable tiene una base ortonormal.

15. (de Riesz-Fischer) Sea $(\phi_n)_n$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y sean los números $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

Prueba que existe un elemento $x \in \mathbb{H}$ cuyos coeficientes de Fourier son precisamente los números $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, i.e.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2, \qquad c_n = \langle x, \phi_n \rangle.$$

16. Prueba que cualquier espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ o a l^2.

17. Sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y $M^\perp$ su complemento ortogonal. Prueba que todo vector $x \in \mathbb{H}$ admite una única representación de la forma $x = y + y^\perp$ donde $y \in M$ e $y^\perp \in M^\perp$.

18. Sea el operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach con $\|A\| < 1$. Prueba que $I - A$ es invertible y (en norma)

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \qquad \text{donde } A^0 := I.$$

19. Dado un operador acotado A, prueba que el espectro de $\sigma(A)$ es un compacto de $\mathbb{C}$ (conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$) contenido en el interior del disco cerrado $D = \{z;\, |z| \leq \|A\|\}$.

20. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunto (hermítico) y compacto. Entonces $\lambda = \|A\|$ o $\lambda = -\|A\|$ es un autovalor de A.

21. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y A una aplicación lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ hermítica (autoadjunta). Prueba que todos los autovalores de A (si los tiene) son reales. Además los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

22. Sea A un operador compacto en un espacio de Hilbert y $(\phi_n)_n$ una sucesión ortonormal de $\mathbb{H}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} A\phi_n = 0$.

23. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y A una aplicación lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunta (hermítica) y compacta. Entonces A tiene un número finito de autovalores λ_n reales distintos o si es infinito, entonces, es numerable y si lo ordenamos de mayor a menor $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

24. **Teorema espectral:** Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y A una aplicación lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunta y compacta. Existe una sucesión numerable (finita o infinita) de autovectores ortonormales $(x_n)_n$ de A cuya correspondiente sucesión de autovalores denotaremos por $(\lambda_n)_n$ tales que, $Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n$, $\forall x \in \mathbb{H}$ donde en la suma aparecen todos los autovalores no nulos de A incluida su multiplicidad. Si la sucesión $(\lambda_n)_n$ es infinita se puede reordenar de forma que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y los correspondientes espacios $\ker(\lambda_n I - A)$, $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$ son de dimensión finita, siendo la dimensión de estos el número de veces que aparece un mismo λ_k en la fórmula anterior.

Problemas

1. Prueba que si un espacio normado $\mathbb{X}$ tiene una base de Schauder, entonces es separable.

2. Prueba que si $\mathbb{X}$ es un espacio normado, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente si y sólo si $\mathbb{X}$ es completo.

3. Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal y supongamos que $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y} = n < \infty$. Prueba que la imagen de T, $\mathcal{I}(T) = \mathbb{Y}$ si y sólo si T^{-1} existe.

4. Sean $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ y $(\mathbb{X}, \|\cdot\|')$ dos espacios normados y sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ normas equivalentes. Prueba que toda sucesión de Cauchy en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ también lo es en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|'$, y viceversa.

5. Sea $\mathbb{X}$ el espacio métrico *discreto*, i.e., el espacio metrico definido sobre un conjunto arbitrario $\mathbb{X}$ donde la métrica ρ es la función $\rho(x, y) = 1$ si $x \neq y$ y $\rho(x, y) = 0$ si $x = y$. Prueba que si $\mathbb{X}$ está constituido por infinitos puntos entonces no es compacto.

6. Prueba que la *norma de un operador* $\|T\|$ efectivamente es una norma, es decir se cumplen los axiomas de la definición de espacios normados.

7. Sea el operador $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $y = Tx = A \cdot x$, donde A es una matriz $n \times n$, x e y son los correspondientes vectores de $\mathbb{R}^n$, y $\cdot$ denota la multiplicación usual de matrices. Prueba que dicho operador es lineal. Usando en $\mathbb{R}^n$ la norma euclídea, prueba que T es acotado y da una estimación de su norma.

8. Prueba que, en la norma inducida por el producto escalar si los vectores $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ y los números $\alpha_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$, entonces $x_n + y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x + y$, $\alpha_n x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha x$, y $\langle x_n, y_n\rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle$.

9. Prueba que si los vectores (no nulos) $x_1, \ldots, x_n$ de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces son linealmente independientes.

10. Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Prueba que

    a) Para todos $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.
    b) Para todos $x, y \in \mathbb{E}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$.
    c) Para todo $x \in \mathbb{E}$, $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$.
    d) Si $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ para todos los $z \in \mathbb{E}$, entonces $x = y$.

11. Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo y $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto escalar. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{E}$,
    $$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$
    Esta igualdad se suele denominar *ley del paralelogramo*.

12. Prueba que si dos elementos x e y de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces
    $$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$
    La igualdad anterior es una generalización del teorema de Pitágoras.

13. Prueba que cualquiera sea $M \subset \mathbb{H}$ subespacio lineal cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{E}$, $M^\perp$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathbb{E}$.

14. Sea el operador multiplicación $M : C^2_{[a,b]} \mapsto C^2_{[a,b]}$ definido por

$$Mx(t) = f(t)x(t), \quad f(t) \in C_{[a,b]}, \quad \forall x(t) \in C^2_{[a,b]}.$$

Prueba que M^* existe y es el operador multiplicación por la función complejo conjugada $\overline{f(t)}$. Prueba que este operador es acotado y que $\|M\| \geq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Nótese que si $f(t)$ es real entonces $M^* = M$.

15. Sea el operador integral T: $T : C_{[0,1]} \mapsto C_{[0,1]}$, $y = Tx$

$$y(t) = \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau,$$

con $k(t, \tau)$ continua en en cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Demuestra que el adjunto de dicho operador es el operador $T^* : C_{[0,1]} \mapsto C_{[0,1]}$, $y = T^*x$

$$y(t) = \int_0^1 \overline{k(\tau, t)}x(\tau)d\tau.$$

Luego $T^* = T$ si y sólo si $\overline{k(\tau, t)} = k(t, \tau)$.

16. Prueba que si A es autoadjunto, entonces A^*A y $A + A^*$ también lo son.

17. Sean A y B dos operadores autoadjuntos. Prueba que el producto AB es autoadjunto si y sólo si $AB = BA$.