Apellidos, Nombre: ____

AMPLIACIÓN DE ANÁLISIS: ANÁLISIS FUNCIONAL: EXAMEN FINAL febrero 2012

Pregunta 1. (2 Puntos) Demuestra uno de los siguientes teoremas:

1. Sea el operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach con $\|A\| < 1$. Prueba que $I - A$ es invertible y (en norma) $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$, donde $A^0 := I$.

2. (De las esferas encajadas). Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico. $\mathbb{X}$ es completo si y sólo si, cualquier sucesión de esferas encajadas cuyos radios tiendan a cero ($r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) tiene intersección no vacía, i.e., $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n) \neq \emptyset$.

<u>DEMOSTRACIÓN:</u>

PROBLEMAS

Problema 1 (3 ptos.) Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ y sean $x, y \in \mathbb{R}^N$

1. Sea la función ρ definida por $\rho(x,y) = \sqrt[3]{\sum_{n=1}^{N} \frac{|x_n - y_n|^3}{3^n}}$. Decide si el espacio $(\mathbb{X}, \rho)$ es un espacio métrico. Justifica la respuesta.

2. En caso de serlo, decide si es completo. Justifica la respuesta.

Problema 2 (2.5 ptos.) *Prueba que si $\mathbb{X}$ es un espacio normado, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente si y sólo si $\mathbb{X}$ es completo.*

Problema 3 (2.5 ptos.) Prueba la *ley del paralelogramo* para los espacios euclídeos. I.e., sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo y $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto escalar. Entonces, para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$