PROYECTO I: MÁS SOBRE SERIES DE NÚMEROS REALES

Sumación aproximada de series numéricas

El estudio de las series de números reales no termina con el análisis de la convergencia y la sumación de algunas series sencillas, como la geométrica o las telescópicas. En la práctica, cuando aparece una serie y se requiere la suma, ésta no siempre puede hacerse de forma exacta, por lo que hay que recurrir al procedimiento de aproximar el valor de la serie por el de su suma parcial para un índice suficientemente grande. Lamentablemente, este procedimiento "ingenuo" no siempre da resultado porque, en muchos casos, la sucesión de las sumas parciales converge muy lentamente. Para solventar este inconveniente existen métodos que transforman la serie en otra de la misma suma, pero cuyas sumas parciales convergen "más rápidamente"; estos métodos se conocen como métodos de *aceleración de la convergencia*.

Para fijar ideas consideremos el ejemplo de la serie armónica

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

Vamos a calcular aproximadamente su suma utilizando la suma parcial n-ésima S_n, cometiendo un error menor que 10^{-3}. El problema es, pues, determinar el valor de n. Para ello vamos a acotar el resto

$$R_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots.$$

Es evidente que

$$\frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{(n+k-1)(n+k)},$$

luego

$$R_n \leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots = \frac{1}{n}.$$

Demuestra la última igualdad. De acuerdo con esta acotación, ¿cuánto tendrá que valer n para que el error sea como queremos?

Método de Kummer

Una posible forma de "acelerar" la convergencia de esta serie es utilizar el siguiente truco: supongamos que queremos calcular la suma de la serie $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y que conocemos la suma de otra serie $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, cuyo término general está relacionado con el de la primera por la condición

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0.$$

Comprueba que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = lB + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - l\frac{b_n}{a_n}\right) a_n.$$

Como $1 - l\dfrac{b_n}{a_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, los términos de la nueva serie son menores que los de la original. Hemos transformado entonces la serie de partida en otra cuyas sumas parciales convergen más rápidamente.

Para aplicar este método a la serie armónica vamos a considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, cuya suma es 1 (demuéstralo). Entonces, aplicando la fórmula anterior

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

También podríamos considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$; prueba que, en este caso se obtendría la relación

$$S = 1 + \frac{1}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)}.$$

Sabiendo que $S = \pi^2/6$, comprueba que sumando 8 términos en esta última fórmula se consigue la suma de la serie armónica con un error menor que 10^{-3}.

Sumabilidad Cèsaro

Como ya sabes, sumar infinitos términos es una operación que no tiene un significado intuitivo, como lo tiene sumar una cantidad finita de números. Para dar algún sentido a la operación es necesario hacer una definición *ad hoc*. La más inmediata es la que define la convergencia usual de series, es decir, considerar la suma de la serie como el límite de las sumas parciales (la extensión natural del concepto de suma finita). Pero se pueden dar definiciones alternativas, que, aplicadas a series convergentes en el sentido habitual, conduzcan al mismo resultado, pero que, aplicadas a series divergentes, conduzcan a un resultado finito. Esta es una forma de asignar un valor a la "suma" de series que no convergen en el sentido habitual.

La sumabilidad Cèsaro es una de estas alternativas. Su definición es la siguiente:

Definición 1 *Sumabilidad Cèsaro Se dice que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es sumable Cèsaro sii existe el límite* $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$*, siendo*

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n},$$

la media aritmética de las n *primeras sumas parciales,* S_n*, de la serie.*

Denotaremos esta suma de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \text{ (Cèsaro)}.$$

Veamos los siguientes ejemplos:

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$, divergente en sentido habitual, vale $\frac{1}{2}$ (Cèsaro).
2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$ no es sumable Cèsaro.

Demuestra las siguientes propiedades de la sumabilidad Cèsaro:

1. (Linealidad) Si $\sum_n a_n = A$ (Cèsaro) y $\sum_n b_n = B$ (Cèsaro), y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_n(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$ (Cèsaro).
2. (Compatibilidad) Si $\sum_n a_n = A$ en sentido habitual, entonces $\sum_n a_n = A$ (Cèsaro).

Proyecto II: Sobre conjuntos infinitos.

1. Conjuntos numerables

Sean dos conjuntos A y B cualesquiera. Por ejemplo, digamos que A es el conjunto de los números primos menores que un número dado (digamos 10), B el de los vértices de un dodecaedro (12 lados). A y B son finitos, es decir están constituidos por un número finito de elementos. Luego, una forma natural para compararlos puede ser sencillamente usando el número de sus elementos. Obviamente A tiene seis elementos, 1,2,3,5,7 y B doce, así que B será más grande que A. Sea ahora C el conjunto de los lados de un hexágono. Entonces C y A tienen el mismo número de elementos de forma que podemos hacer corresponder a cada uno de los elementos de C el correspondiente elemento de A y viceversa. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de A y C. Obviamente tal correspondencia es imposible de encontrar entre los elementos de A y B o B y C (¿por qué?).

¿Qué ocurre si ahora A Y B tienen infinitos elementos, es decir son conjuntos infinitos? Ejemplo de tales conjuntos son conocidos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.

En este caso el primer método de comparar conjuntos no nos sirve pues no podemos “contar” los elementos ya que éstos son infinitos así que sólo nos queda el segundo de ellos: intentar encontrar una correspondencia biunívoca entre conjuntos. Veamos algunos ejemplos.

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n + 1, \ldots\}$. $\mathbb{N}$ es el conjunto infinito más simple. Dado cualquier otro conjunto A que se pueda poner en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$ se denomina conjunto *numerable*.

Por ejemplo, P, el conjunto de todos los números pares es numerable. En efecto, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ existe un único $p \in P$ tal que $p = 2n$ y viceversa, cualquiera sea $p \in P$, existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = p/2$, es decir existe una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos, o lo que es lo mismo *hay tantos números pares como naturales.*

Existe una forma muy sencilla de probar lo anterior. Escribamos todos los números naturales en una tabla

1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	$2n+2$	$\cdots$

y eliminemos todos los impares y “contamos” los números resultantes. Así tenemos

$\cancel{1}$	2	$\cancel{3}$	4	$\cancel{5}$	6	$\cdots$	$2\cancel{n}-1$	$2n$	$2\cancel{n}+1$	$2n+2$	$\cdots$
	1		2		3	$\cdots$		n		$n+1$	$\cdots$

es decir, P es numerable, los números pares se pueden “contar”, existe una correspondencia biyectiva entre los números pares y los naturales.

Ejercicio 1 *Probar que el conjunto de los números impares I en numerable y encontrar una aplicación biyectiva entre I y $\mathbb{N}$.*

Ejercicio 2 *Probar que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ en numerable y encontrar una aplicación biyectiva entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$. (piense en como escribir consecutivamente todos los números enteros y haga el correspondiente esquema)*

Veamos un ejemplo más complicado. Sea A el conjunto de puntos del plano de la forma (n, m), $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces A es numerable.

Para comprobarlo vamos a “contar” todos los pares anteriores, es decir vamos a construir una función biyectiva que a cada par le haga corresponder un único valor de $n \in \mathbb{N}$. Lo haremos siguiendo

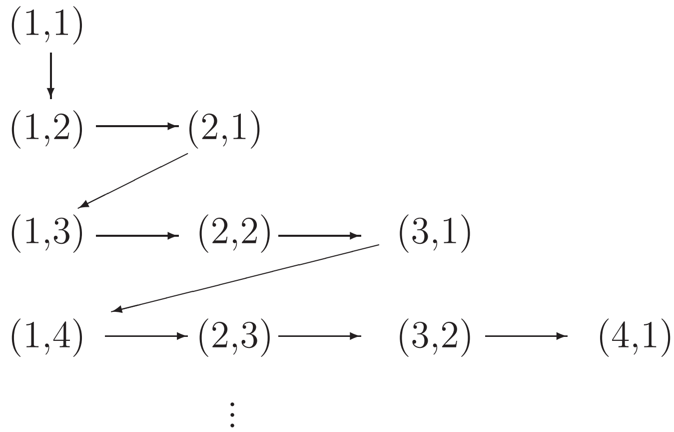

Figura 1: Contando el conjunto $A = \{(n, m), ; n, m \in \mathbb{N}\}$.

el siguiente esquema: ordenamos los pares por filas según la suma $n + m = 2, 3, 4, \ldots$ y cada fila la ordenamos de menor a mayor según el primer valor n y así tenemos una correspondencia biúnivoca tal y como se ve en la figura 1

Ejercicio 3 *Prueba que el conjunto $B = \{(p, q)\,;\, p, q \in \mathbb{Z}\}$ es numerable, es decir que se puede construir una "ordenación" de B similar a la del ejemplo anterior.*

Ejercicio 4 *Sea un número r racional cualquiera, $r \in \mathbb{Q}$. Entonces r se puede escribir como $r = p/q$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Así que a cada número racional le podemos hacer corresponder el par (p, q) con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Prueba que entonces $\mathbb{Q}$ es numerable, es decir que se puede construir una "ordenación" de $\mathbb{Q}$ similar a la del ejemplo anterior.*

2. Propiedades de los conjuntos numerables

Veamos algunas propiedades de los conjuntos numerables.

Ejercicio 5 *Prueba que si A es un conjunto numerable y B es un subconjunto infinito de A, entonces B es numerable.*

Ejercicio 6 *Prueba que:*

1. *la unión de un conjunto numerable y uno finito es numerable,*
2. *la unión de dos conjuntos numerables es numerable, y por tanto la unión de un número finito de conjuntos numerables es numerable*
3. *la unión de un número numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Para probar el último apartado escribe cada uno de los conjuntos numerables de la forma $A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots a_{1,n}, \ldots\}$, $A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots a_{2,n}, \ldots\}$,..., $A_m = \{a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots a_{m,n}, \ldots\}$, y escríbelos como una tabla. A continuación razona como han de contarse los elementos del conjunto $\cup_k A_k$. Nota que los casos anteriores son casos particulares de éste (¿por qué?)

Veamos como usando los apartados anteriores podemos probar los ejercicios que antes hemos resuelto.

Sea $\mathbb{N}^-$ el conjunto de los números enteros negativos y sea $\mathbb{Z}_k$, $k \in \mathbb{N}$, los conjuntos de los números de la forma n/k, con $n \in \mathbb{Z}$, es decir $\mathbb{Z}_k = \{n/k\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$. Obviamente $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-$, pero tanto

$\mathbb{N}$ como $\mathbb{N}^-$ son numerables, así que $\mathbb{Z}$ es numerable. Además, por construcción $\mathbb{Z}_k$ es numerable. Además, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{Z}_k \cup \cdots$, o sea $\mathbb{Q}$ es la unión de una cantidad numerable de conjuntos numerables así que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Definamos ahora el conjunto "producto directo" de dos conjuntos. Sea A y B dos conjuntos cuales quiera. Definiremos el "producto directo" de A y B que denotaremos por $A \otimes B$ al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

Ejercicio 7 *Prueba que si A y B son numerables el conjunto $A \otimes B$ es numerable.*

Para probarlo piensa en la analogía con el ejercicio 3.

Como consecuencia del ejercicio anterior tenemos otra prueba de que $\mathbb{Q}$ es numerable pues, como hemos visto, a cada número racional le podemos hacer corresponder el par (p, q) con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, p, q primos entre si, o sea, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{N}$.

Sea ahora $\mathbb{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado a lo más n con coeficientes $a_0, \ldots a_n$ racionales:

$$\mathbb{P}_n = \{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n x^n \, ; \, a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Q}\}$$

Ejercicio 8 *Prueba que $\mathbb{P}_n$ es numerable.*

Sea ahora

$$\mathbb{P} = \{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n x^n \, ; \, a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Q}, \ \forall n \in \mathbb{N}\},$$

es decir el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales, o sea, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 \cup \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2 \cup \cdots$.

Ejercicio 9 *Prueba que $\mathbb{P}$ es numerable.*

Para probarlo usa inducción sobre n así como que $\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}_n \cup \{a_{n+1} x^{n+1} \, ; \, a_{n+1} \in \mathbb{Q}\}$.

Definición 1 *Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que x es solución de la ecuación algebraica*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n x^n = 0, \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Q}.$$

Entonces se dice que x es un número algebraico. Si x no es solución de ninguna ecuación algebraica, entonces se dice trascendente.

Por ejemplo, 2 es un número algebraico $(x - 2 = 0)$, $\sqrt{2}$ es un irracional algebraico pues es solución de $x^2 - 2 = 0$. Se puede probar que e u π son trascendentes.

Nótese que, a diferencia de los números irracionales, ningún número racional puede ser trascendente (¿por qué?). Sea $\mathring{A}$ el conjunto de todos los números algebraicos y $\mathbb{T}$ el de los trascendentes.

Ejercicio 10 *Usando el ejercicio 9 prueba que $\mathring{A}$ es numerable. (¿cuántas raíces puede tener una ecuación algebraica?)*

3. La no numerabilidad de $\mathbb{R}$

Definición 2 *Dos conjuntos A y B se denominan equivalentes y se denota por $A \sim B$ si existe una correspondencia biunívoca entre sus elementos. En este caso el "número" de sus elementos es el mismo lo que se suele denotar por card $A =$ card B*[1].

[1] En realidad el concepto de cardinal o potencia de un conjunto es ligeramente más complicado que el número de sus elementos, pero para nuestros objetivos esta definición es suficiente.

En fácil comprobar entonces que si $A \sim B$ entonces $B \sim A$ (¿por qué?) y que si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$.

Por ejemplo, según hemos visto antes $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{P}$, $\mathbb{N} \sim \mathring{A}$, $\mathbb{Q} \sim \mathring{A}$, etc.

Es evidente que el conjunto de los números racionales que pertenecen al conjunto $[0,1]$ es numerable pues son un subconjunto de $\mathbb{Q}$. La pregunta es ¿será también numerable el conjunto de los irracionales contenidos en $[0,1]$?, o, equivalentemente, ¿será numerable $[0,1]$?

Vamos a intentar responder a esta pregunta.

Supongamos que $[0,1] \sim \mathbb{N}$. Entonces ha de existir una sucesión de números reales $(x_n)_n$ tal que cualquiera sea $x \in [0,1]$, x coincidirá con al menos un miembro de la sucesión $(x_n)_n$ (en caso contrario $[0,1]$ no sería numerable, ¿por qué?).

Hagamos la siguiente construcción: sea $I_0 = [0,1]$. Escojamos un intervalo cerrado $I_1 \subset I_0$ que no contenga a x_1, o sea, $x_1 \notin I_1$. A continuación escojamos un intervalo cerrado $I_2 \subset I_1$ que no contenga a x_2, o sea, $x_2 \notin I_2$, y así sucesivamente. Entonces tenemos una sucesión de intervalos (cerrados) encajados tal que $I_{n+1} \subset I_n$ pero $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Entonces, existe al menos un $x \in I_n$ para todo $n \geq 0$. ¿Puede ser eso posible? Justifica tu respuesta.

De lo anterior es fácil deducir el Teorema de Cantor

Teorema 1 $\mathbb{R}$ *no es numerable. (card* $\mathbb{R} >$ *card* $\mathbb{N}$*)*

Como corolario tenemos

Corolario 1 *1.* $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$*, es decir, existe* $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$*, el el conjunto de los números irracionales, y además* $\mathbb{I}$ *no es numerable.*

2. $\mathring{A} \neq \mathbb{I}$*, existe el conjunto de los números trascendentes* $\mathbb{T}$*, y* $\mathbb{T}$ *no es numerable.*

Ejercicio 11 *Prueba el Teorema de Cantor y su corolario.*

Resulta que la mayoría de los números irracionales que conocemos son algebraicos, por ejemplo $\sqrt[n]{k}$ si $k \neq l^n$, $l \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ (prueba que este número es irracional algebraico), etc. Por el contrario se conocen pocos números trascendentes: π, e. No obstante resulta que éstos son la mayoría de todos los números ya que los números algebraicos (que incluyen, como hemos visto a los racionales) es un conjunto numerable, pero $\mathbb{R}$ no lo es y obviamente $\mathbb{R} = \mathring{A} \cup \mathbb{T}$.

4. La hipótesis del continuo

Automáticamente surge la pregunta. ¿Existirá algún conjunto infinito intermedio entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$?, es decir, que tenga “más” elementos que $\mathbb{N}$ pero “menos” que $\mathbb{R}$?

Georg Cantor fué quien desarrolló la teoría moderna de conjuntos infinitos, a él debemos la notación y algunos de los resultados que hemos descrito aquí. Precisamente fue Cantor quien conjeturó que no existía dicho conjunto intermedio (hipótesis del continuo). Este fué el primero de los 23 famosos problemas que formuló Hilbert en 1900. La respuesta a este problema fue totalmente inesperada. Por un lado Kurt Gödel probó en 1940 que usando los axiomas de la teoría de conjuntos era imposible desmentir la hipótesis de Cantor. La respuesta definitiva la dió Paul Cohen en 1963 cuando demostró que bajo el mismo sistema de axiomas de la teoría de conjuntos era imposible probar la conjetura, o sea, la hipótesis del continuo se puede aceptar o no y eso no lleva a ninguna contradicción lógica dentro de la teoría de conjuntos.

Espacios métricos completos y convergencia uniforme

Definición 1 *Sea $(\mathbb{X}, \rho)$ un espacio métrico y sea $(\overline{\mathbb{X}}, \rho)$ su clausura. Llamaremos completamiento de $\mathbb{X}$ al espacio métrico $\mathbb{X}^*$ tal que $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^*$ y $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$.*

Por ejemplo, el conjunto de todos los reales $\mathbb{R}$ es el completamiento del conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$.

Demuestra el siguiente teorema:

Teorema 1 *Todo espacio métrico $(\mathbb{X}, \rho)$ tiene un completamiento. Dicho completamiento es único salvo isometrías. Es decir, si $\mathbb{X}^*$ y $\mathbb{X}^{**}$ son dos completamientos de $\mathbb{X}$, entonces existe una aplicación $T : \mathbb{X}^* \mapsto \mathbb{X}^{**}$, $x^{**} = Tx^*$ tal que $Tx = x$ para todo $x \in \mathbb{X}$ y $\rho^*(x^*, y^*) = \rho^{**}(Tx^*, Ty^*)$.*

Como sabemos, dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathbb{R}$, hay dos tipos de convergencia: puntual y uniforme. Sus definiciones son:

Definición 2 *Una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ converge puntualmente en $I \in \mathbb{R}$ si para todo $x_0 \in I$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(x_0, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$ y lo denotaremos $f_n \to f$.*

Definición 3 *Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en un intervalo $I \in \mathbb{R}$, diremos que $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y para todos los $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, y lo denotaremos $f_n \rightrightarrows f$.*

Para aplicaciones en espacios métricos podemos generalizarlas como sigue:

Definición 4 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de aplicaciones $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y sea $M \subset D(T)$. Diremos que T_n converge puntualmente en M a $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, si para todo $x \in M$ la sucesión $(T_n x)_n$ es convergente, i.e., para cada $x \in M$ $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx = y$.*

En otras palabras

$$\forall \epsilon > 0 \quad \text{y} \quad \forall x \in M, \quad \exists N := N(\epsilon, x) \in \mathbb{N}; \quad \forall n > N, \quad \Longrightarrow \rho(T_n x, Tx) < \epsilon.$$

Está claro de la definición anterior que el número N depende no sólo del valor de ϵ sino también del punto x. Para diferentes x tendremos en general diferentes N.

Definición 5 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de aplicaciones $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y sea $M \subset D(T)$. Diremos que T_n converge uniformemente en M a $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N := N(\epsilon) \in \mathbb{N}; \quad \forall n > N, \quad y \quad \forall x \in M, \quad \Longrightarrow \rho(T_n x, Tx) < \epsilon.$$

Es decir, fijado el $\epsilon > 0$, podemos escoger un N tal que la desigualdad $\rho(T_n x, Tx) < \epsilon$ es cierta en todo el subconjunto M.

Se trata de decidir cuales de los resultados y teoremas del apartado §5 **Sucesiones y series de funciones** de las notas de clase se pueden extender al caso de un espacio métrico general. Por ejemplo, es fácil probar que una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme de la sucesión $(T_n)_n$ en $M \subset D(T)$ es que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} \rho(T_n x, Tx) = 0.$$

Decide si los teoremas 5.7 (y su corolario 5.8), 5.10 y 5.19 se pueden extender al caso un espacio métrico general. En caso de ser posible reescríbelos y pruébalos en el contexto de los espacios métricos.

Define una serie de aplicaciones en $\mathbb{X}$ y prueba (si es posible) las generalizaciones de los teoremas 5.16 y 5.17.