MMAF: Espacios normados y espacios de Banach

Licenciatura en Estadística

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

Curso 2011/2012

Definición

Sea V un conjunto de elementos sobre el cual están definidas las operaciones suma "+" *de dos elementos x, y de V y* multiplicación "·" *de un escalar (número real) α por un elemento de V. V es un espacio vectorial si*

1. *$\forall x, y \in V$, el vector suma, $w = x + y \in V$ y se cumple que:*
    1. $x + y = y + x$
    2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
    3. *Existe un elemento "nulo" de V, tal que $x + 0 = 0 + x = x$*
    4. *Cualquiera sea el vector x de V, existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*
2. *$\forall x \in V$, el vector $w = \alpha \cdot x \in V$ y se cumple que:*
    1. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
    2. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
    3. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
    4. $1 \cdot x = x$

1. El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándard.
2. El conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ de las matrices $m \times n$ cuando la suma de dos matrices y la multiplicación por un escalar es la estándard.
3. El conjunto $\mathbb{P}_n$ de los polinomios de grado a lo sumo n

$$\mathbb{P}_n = \{p_n(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n, \quad a_0, \ldots, a_n \text{ números reales.}\},$$

donde definimos

$$p(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n, \quad q(x) = b_0 + b_1\, t + \cdots + b_n\, t^n,$$

$$(p+q)(t) \equiv p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$

$$(\alpha \cdot p)(t) \equiv \alpha\, p(t) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + \cdots + (\alpha a_n)t^n.$$

Además, $p_n = 0$, si y sólo si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

4. El conjunto $C_{[a,b]}$ de las funciones continuas en $[a, b]$

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).
2. Para $V = C_{[a,b]}$, $H = \mathbb{P}_n$ es un subespacio vectorial, para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$ entero.
3. Para $V = \mathbb{P}_n$, $H = \mathbb{P}_k$ es un subespacio vectorial para todo $k < n$.

Subespacios vectoriales

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y,* vectores *de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y, vectores de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Sea $\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$

Subespacios vectoriales

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y, vectores de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Sea $\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$

Teorema

$\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ *es un subespacio vectorial de V.*

Dicho subespacio vectorial comúnmente se denomina subespacio generado por los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Conjuntos linealmente independientes

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Conjuntos linealmente independientes

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *se denomina* **linealmente dependiente** *si existen* $x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$ *no todos iguales a cero tales que se verifique la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0.$$

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Ejemplo 1: Las n columnas $a_1, ..., a_n$ de una matriz invertible $n \times n$, son **li** y además $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\,(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Si $A = I_n$, es la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son la *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Importancias de los vectores **li**: Bases

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Ejemplo 1: Las n columnas $a_1, ..., a_n$ de una matriz invertible $n \times n$, son **li** y además $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\,(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Si $A = I_n$, es la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son la *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2: El conjunto de vectores $S = \{1, t, t^2, ..., t^n\} \in \mathbb{P}_n$ es **li**, además $\mathrm{span}\,(1, t, t^2, ..., t^n) = \mathbb{P}_n$. Luego S es una base de $\mathbb{P}_n$ (*canónica*).

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Ejemplos: $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$, $\dim C_{[a,b]} = \infty$.

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ *se denomina espacio normado si para todo* $x \in \mathbb{X}$ *existe un número real denominado norma, y que denotaremos por* $\|x\|$*, que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ *se denomina espacio normado si para todo* $x \in \mathbb{X}$ *existe un número real denominado norma, y que denotaremos por* $\|x\|$*, que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos la func. $\rho(x, y) = \|x - y\|$, esta satisface los axiomas de la definición de espacio métrico, i.e., todo espacio normado es un espacio métrico. La ρ anterior se denomina *métrica inducida por la norma*.

Espacios normados y de Banach

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ se denomina espacio normado si para todo $x \in \mathbb{X}$ existe un número real denominado norma, y que denotaremos por $\|x\|$, que cumple con las condiciones

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos la func. $\rho(x, y) = \|x - y\|$, esta satisface los axiomas de la definición de espacio métrico, i.e., todo espacio normado es un espacio métrico. La ρ anterior se denomina *métrica inducida por la norma*.

Definición

Un espacio normado completo (en la métrica inducida por la norma) se denomina espacio de Banach.

Ejemplo

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), con la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$, es un espacio de Banach.

Ejemplos

Ejemplo

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), con la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, es un espacio de Banach.

Ejercicio

¿Qué ocurre con $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) si usamos las normas $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$? ¿Y con la norma $\|x\| = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k|$?

Ejemplos

Ejemplo

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), con la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, es un espacio de Banach.

Ejercicio

¿Qué ocurre con $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) si usamos las normas $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$? ¿Y con la norma $\|x\| = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$?

Ejemplo

Sea $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$ y definamos la norma $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$. Este espacio es un espacio normado pero no de Banach (¿por qué?).

Ejemplos

Ejemplo

Sea $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$. *Definamos la norma* $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$. *Este espacio es un espacio de Banach.*

Ejemplos

Ejemplo

Sea $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$. *Definamos la norma* $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. *Este espacio es un espacio de Banach.*

Ejemplo

Sea ahora $\mathbb{X}$ *el espacio de todas las sucesiones* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *reales t.q.* $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$ *con la norma* $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$. *Dicho espacio lo denotaremos por* l_p *y es un espacio de Banach.*

Ejemplo

Sea $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$. *Definamos la norma* $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$. *Este espacio es un espacio de Banach.*

Ejemplo

Sea ahora $\mathbb{X}$ *el espacio de todas las sucesiones* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *reales t.q.* $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$ *con la norma* $\|x\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$. *Dicho espacio lo denotaremos por* l_p *y es un espacio de Banach.*

Ejercicio

Decide si el espacio $\mathbb{X}$ *de todas las sucesiones reales* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *acotadas con la métrica* $\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$, *es un espacio de Banach.*

¿Todo espacio métrico es normado?

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ con la métrica

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

Esta métrica no puede ser inducida por ninguna norma ya que de ella nunca podremos obtener la propiedad $x \forall \in \mathbb{X}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, de la norma.

¿Todo espacio métrico es normado?

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ con la métrica

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

Esta métrica no puede ser inducida por ninguna norma ya que de ella nunca podremos obtener la propiedad $x\forall \in \mathbb{X}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, de la norma.

Lema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones

1. $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$.

Espacios normados vs Espacios métricos

En los espacios normados podemos definir la conv. de sucesiones, suc. de Cauchy, etc. Basta considerarlos como espacios métricos con la métrica ρ inducida por la norma: $\rho(x, y) = \|x - y\|$.
Algunas definiciones son algo más sutiles:

Espacios normados vs Espacios métricos

En los espacios normados podemos definir la conv. de sucesiones, suc. de Cauchy, etc. Basta considerarlos como espacios métricos con la métrica ρ inducida por la norma: $\rho(x, y) = \|x - y\|$.
Algunas definiciones son algo más sutiles:

Definición

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y sea M un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$. Si M es un espacio normado con la norma de $\mathbb{X}$ restringida a M se dice que M es un subespacio de $\mathbb{X}$. Si M es cerrado en $\mathbb{X}$ entonces se dice que es un subespacio cerrado.

Espacios normados vs Espacios métricos

En los espacios normados podemos definir la conv. de sucesiones, suc. de Cauchy, etc. Basta considerarlos como espacios métricos con la métrica ρ inducida por la norma: $\rho(x, y) = \|x - y\|$.
Algunas definiciones son algo más sutiles:

Definición

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y sea M un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$. Si M es un espacio normado con la norma de $\mathbb{X}$ restringida a M se dice que M es un subespacio de $\mathbb{X}$. Si M es cerrado en $\mathbb{X}$ entonces se dice que es un subespacio cerrado.

Definición (En los espacios normados podemos definir las series:)

Sea una suc. $(x_n)_n$ de un espacio normado $\mathbb{X}$ definiremos la sucesión $(s_n)_n$ de sumas parciales por $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$. Si $s_n \to s \in \mathbb{X}$ (en norma), diremos que la serie es converge en $\mathbb{X}$ y s es su suma. La serie converge absolutamente si $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\| < +\infty$.

Teorema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach (normado y completo). Entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.

Series en espacios normados

Teorema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach (normado y completo). Entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.

El teorema anterior no es cierto si $\mathbb{X}$ no es completo.

Ejercicio

Prueba que si $\mathbb{X}$ es un espacio normado, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente si y sólo si $\mathbb{X}$ es completo.

Teorema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach (normado y completo). Entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.

El teorema anterior no es cierto si $\mathbb{X}$ no es completo.

Ejercicio

Prueba que si $\mathbb{X}$ es un espacio normado, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente si y sólo si $\mathbb{X}$ es completo.

Teorema (¡Todo espacio normado se puede completar!)

Sea $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espacio normado. Entonces existe un espacio de Banach $\widehat{\mathbb{X}}$ y una isometría A de $\mathbb{X}$ en $W \subset \widehat{\mathbb{X}}$, tal que W es denso en $\widehat{\mathbb{X}}$. Además, $\widehat{\mathbb{X}}$ es único excepto isometrías.

Base de Schauder

Definición

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y sea M un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$. Si M es un espacio normado con la norma de $\mathbb{X}$ restringida a M se dice que M es un subespacio de $\mathbb{X}$. Si M es cerrado en $\mathbb{X}$ entonces se dice que es un subespacio cerrado.

Definición

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Sea $(e_n)_n$ una sucesión de elementos de $\mathbb{X}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{X}$, existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_n$ tales que $\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dicha sucesión se denomina base de Schauder.

Ejemplo

Sea $\mathbb{X}$ el espacio l^p de las sucesiones y sea $(e_n)_n$ la sucesión $e_k = \delta_{i,k}$, i.e., la sucesión de vectores de l^p con 1 en la posición k y 0 en el resto. Probemos que dicha sucesión es una base de Schauder. En efecto, para todo $x \in l^p$ tenemos $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$. Sea $s_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. Como $x \in l^p$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\| = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ejemplo

Sea $\mathbb{X}$ el espacio l^p de las sucesiones y sea $(e_n)_n$ la sucesión $e_k = \delta_{i,k}$, i.e., la sucesión de vectores de l^p con 1 en la posición k y 0 en el resto. Probemos que dicha sucesión es una base de Schauder. En efecto, para todo $x \in l^p$ tenemos $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$. Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Como $x \in l^p$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\| = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ejercicio

Prueba que si un espacio normado $\mathbb{X}$ tiene una base de Schauder, entonces es separable.

Lema (Lema técnico)

Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ linealmente independientes de un espacio normado $\mathbb{X}$. Entonces, existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|).$$

Demostración: Sea $s = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Si $s = 0$ el lema es trivial así que asumiremos $s > 0$. Dividiendo por s 2 se sigue que 2 es equivalente a probar que si $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes, entonces existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los los escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$, con $\sum_{k=1}^n |\beta_k| = 1$

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geq c.$$

La prueba será por reducción al absurdo.

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el T de B-W de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_1^{(m_j)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$.

Escojamos de cada una de las sucesiones restantes $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 2, \ldots, n$, las subsucesiones definidas por los índices m_j.

Entonces $(\beta_2^{(m_j)})_j$ es acotada y por B-W y podemos extraer una subsucesión convergente $\beta_2^{(j_l)} \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_2$. Además, si escogemos los índices j_l definidos, la subsucesión $(\beta_1^{(j_l)})_j \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$ (¿por qué?).

Prueba del Lema técnico

Continuando este proceso n veces $\Rrightarrow$ $\exists$ una subsucesión de índices l_i t.q. $\beta_k^{(l_i)} \xrightarrow{i\to\infty} \beta_k$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \beta_k^{(l_i)} \xrightarrow{i\to\infty} \beta_k \quad \Rrightarrow \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y, \ \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1.$$

De lo anterior se sigue que no todos los $\beta_k = 0$ al mismo tiempo. Como los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son li $\Rrightarrow y \neq 0$ (¿por qué?). La norma es una aplicación continua $\Rrightarrow$

$$\lim_{i\to\infty} y_{l_i} = y \quad \Rrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = \|y\|,$$

pero como $\|y_m\| \xrightarrow{m\to\infty} 0$, entonces $\lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = 0$, luego $\|y\| = 0$ de donde se sigue que $y = 0$ lo cual es una contradicción.