Sucesiones y series de funciones

Renato Álvarez Nodarse

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla
http://euler.us.es/~renato/

8 de octubre de 2012

Sucesiones y series de funciones.

En este apartado vamos a considerar una extensión *obvia* de la teoría de las sucesiones y series númericas: sucesiones y series de funciones.

Es decir, vamos a considerar un conjunto de funciones

$$\mathbf{f_n(x)} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$$

que dependan de un parámetro $n \in \mathbb{N}$.

Sucesiones y series de funciones.

En este apartado vamos a considerar una extensión *obvia* de la teoría de las sucesiones y series númericas: sucesiones y series de funciones.

Es decir, vamos a considerar un conjunto de funciones

$$\mathbf{f_n(x)} : \ \mathbb{X} \to \mathbb{R}$$

que dependan de un parámetro $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo $f_n(x) : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \qquad f_n(x) = x^n, \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$$

Sucesiones y series de funciones.

Una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$, es una aplicación que a cada número natural le hace corresponder una función

$$\mathbf{f_n(x)} : \ \mathbb{D}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

Sucesiones y series de funciones.

Una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$, es una aplicación que a cada número natural le hace corresponder una función

$$\mathbf{f_n(x)} : \mathbb{D}_n \to \mathbb{R}$$

Así mismo, podremos hablar de una serie de funciones

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{f_n(x)}$$

asociada a la sucesión de funciones $(f_n(x))_n$.

Sucesiones y series de funciones.

Es evidente que la sucesión $(f_n(x))_n$ tendrá sentido si podemos definir $f_n(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, si existen las sucesiones númericas $(f_n(x_0))_n$ para al menos un x_0.

Sucesiones y series de funciones.

Es evidente que la sucesión $(f_n(x))_n$ tendrá sentido si podemos definir $f_n(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, si existen las sucesiones númericas $(f_n(x_0))_n$ para al menos un x_0.

Esto no siempre ocurre. Por ejemplo, para la sucesión

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \sqrt{x},\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ \sqrt{-x},\ \cdots .$$

cuyos dominios son $\mathbb{R}$, $[0, +\infty)$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(-\infty, 0]$, etc..

Sucesiones y series de funciones.

Es evidente que la sucesión $(f_n(x))_n$ tendrá sentido si podemos definir $f_n(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, si existen las sucesiones númericas $(f_n(x_0))_n$ para al menos un x_0.

Esto no siempre ocurre. Por ejemplo, para la sucesión

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \sqrt{x},\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ \sqrt{-x},\ \cdots .$$

cuyos dominios son $\mathbb{R}$, $[0, +\infty)$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(-\infty, 0]$, etc..

En adelante asumiremos que existe un conjunto mínimo $\mathbb{D}$ no vacío donde está definida la sucesión completa: $\mathbb{D} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{D}_n$ que lo denominaremos dominio de la sucesión de funciones y lo denotaremos por $\mathrm{Dom}\,(f_n(x))$.

Definiciones

D1: La sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ tiene límite para cierto $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f_n)$ si la sucesión númerica $(f_n(x_0))_n$ converge para dicho x_0. En este caso diremos que la sucesión converge puntualmente en x_0,

Definiciones

D1: La sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ tiene límite para cierto $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f_n)$ si la sucesión númerica $(f_n(x_0))_n$ converge para dicho x_0. En este caso diremos que la sucesión converge puntualmente en x_0,

D2: El conjunto $\mathbb{X}$ de todos los puntos $x \in \mathrm{Dom}\,(f_n)$ donde la sucesión $(f_n(x))_n$ converge se denomina conjunto de convergencia de la sucesión de funciones.

Como $\forall x \in \mathbb{X}$, existe un único valor del límite de $(f_n(x))_n$, entonces podemos definir una función $f(x)$ sobre $\mathbb{X}$, i.e.,

Definiciones

D1: La sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ tiene límite para cierto $x_0 \in \operatorname{Dom}(f_n)$ si la sucesión númerica $(f_n(x_0))_n$ converge para dicho x_0. En este caso diremos que la sucesión converge puntualmente en x_0,

D2: El conjunto $\mathbb{X}$ de todos los puntos $x \in \operatorname{Dom}(f_n)$ donde la sucesión $(f_n(x))_n$ converge se denomina conjunto de convergencia de la sucesión de funciones.

Como $\forall x \in \mathbb{X}$, existe un único valor del límite de $(f_n(x))_n$, entonces podemos definir una función $f(x)$ sobre $\mathbb{X}$, i.e.,

D3: En el conjunto $\mathbb{X}$ de convergencia de $(f_n(x))_n$ la función $f(x)$ definida para cada $x \in \mathbb{X}$ de la forma $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ se denomina función límite de $(f_n(x))_n$. Si existe $f(x)$ se dice que la sucesión $(f_n(x))_n$ converge puntualmente a $f(x)$ en $\mathbb{X}$ y se denota por $f_n(x) \to f(x)$.

Ejemplos

- E1: Definamos en $[0, \infty)$ la sucesión $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Es fácil comprobar que la sucesión de funciones converge si y sólo si $x \in [0, 1]$, además

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

es la función límite. Nótese que si escogemos $\mathbb{X} = [0, q]$, $0 \leq q < 1$, entonces $f(x) = 0$.

Ejemplos

- E1: Definamos en $[0,\infty)$ la sucesión $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Es fácil comprobar que la sucesión de funciones converge si y sólo si $x \in [0,1]$, además

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

  es la función límite. Nótese que si escogemos $\mathbb{X} = [0,q]$, $0 \leq q < 1$, entonces $f(x) = 0$.

- E2a: Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$. Es evidente que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.

Ejemplos

- E1: Definamos en $[0,\infty)$ la sucesión $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Es fácil comprobar que la sucesión de funciones converge si y sólo si $x \in [0,1]$, además

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

 es la función límite. Nótese que si escogemos $\mathbb{X} = [0,q]$, $0 \leq q < 1$, entonces $f(x) = 0$.

- E2a: Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$. Es evidente que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.
- E2b: Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$. Como en el ejemplo anterior $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.

Ejemplos

- E3: Sea $f_n(x) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Evidentemente si $x = 0$ o $x = 1$, $f_n(x) = 0$. Si $x \in (0,1)$ entonces $(1-x^2) < 1$, luego $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $\mathbb{X} = [0,1]$ y $f(x) = 0$.

Ejemplos

- E3: Sea $f_n(x) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Evidentemente si $x = 0$ o $x = 1$, $f_n(x) = 0$. Si $x \in (0,1)$ entonces $(1-x^2) < 1$, luego $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $\mathbb{X} = [0,1]$ y $f(x) = 0$.
- E4: Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sea $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$. Si $m!x \in \mathbb{Z} \implies f_m(x) = 1$, si $m!z \notin \mathbb{Z} \implies f_m(x) = 0$.

Ejemplos

- E3: Sea $f_n(x) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Evidentemente si $x = 0$ o $x = 1$, $f_n(x) = 0$. Si $x \in (0,1)$ entonces $(1-x^2) < 1$, luego $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $\mathbb{X} = [0,1]$ y $f(x) = 0$.
- E4: Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sea $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$. Si $m!x \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f_m(x) = 1$, si $m!z \notin \mathbb{Z} \Longrightarrow f_m(x) = 0$.

  Veamos el límite cuando $m \to \infty$ de $f_m(x)$. Si $x \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \forall m \in \mathbb{N}$, $m!x \notin \mathbb{Z}$, por tanto $f_m(x) = 0$ y $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = 0$.

Ejemplos

- E3: Sea $f_n(x) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Evidentemente si $x = 0$ o $x = 1$, $f_n(x) = 0$. Si $x \in (0,1)$ entonces $(1-x^2) < 1$, luego $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $\mathbb{X} = [0,1]$ y $f(x) = 0$.
- E4: Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sea $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$. Si $m!x \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f_m(x) = 1$, si $m!z \notin \mathbb{Z} \Longrightarrow f_m(x) = 0$.

  Veamos el límite cuando $m \to \infty$ de $f_m(x)$.
  Si $x \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \forall m \in \mathbb{N}$, $m!x \notin \mathbb{Z}$, por tanto $f_m(x) = 0$ y $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = 0$.
  Si $x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$ a partir de cierto $m \in \mathbb{N}$, $m!x \in \mathbb{Z}$, por tanto, a partir de dicho m, $f_m(x) = 1 \Longrightarrow f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = 1$.

Ejemplos

- E3: Sea $f_n(x) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Evidentemente si $x = 0$ o $x = 1$, $f_n(x) = 0$. Si $x \in (0,1)$ entonces $(1-x^2) < 1$, luego $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $\mathbb{X} = [0,1]$ y $f(x) = 0$.
- E4: Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sea $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$. Si $m!x \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f_m(x) = 1$, si $m!z \notin \mathbb{Z} \Longrightarrow f_m(x) = 0$.

  Veamos el límite cuando $m \to \infty$ de $f_m(x)$.
  Si $x \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \forall m \in \mathbb{N}$, $m!x \notin \mathbb{Z}$, por tanto $f_m(x) = 0$ y $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = 0$.
  Si $x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$ a partir de cierto $m \in \mathbb{N}$, $m!x \in \mathbb{Z}$, por tanto, a partir de dicho m, $f_m(x) = 1 \Longrightarrow f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = 1$.
  Así, tenemos que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = D(x)$, es la función de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases} .$$

Objetivo fundamental

Nuestro objetivo fundamental NO es estudiar cuando las sucesiones funcionales convergen o no –pues eso ya lo hemos visto antes pues para cada x la sucesión $(f_n(x))_n$ es una sucesión numérica– sino decidir en que condiciones las propiedades de f_n se traspasan a la función límite.

Objetivo fundamental

Nuestro objetivo fundamental NO es estudiar cuando las sucesiones funcionales convergen o no –pues eso ya lo hemos visto antes pues para cada x la sucesión $(f_n(x))_n$ es una sucesión numérica– sino decidir en que condiciones las propiedades de f_n se traspasan a la función límite.

¿Hereda $f(x)$ todas las propiedades de las $f_n(x)$?

Los ejemplos anteriores sirven de ilustración a nuestro problema.

Ejemplos

E1: $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. En $\mathbb{D} = [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

es la función límite.

Si escogemos $\mathbb{X} = [0,q]$, $0 \leq q < 1$, entonces $f(x) = 0$.

Aquí las funciones x^n son continuas en $[0,1]$ pero la función límite $f(x)$ no lo es. No ocurre lo mismo en el intervalo $\mathbb{X} = [0,q]$. Además

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0 = \int_0^1 0\,dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Ejemplos

E2a: Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$. Es evidente que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.

Aquí la función $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, y su función límite también, pero por ejemplo, la sucesión de sus derivadas $f_n'(x) = n \cos n^2 x$ no tiene límite excepto cuando $n^2 x = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Es decir la sucesión de derivadas no converge a la derivada de la función límite.

Ejemplos

E2a: Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$. Es evidente que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.

Aquí la función $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, y su función límite también, pero por ejemplo, la sucesión de sus derivadas $f_n'(x) = n \cos n^2 x$ no tiene límite excepto cuando $n^2 x = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Es decir la sucesión de derivadas no converge a la derivada de la función límite.

E2b: Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$. Como en el ejemplo anterior $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.

En este caso, a diferencia del anterior la sucesión de sus derivadas $f_n'(x) = \dfrac{\cos nx}{n}$ converge a cero que justamente es la derivada de la función límite. Es decir, en este ejemplo sí que tenemos $f_n'(x) \to f'(x)$.

Ejemplos

E3: Sea $f_n(x) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Como vimos $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$.

La función $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$ es integrable en $[0,1]$ y además

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 2(n{+}1)\int_0^1 x(1{-}x^2)^n dx = 2(n{+}1)\left[-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1\right] = 1,$$

pero $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$, luego $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \not\to \int_0^1 f(x)dx$.

Ejemplos

E4: Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sea $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$.

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = D(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{array} \right. .$$

Nótese que la función $f_m(x)$ vale cero en $[0, 1]$ excepto un número finito de puntos, luego f_m es integrable y su integral vale cero, pero su función límite es una función no integrable.

Ejemplos

E4: Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sea $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$.

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases} .$$

Nótese que la función $f_m(x)$ vale cero en $[0,1]$ excepto un número finito de puntos, luego f_m es integrable y su integral vale cero, pero su función límite es una función no integrable.

Todo lo anterior nos dice que dada una sucesión $(f_n(x))_n$ cuyas funciones tienen determinadas propiedades como la continuidad, derivabilidad o integrabilidad, la función límite puede o no tenerlas.

Ejemplos

E4: Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sea $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$.

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases} .$$

Nótese que la función $f_m(x)$ vale cero en $[0, 1]$ excepto un número finito de puntos, luego f_m es integrable y su integral vale cero, pero su función límite es una función no integrable.

Todo lo anterior nos dice que dada una sucesión $(f_n(x))_n$ cuyas funciones tienen determinadas propiedades como la continuidad, derivabilidad o integrabilidad, la función límite puede o no tenerlas.

Por tanto nuestro objetivo es claro: Encontrar condiciones bajo las cuales la función límite "herede" las propiedades de las funciones de la sucesión.

Convergencia puntual y uniforme

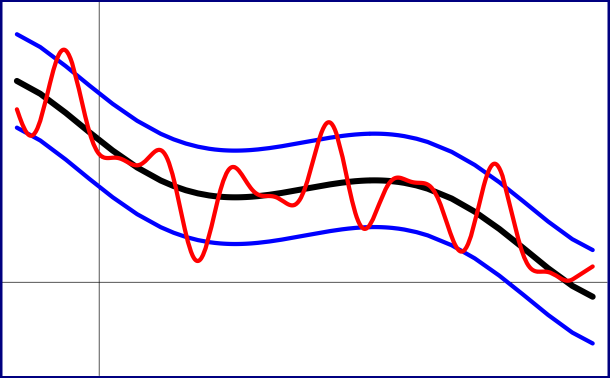
Definición 4: Una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ definidas en $I \subset \mathbb{R}$ converge puntualmente a $f(x)$ en I, i.e., $f_n \to f$ si

$$\forall \epsilon > 0 \text{ y } \forall x_0 \in I, \exists N \equiv N(\epsilon, x_0) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > N, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

Convergencia puntual y uniforme

Definición 4: Una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ definidas en $I \subset \mathbb{R}$ converge puntualmente a $f(x)$ en I, i.e., $f_n \to f$ si

$$\forall \epsilon > 0 \text{ y } \forall x_0 \in I, \exists N \equiv N(\epsilon, x_0) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > N, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$



Convergencia puntual y uniforme

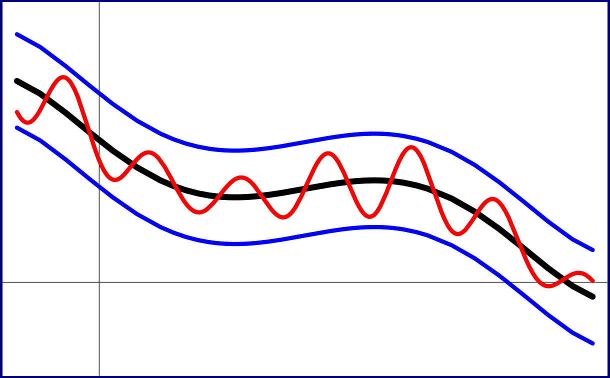
Definición 5: Una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ definidas en $I \subset \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f(x)$ en I, i.e., $f_n \rightrightarrows f$, si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > N \text{ y } \forall x_0 \in I, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

Convergencia puntual y uniforme

Definición 5: Una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ definidas en $I \subset \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f(x)$ en I, i.e., $f_n \rightrightarrows f$, si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > N \text{ y } \forall x_0 \in I, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$



Convergencia puntual y uniforme

$f_n \longrightarrow f$ converge puntualmente a $f(x)$ en I si

$$\forall \epsilon > 0 \text{ y } \forall x_0 \in I, \exists N \equiv N(\epsilon, x_0) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > N, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

$f_n \rightrightarrows f$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > N \text{ y } \forall x_0 \in I, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

Convergencia puntual y uniforme

$f_n \longrightarrow f$ converge puntualmente a $f(x)$ en I si

$$\forall \epsilon > 0 \text{ y } \forall x_0 \in I, \exists N \equiv N(\epsilon, x_0) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > N, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

$f_n \rightrightarrows f$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > N \text{ y } \forall x_0 \in I, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

Convergencia puntual y uniforme

$f_n \longrightarrow f$ converge puntualmente a $f(x)$ en I si

$$\forall \epsilon > 0 \text{ y } \forall x_0 \in I, \exists N \equiv N(\epsilon, x_0) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > N, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

$f_n \rightrightarrows f$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > N \text{ y } \forall x_0 \in I, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

Ejemplos de convergencias

Ejemplo: $x^n \rightrightarrows 0$ en $[0, q]$, con $0 < q < 1$.

Efectivamente, cualquiera sea $\epsilon > 0$, si escogemos $N = \log \epsilon / \log q$, entonces para todo $n > N$ y todo $x \in [0, q]$, $x^n \leq q^n < \epsilon$, es decir $x^n \rightrightarrows 0$ en $[0, q]$.

Ejemplos de convergencias

Ejemplo: $x^n \rightrightarrows 0$ en $[0, q]$, con $0 < q < 1$.

Efectivamente, cualquiera sea $\epsilon > 0$, si escogemos $N = \log \epsilon / \log q$, entonces para todo $n > N$ y todo $x \in [0, q]$, $x^n \leq q^n < \epsilon$, es decir $x^n \rightrightarrows 0$ en $[0, q]$.

Comprobemos que $x^n \not\rightrightarrows 0$ en $[0, 1)$.

Ejemplos de convergencias

Ejemplo: $x^n \rightrightarrows 0$ en $[0, q]$, con $0 < q < 1$.

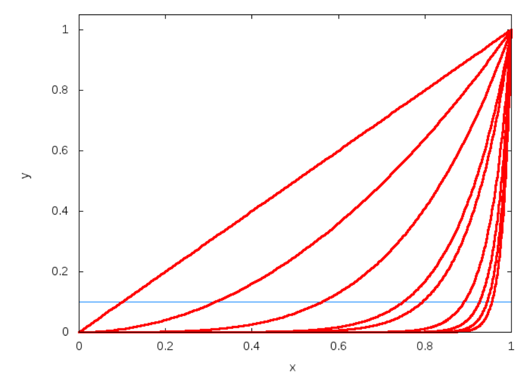
Efectivamente, cualquiera sea $\epsilon > 0$, si escogemos $N = \log \epsilon / \log q$, entonces para todo $n > N$ y todo $x \in [0, q]$, $x^n \leq q^n < \epsilon$, es decir $x^n \rightrightarrows 0$ en $[0, q]$.

Comprobemos que $x^n \not\rightrightarrows 0$ en $[0, 1)$.

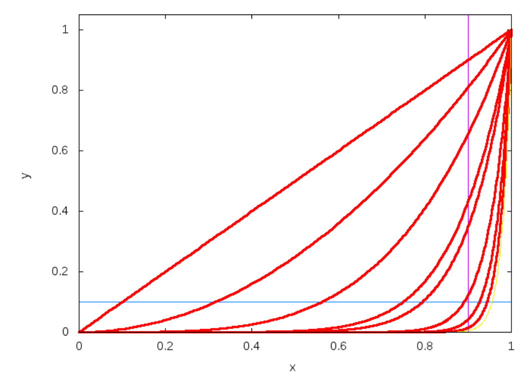
Sea $\epsilon > 0$ t.q. $0 < \epsilon < 1$. Como $\lim_{x \to 1} x^n = 1$ ello indica que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ siempre existe un $x_\epsilon \in (0, 1)$ tal que $x_\epsilon^n \geq \epsilon$ basta escoger, por ejemplo, $x_\epsilon = \sqrt[n]{\epsilon}$.

Luego dado un $\epsilon \in (0, 1)$, cualquiera sea $N \in \mathbb{N}$ siempre existe un $x \in (0, 1)$ tal que $f_n(x) = x^n \geq \epsilon$, por tanto $f_n \not\rightrightarrows f$ en $[0, 1)$.

La sucesión $f_n(x) = x^n$ en $[0, 1]$



La sucesión $f_n(x) = x^n$ en $[0, q]$, $q < 1$



Ejemplos de convergencias: Simulación

Ver las **simulaciones**

Principales teoremas

T1: *(Condición necesaria y suficiente de convergencia uniforme para una sucesión de funciones)*
Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathcal{X}$, $f_n(x)$ converge **uniformemente** a $f(x)$ en I **si y sólo si**

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Principales teoremas

T1: *(Condición necesaria y suficiente de convergencia uniforme para una sucesión de funciones)*
Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathcal{X}$, $f_n(x)$ converge **uniformemente** a $f(x)$ en I **si y sólo si**

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Corolario: Para que una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathcal{X}$, $f_n(x)$ converja uniformemente a $f(x)$ en I es **necesario y suficiente** que exista una sucesión $(a_n)_n$ de términos no negativos con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y un número $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n > N, \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$$

Principales teoremas

T1: *(Condición necesaria y suficiente de convergencia uniforme para una sucesión de funciones)*
Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathcal{X}$, $f_n(x)$ converge **uniformemente** a $f(x)$ en I **si y sólo si**

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Corolario: Para que una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathcal{X}$, $f_n(x)$ converja uniformemente a $f(x)$ en I es **necesario y suficiente** que exista una sucesión $(a_n)_n$ de términos no negativos con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y un número $N \in \mathbb{N}$ tal que
$\forall n > N, \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$

Ejercicio: Probar que la sucesión $f_n(x) = x^n \rightrightarrows 0$ en $[0, q]$, $0 < q < 1$, pero no lo hace en $[0, 1)$.

Principales teoremas

T2: *(Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme para una sucesión de funciones)*
Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathcal{X}$, $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si y sólo si $\forall \epsilon > 0$,

$\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in I$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

Principales teoremas

T2: *(Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme para una sucesión de funciones)*
Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathcal{X}$, $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si y sólo si $\forall \epsilon > 0$,

$\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in I$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

Corolario: Si $(f_n(x))_n$ y $(g_n(x))_n$ son dos sucesiones de funciones uniformemente convergentes en I a las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, entonces

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \rightrightarrows \alpha f(x) + \beta g(x), \quad \text{en I}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$h(x) f_n(x) \rightrightarrows h(x) f(x), \qquad \text{para toda función } h(x) \text{ acotada en } I.$$

Convergencia de series de funciones

D6: Dada una sucesión de funciones $(a_n(x))_n$, la expresión

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_k(x) + \cdots$$

se denomina serie funcional o serie de funciones y las

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_n(x),$$

se denominan sumas parciales de la serie de funciones.

Convergencia de series de funciones

D6: Dada una sucesión de funciones $(a_n(x))_n$, la expresión

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_k(x) + \cdots$$

se denomina serie funcional o serie de funciones y las

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_n(x),$$

se denominan sumas parciales de la serie de funciones.

D7: Una serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge puntualmente (*uniformemente*) en $I \in \mathcal{X}$ si la correspondiente sucesión de sumas parciales converge puntualmente (*uniformemente*) en I.

Convergencia de series de funciones

Si definimos el resto de la serie

$$r_n(x) \equiv S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x),$$

entonces, la serie converge uniformemente si y sólo si $r_n(x) \rightrightarrows 0$, en caso contrario la convergencia no es uniforme.

Convergencia de series de funciones

Si definimos el resto de la serie

$$r_n(x) \equiv S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x),$$

entonces, la serie converge uniformemente si y sólo si $r_n(x) \rightrightarrows 0$, en caso contrario la convergencia no es uniforme.

T3: Si la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ es uniformemente convergente en I, entonces, $a_n(x)$, el término general de la serie converge uniformemente a 0 en I, es decir $a_n(x) \rightrightarrows 0$.

Convergencia de series de funciones

T4: *(Criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de una serie de funciones)*
Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$, y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales no negativos, tales que $|a_n(x)| \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in I$ y cuya serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente. Entonces la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente an I.

Convergencia de series de funciones

T4: *(Criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de una serie de funciones)*
Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$, y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales no negativos, tales que $|a_n(x)| \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in I$ y cuya serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente. Entonces la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente an I.

¡Este teorema sólo da condiciones suficientes!

Propiedades de las sucesiones de funciones

T5: *(Sobre la conmutatividad del límite de una sucesión de funciones)*
Sea $(f_n(x))_n$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = l_n$, $x_0 \in I$. Si $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)$$

Propiedades de las sucesiones de funciones

T5: *(Sobre la conmutatividad del límite de una sucesión de funciones)*
Sea $(f_n(x))_n$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = l_n$, $x_0 \in I$. Si $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

Corolario: *(Sobre la continuidad de una sucesión de funciones)*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$. Si f_n es continua en I para todo $n \in \mathbb{N}$, y f_n **converge uniformemente** a f en I entonces f es continua en I.

Propiedades de las series de funciones

T6: *(Sobre la conmutatividad del límite y la suma para una serie de funciones)*

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ una serie de funciones uniformemente convergente en I tales que $\lim_{x \to x_0} a_n(x) = a_n$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} a_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si además, las funciones $a_n(x)$ son continuas, entonces la suma $S(x)$ de la serie es una función continua.

Propiedades de las series de funciones

T6: *(Sobre la conmutatividad del límite y la suma para una serie de funciones)*

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ una serie de funciones uniformemente convergente en I tales que $\lim_{x \to x_0} a_n(x) = a_n$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} a_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Si además, las funciones $a_n(x)$ son continuas, entonces la suma $S(x)$ de la serie es una función continua.

El inverso es falso en general, i.e., si $f_n(x) \to f(x)$ en I, y $f_n(x)$ y $f(x)$ son continuas en I, ello no implica $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Propiedades de las series de funciones

T7: *(Sobre la integrabilidad de una sucesión de funciones)*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones $f_n : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ integrables en $[a, b]$ y sea $f_n \rightrightarrows f$ en $[a, b]$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Propiedades de las series de funciones

T7: *(Sobre la integrabilidad de una sucesión de funciones)*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ integrables en $[a,b]$ y sea $f_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Corolario: Sea $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ una serie de funciones uniformemente convergente en $[a,b]$ t.q. $a_n(x)$ son integrables en $[a,b]$, entonces $S(x)$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n(x)dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \int_a^b S(x)dx.$$

Propiedades de las series de funciones

T7: *(Sobre la integrabilidad de una sucesión de funciones)*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones $f_n : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ integrables en $[a, b]$ y sea $f_n \rightrightarrows f$ en $[a, b]$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Corolario: Sea $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ una serie de funciones uniformemente convergente en $[a, b]$ t.q. $a_n(x)$ son integrables en $[a, b]$, entonces $S(x)$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n(x)dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \int_a^b S(x)dx.$$

Demostraremos una versión más sencilla: impondremos que las funciones $f_n(x)$ son continuas en $[a, b]$.

Propiedades de las series de funciones

T8: *(Sobre la derivabilidad de una sucesión de funciones)*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo acotado $I \subset \mathbb{R}$ y derivables en I tales que para cierto $x_0 \in I$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = l$ y además la sucesión de funciones $(f_n')_{n=0}^{\infty}$ converja uniformemente a g en I. Entonces la sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a cierta función f en I y además $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, es decir la sucesión se puede derivar término a término, i.e.,

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Propiedades de las series de funciones

T8: *(Sobre la derivabilidad de una sucesión de funciones)*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo acotado $I \subset \mathbb{R}$ y derivables en I tales que para cierto $x_0 \in I$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = l$ y además la sucesión de funciones $(f_n')_{n=0}^{\infty}$ converja uniformemente a g en I. Entonces la sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a cierta función f en I y además $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, es decir la sucesión se puede derivar término a término, i.e.,

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Nótese que **NO es suficiente** la convergencia uniforme de la sucesión, sino la convergencia uniforme de la sucesión de derivadas + convergencia para algún $x_0 \in I$.

Demostración:

Definamos la sucesión de funciones $(\varphi_n(x))_n$, definidas por

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\[2ex] f_n'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

Las funciones $\varphi_n(x)$ son continuas en I –pues las funciones $f_n(x)$ son derivables en I por condición del teorema–.

Probemos que $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ en I. En efecto, aplicando el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme tenemos

Demostración:

$$|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| = \left| \frac{(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))}{x - x_0} \right| =$$

$$= \left| f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi) \right|,$$

donde $\xi \in (x, x_0)$. Para obtener la última igualdad hemos aplicado el teorema del valor medio de Lagrange a la función $F(x) = f_{n+p}(x) - f_n(x)$, es decir, $F(x) - F(x_0) = F'(\xi)(x - x_0)$.

Además, por definición tenemos $\varphi_{n+p}(x_0) - \varphi_n(x_0)$ $= f'_{n+p}(x_0) - f'_n(x_0)$, luego $|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| = \left| f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi) \right|$ para todo $x \in I$. Ahora bien, como $f'_n(x) \rightrightarrows g(x)$ en I, entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in I$, $\left| f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi) \right| < \epsilon$, entonces

$$|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| = \left| f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi) \right| < \epsilon$$

de donde deducimos que $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ en I.

Demostración:

Probemos ahora que $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I. Para ello usamos las identidades $f_{n+p}(x) = f_{n+p}(x_0) + (x - x_0)\varphi_{n+p}(x)$, y $f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)\varphi_n(x)$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
|f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)[\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)]| \\
&\leq |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| + |x - x_0|\,|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)|
\end{aligned}
$$

Ahora bien, como $f_n(x_0) \to f(x_0)$, entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_1$, y $p \in \mathbb{N}$, $|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \epsilon/2$. Además, $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ en I, por tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in I$, $|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| < \epsilon/2(b - a)$, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ –$N = \text{máx}(N_1, N_2)$– tal que para todo $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in I$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$, o sea, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I.

Demostración:

Para culminar nuestra prueba nos resta demostrar que la función límite $f(x)$ es derivable en I y que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, es decir, que $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Ante todo, notemos que puesto que $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I, entonces la condición $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ se cumple para cualquiera sea $x_0 \in I$ y no sólo para el x_0 prefijado en el enunciado del teorema. Por tanto, si probamos que $f(x)$ es derivable en cierto $\zeta \in I$ –en particular x_0– y que $f_n'(\zeta) \to f'(\zeta) = g(\zeta)$, entonces $f'(x) = g(x)$ en todo I. Escojamos por tanto un ζ cualquiera y redefinamos las funciones

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(\zeta)}{x - \zeta}, & x \neq \zeta \\ f_n'(\zeta), & x = \zeta \end{cases}$$

Como antes, las funciones $\varphi_n(x)$ son continuas en I y $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ en I. Luego

Demostración:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\zeta)}{x - \zeta} = \frac{f(x) - f(\zeta)}{x - \zeta}.$$

Lo anterior junto con el hecho de que todas las funciones $\varphi_n(x)$ son continuas en I, y que $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ en I, nos permiten utilizar el teorema sobre la continuidad de una sucesión de funciones para afirmar que $\varphi(x)$ es continua en I así como el teorema sobre el límite que nos da

$$\lim_{x\to\zeta} \frac{f(x) - f(\zeta)}{x - \zeta} = \lim_{x\to\zeta} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\zeta)}{x - \zeta} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to\zeta} \frac{f_n(x) - f_n(\zeta)}{x - \zeta} \right) = \lim_{n\to\infty} f_n'(\zeta).$$

Esta igualdad nos asegura que existe la derivada de $f(x)$ para todo $x \in I$, y además que

$$f'(\zeta) = \lim_{x\to\zeta} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(\zeta), \qquad \forall \zeta \in I,$$

que es que se quería demostrar.

Aplicación a las series de potencias

T9: (*Segundo Teorema de Abel para las series de potencias*)

Cualquiera sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$, $\exists R \geq 0$ ó $R = +\infty$ t.q. R es el radio de convergencia de la serie. Además, la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z| < R$ y **uniformemente para todo z tal que $|z| \leq r < R$.**

Aplicación a las series de potencias

T9: (*Segundo Teorema de Abel para las series de potencias*)

Cualquiera sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$, $\exists R \geq 0$ ó $R = +\infty$ t.q. R es el radio de convergencia de la serie. Además, la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z| < R$ y **uniformemente para todo z tal que $|z| \leq r < R$.**

T10: *(Sobre la convergencia uniforme de una serie de potencias)*

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$. Entonces la serie *converge uniformemente en cualquier región del plano complejo contenida en* $|z| \leq r < R$, *con* $R = \dfrac{1}{\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Aplicación a las series de potencias

T9: (*Segundo Teorema de Abel para las series de potencias*)

Cualquiera sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$, $\exists R \geq 0$ ó $R = +\infty$ t.q. R es el radio de convergencia de la serie. Además, la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z| < R$ y **uniformemente para todo** z **tal que** $|z| \leq r < R$.

T10: *(Sobre la convergencia uniforme de una serie de potencias)*

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$. Entonces la serie *converge uniformemente en cualquier región del plano complejo contenida en* $|z| \leq r < R$, *con* $R = \dfrac{1}{\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Ejercicio: Aplica los teoremas T6, T7 y T8 a las series de potencias.