A. Cálculo práctico de límites.

Teorema A.1 *(Criterio de la raíz)*
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Entonces, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Ejemplo A.2 *Calcular los límites $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}}$, $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.*

Usando el criterio de la raíz tenemos, en el primer caso

$$a_n = \frac{a^n}{n!}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = 0.$$

En el segundo,

$$a_n = n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Una consecuencia de este último límite es que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ cualquiera sea $x > 0$.

Teorema A.3 *(Stolz)*
Sea $\frac{a_n}{b_n}$ una sucesión tal que b_n es creciente con límite infinito y sea que la sucesión $\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ es convergente con límite l. Entonces $\frac{a_n}{b_n}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l.$$

Ejemplo A.4 *Calcular los límites*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{\log n}.$$

Para el primero podemos usar $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ lo que nos da, en el límite $1/2$, no obstante usaremos el teorema de Stolz. Tomando $a_n = 1 + 2 + \cdots + n$ y $b_n = n$ tenemos que se cumplen todas las condiciones del teorema además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1} - a_n}{b_{n-1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

En el segundo caso tomamos $a_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ y $b_n = \log n$ de forma que se cumplen todas las condiciones del teorema además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1} - a_n}{b_{n-1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\log n - \log(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = 1.$$

Teorema A.5 *(Límites notables) Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$*, para todo* $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^\alpha} = 0$*, para todo* $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$*, para todo* $a > 1$*,* $\alpha > 0.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.* $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$*.* $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)$

Definición A.6 *Dos sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *se denominan equivalentes si* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$*, y se escribe* $a_n \sim b_n$*.*

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n!$ es equivalente a la sucesión $b_n = \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$ y por tanto la siguiente fórmula, conocida como la fórmula de Stirling, es válida:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n\,. \tag{A.1}$$

Ejemplo A.7 *Calcular el límite* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2(n!)}$.

Sea $x_n = n!$. Definamos $s_n = \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$. Entonces, como $s_n/x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2(n!)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2s_n}\frac{s_n}{x_n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2s_n} \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2s_n},
\end{aligned}$$

pero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2s_n}, \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Definición A.8 *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se denomina infinitesimal si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

Definición A.9 *Dos sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *se denominan infinitésimos equivalentes y se escribe* $a_n \sim b_n$ *si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$*.*

Teorema A.10 *Si* $\{a_n\}$ *es una sucesión infinitesimal, entonces:*

1. $\operatorname{sen} a_n \sim a_n$.

2. $\tan a_n \sim a_n$.

3. $\operatorname{arc\,sen} a_n \sim a_n$.

4. $\arctan a_n \sim a_n$.
5. $1 - \cos a_n \sim \dfrac{a_n^2}{2}$.
6. $(1 + a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, a_n$.
7. $e^{a_n} - 1 \sim a_n, \qquad b^{a_n} - 1 \sim a_n \log b$.
8. $\log(1 + a_n) \sim a_n, \qquad \log_b(1 + a_n) \sim a_n \log_b e$.

Funciones elementales del análisis.

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{A.2}$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{A.3}$$

$$(1 + z)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)_k}{k!} z^k, \qquad |z| < 1, \tag{A.4}$$

donde $(a)_n$ denota al *símbolo de Pochhammer*

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1), \;\; k = 1, 2, 3, \ldots \;\; .$$

Como casos particulares de la serie (A.4) se tienen

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k, \qquad |z| < 1. \tag{A.5}$$

Haciendo el cambio z por z^2 en (A.5) obtenemos

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}, \qquad |z| < 1. \tag{A.6}$$

Escojamos ahora (A.4) con $\alpha = -\frac{1}{2}$ y cambiemos z por $-z^2$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{k!} z^k, \qquad |z| < 1. \tag{A.7}$$

donde $(1/2)_k = (1/2)(1/2 + 1) \cdots (1/2 + k - 1)$.

Finalmente,

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \quad |z| < 1. \tag{A.8}$$

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |z| < 1. \tag{A.9}$$

$$\operatorname{arc\,sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{k!(2k+1)} z^{2k+1}, \qquad |z| < 1. \tag{A.10}$$