MÉTODOS MATEMÁTICOS: ANÁLISIS FUNCIONAL

Licenciatura de Estadística.

Curso 2012/2013

Prof. Renato Álvarez Nodarse

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas

(despacho: Módulo 15, 1er piso, 15-07)

E-mail: `ran@us.es` WWW: `http://euler.us.es/~renato/`

- Introducción al análisis funcional.

Estas notas corresponden al curso homónimo impartido en la Facultad de Matemáticas durante los cursos 2006/2007 – 2011/2012 y constituyen una breve introducción al análisis funcional.

Renato Álvarez-Nodarse
Sevilla 17 de septiembre de 2012

Índice

1. El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.

1.1. Motivación

Como ya hemos visto, la ecuación $x^2 - 2 = 0$, no tiene soluciones racionales por ello fue necesario introducir los números reales. Por tanto la siguiente pregunta es, ¿si $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales (¿por qué?), entonces dicha ecuación es irresoluble?

Cardano en 1545 se planteó el siguiente problema: dado un segmento $\overline{AB}$ de longitud 10 unidades, dividirlo en dos partes de forma que el rectángulo que se forma tenga un area de 40 unidades cuadradas. Para resolverlo, Cardano operó formalmente: Sea x la longitud de una división y $10 - x$ el de la otra. Entonces,

$$A = x(10 - x) = 40 \quad \Longrightarrow x^2 - 10x + 40 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Además, formalmente verificó la solución:

$$A = (5 - \sqrt{-15})(5 + \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40. \quad !!!!$$

Es decir que la solución venía dada por una raíz de un número negativo. Tales soluciones se les denominaron *imposibles* o *imaginarias*. Fué Euler el primero en introducir la notación $\sqrt{-1} = i$, de donde las soluciones al problema de Cardano se escribe como $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{15}i$, siendo $i^2 = -1$.

1.2. Definición y propiedades de los números complejos.

Definición 1.1 *Un número complejo z es un par ordenado de números reales x, y, es decir $z = (x, y)$, donde x se denomina parte real de z e y se denomina parte imaginaria y se denotan por $x = \Re z$, $y = \Im z$. El conjunto de todos los números complejos lo denotaremos por $\mathbb{C}$. Para los números complejos cualesquiera $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, se define la operación suma "$+$" y multiplicación "$\cdot$" de la siguiente forma:*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad z_1 \cdot z_2 = (x_1\,x_2 - y_1\,y_2, x_1\,y_2 + y_1\,x_2).$$

Es fácil comprobar que si z_1 y z_2 son números tales que $\Im z_1 = \Im z_2 = 0$, las operaciones anteriores coinciden con las de los números reales, de forma que los números reales se pueden ver como un "*subconjunto*" de los complejos, concretamente son los números complejos de la forma $z = (x, 0)$.

Utilizando el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ descubrimos que es posible resolver ecuaciones algebraicas que no eran resolubles para los reales, por ejemplo

$$x^2 + 1 = 0, \quad \longrightarrow \quad x^2 = -1 \longrightarrow x = i = (0, 1).$$

La expresión más común para representar un número complejo es la *forma binómica*:

$$z = (x, y) = x + i\,y, \qquad \text{donde } x = \Re z,\ y = \Im z.$$

Definición 1.2 *Un conjunto de elementos es un cuerpo si se cumple que cualesquiera sean $a, b \in A$ el elemento suma "$+$" $a + b$ y el elemento multiplicación "$\cdot$" $a \cdot b$ son elementos de A. Además las operaciones "$+$" y "$\cdot$" satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Propiedades de la suma:*

a) $(a+b)+c = a+(b+c)$ *(ley asociativa)*

b) *Existe un elemento* $0 \in A$ *tal que para todo* $a \in A$, $a+0 = 0+a = a$ *(elemento nulo de la suma)*

c) *Para todo* $a \in A$, *existe un elemento* $(-a) \in A$ *tal que* $(-a)+a = a+(-a) = 0$ *(elemento inverso de la suma)*

d) $a+b = b+a$ *(ley conmutativa)*

2. *Propiedades de la multiplicación:*

a) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *(ley asociativa)*

b) *Existe un elemento* $1 \in A$ *tal que para todo* $a \in A$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *(elemento nulo de la multiplicación)*

c) *Para todo* $a \in A$, $a \neq 0$, *existe un elemento* $(a^{-1}) \in A$ *tal que* $(a^{-1}) \cdot a = a \cdot (a^{-1}) = 1$ *(elemento inverso de la multiplicación)*

d) $a \cdot b = b \cdot a$ *(ley conmutativa)*

3. *Propiedades de la suma y multiplicación:*

a) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ *(ley distributiva)*

Si un conjunto de elementos satisface los axiomas anteriores se le denomina cuerpo.

De la definición anterior deducimos que tanto los números reales $\mathbb{R}$ como los complejos $\mathbb{C}$ son un cuerpo.

Como consecuencia de los axiomas anteriores podemos probar fácilmente que para todo $x \in A$, $0 \cdot x = 0$, $(-1) \cdot x = (-x)$, que el elemento nulo 0 es único que el elemento inverso de la suma es único, entre otras muchas.

Las siguientes propiedades son también fácilmente verificables

1. Dados $a, b \in A$, la ecuación $a + x = b$ tiene solución única, es decir sólo hay un valor de $x \in A$ que cumpla con la ecuación.

2. Existe un único elemento neutro 1 respecto a la multiplicación.

3. Para todo $x \in A$, $x \neq 0$ existe un único inverso x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

4. Dados $a, b \in A$, $a \neq 0$, la ecuación $a \cdot x = b$ tiene solución única, es decir sólo hay un valor de $x \in A$ que cumpla con la ecuación.

5. Si $x \cdot y = 0$, entonces ò $x = 0$ ò $y = 0$.

6. Para todo $x \in A$, $(-1) \cdot (-x) = x$.

7. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Antes de pasar al segundo punto de este apartado debemos destacar que aunque los números complejos satisfacen los axiomas de cuerpo, no no satisfacen los de orden.

En efecto, probemos que para los complejos es imposible que se cumplan los axiomas (propiedades) de la definición de conjunto ordenado.

Definición 1.3 *Un conjunto de elementos A es un conjunto ordenado si existe una relación de orden $\leq$ tal que cuales quiera sean a y b elementos de A se cumple que $a \leq b$ o no se cumple y además tienen lugar los siguientes axiomas:*

1. *Para todo $a \in A$, $a \leq a$*
2. *Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.*
3. *Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.*
4. *Para todos $a, b \in A$, o $a \leq b$ o $b \leq a$.*

Si además, A es un cuerpo, entonces para cuales quiera sean a, b y c de A se tiene que

5. *Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.*
6. *Si $0 \leq a$ y $0 \leq b$ entonces $0 \leq a \cdot b$.*

Supongamos por ejemplo que $i \neq 0$. Entonces o $i < 0$ o $i > 0$. Si $i > 0$, entonces por el axioma 6. $i \cdot i > 0$, luego $-1 > 0$, o equivalentemente, $0 > 1$ (lo cual pudiera ser cierto en $\mathbb{C}$ pues no hemos decidido todavía que criterio vamos a utilizar para ordenarlos). Ahora bien, si $-1 > 0$, entonces $-1 \cdot (-1) > 0$, de donde $1 > 0$, lo cual es imposible por el axioma 4. de la definición de orden. Es decir es imposible que $i > 0$. Un razonamiento análogo demuestra que i no puede ser menor que cero (probar esto último como ejercicio). Luego no hay forma alguna que nos permita ordenar los complejos según la definición de conjunto ordenado.

1.2.1. Operaciones elementales.

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dos números complejos cualesquiera, entonces

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \qquad z_1 \cdot z_2 = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + i(x_1\, y_2 + y_1\, x_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1\, x_2 - x_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Se llama complejo conjugado de un número $z = x + iy$ al número $\overline{z} = x - iy$. Para $\overline{z}$ se cumple que:

$$\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0).$$

Ejercicio 1.4 *Prueba las propiedades anteriores de la operación complejo conjugado.*

Además

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \Re\, z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2},$$

de donde deducimos que $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $z = \overline{z}$.

1.2.2. Forma trigonométrica y exponencial de un número complejo.

Sea $z \in \mathbb{C}$. Se define el módulo de z al número $\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ y al argumento de z al ángulo θ tal que $x = |z|\cos\theta$, $y = |z|\operatorname{sen}\theta$. Entonces,

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

El módulo $\rho = |z|$ y el argumento de z cumplen con las siguientes propiedades.

1. $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.
2. $|z| = 0, \Longleftrightarrow z = 0$.
3. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}, \forall z \in \mathbb{C}$.
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
6. Si $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$, entonces

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1 \cdot z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)], \qquad \frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)]$$

Ejercicio 1.5 *Prueba las propiedades anteriores del módulo y el argumento de los números complejos.*

Dado $\phi \in \mathbb{R}$, se define la exponencial compleja de ϕ, $e^{i\phi}$ como

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\operatorname{sen}\phi. \tag{1.1}$$

Por tanto, cualquier número complejo se puede escribir de la forma:

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = |z|e^{i\theta}.$$

La ecuación (1.1) se conoce como *fórmula de Euler.*

Definiremos la función e^z mediante la expresión

$$e^z = e^{\Re z}[\cos(\Im z) + i\operatorname{sen}(\Im z)].$$

La función exponencial tiene las siguientes propiedades (la prueba se deja como ejercicio):

1. $e^0 = 1$.
2. $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
4. $|e^z| = e^{\Re z}, \forall z \in \mathbb{C}$.
5. $e^z = 1, \Longleftrightarrow z = 2k\pi i, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.
6. $e^{z_1} = e^{z_2}, \Longleftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

1.2.3. Potencias enteras y raíces enteras de un número complejo.

Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n \text{ veces}} = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta} = |z|^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

La fórmula anterior se conoce como *fórmula de Moivre*.

Tomemos ahora un número complejo $z \neq 0$. Entonces la ecuación $w^n = z$ tiene n soluciones $w_k = \sqrt[n]{z}$, $k = 0, 1, ..., n-1$ y dichas soluciones, que son las raíces $n-$ésimas complejas de un número complejo, están dadas por la fórmula:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Por último definiremos el logaritmo de un número complejo z:

$$z = |z|e^{i\theta}, \qquad \log z \equiv \log|z| + i\theta + 2k\pi i.$$

Usando lo anterior se pueden definir las potencias de números complejos:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

1.3. Sucesiones numéricas en $\mathbb{C}$

Definición 1.6 *La aplicación o función $f : \mathbb{N} \mapsto A$ que hace corresponder a cada número natural n un elemento a_n de cierto conjunto A se denomina sucesión de elementos de A y la denotaremos por $(a_n)_{n=1}^\infty$, o $(a_n)_n$.*

Por ejemplo, si $A = \mathbb{C}$, diremos que $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$ define una sucesión de números complejos.

Como ejemplo tenemos

$$x_n = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}, \quad z_n = e^{in} = \{e^i, e^{2i}, e^{3i}, \dots\}, \quad \dots$$

Definición 1.7 *Se dice que una sucesión $(z_n)_n$ está acotada, si $\forall n \in \mathbb{N}$, existe un $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$.*

Por ejemplo, las sucesiones (x_n) y $(z_n)_n$ definidas antes son claramente acotadas (basta escoger $M = 1$).

Definición 1.8 *Se dice que una sucesión $(z_n)_n$ es no acotada si $\forall M \in \mathbb{R}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| > M$.*

Por ejemplo, la sucesión $b_n = (-1)^n n^2$ no está acotada.

1.4. Convergencia en $\mathbb{C}$

Definiremos la distancia $d(z_1, z_2)$ entre dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ como

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{1.2}$$

Definiremos el ϵ-entorno o ϵ-vecindad de un número complejo z_0 a la "bola" $U_\epsilon(z_0)$ definida por

$$U_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < \epsilon\}.$$

Obviamente $U_\epsilon(z_0)$ es un círculo del plano complejo de centro z_0 y radio ϵ excluyendo la frontera (o sea, la correspondiente circunferencia).

Sea $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Puesto que

$$\text{máx}\{|x - x_0|, |y - y_0|\} \le |z - z_0| \le |x - x_0| + |y - y_0|, \qquad |z + z_0| \le |z| + |z_0|,$$

podemos construir la teoría de límites en $\mathbb{C}$ de la misma forma que se hace en $\mathbb{R}$. Así pues, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.9 *Diremos una sucesión de números complejos $(z_n)_n$ tiene límite z, y lo denotaremos por $\text{lím}_{n\to\infty} z_n = z$, si*

$$\forall \epsilon > 0^1,\ \epsilon \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n > N, \quad |z_n - z| < \epsilon.$$

El significado geométrico del límite es claro: dentro de ϵ-entorno $U_\epsilon(z)$ del límite z de la sucesión $(z_n)_n$ hay infinitos términos de la sucesión (de hecho todos a partir de cierto N) y fuera de él sólo hay un número finito de términos (a lo sumo los N primeros términos) de la misma.

Si escribimos $z_n = x_n + iy_n$ y $z = x + iy$, entonces, de las desigualdades

$$\text{máx}\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \le |z_n - z| \le |x_n - x| + |y_n - y|,$$

se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

En particular, $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si y sólo si $|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

De lo anterior se deduce que toda sucesión de números complejos es equivalente a dos sucesiones de números reales (la de sus partes reales e imaginarias). Así pues, por analogía con el caso real podemos definir las sucesiones de Cauchy, enunciar y probar el criterio de Cauchy y muchas otras propiedades de las las sucesiones. No obstante al ser $\mathbb{C}$ un cuerpo **no** ordenado, se pierden todas las propiedades relacionadas con el orden (supremo, monotonía, etc). Gracias a la teoría de límites de sucesiones podemos definir el límite de funciones, continuidad de funciones, derivabilidad de funciones, etc.

Ejercicio 1.10 *Prueba que para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la sucesión $z_n = (1 + z/n)^n$ es tal que $\text{lím}_{n\to\infty} z_n = e^z$.*

Definición 1.11 *Una sucesión $(z_n)_n$ es de Cauchy (o fundamental) si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m > N$, se cumple $|z_n - z_m| < \epsilon$. O, equivalentemente,*

$$z_n \text{ es de Cauchy} \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \text{tal que } \forall n > N,\ \text{y } \forall p \in \mathbb{N}, \quad |z_{n+p} - z_n| < \epsilon.$$

[1] En adelante al escribir $a > 0$ asumiremos que a es un número real, ya que los complejos no se pueden ordenar.

Teorema 1.12 (Criterio de Cauchy) *Para que una sucesión de números complejos $(z_n)_n$ sea de convergente es necesario y suficiente que sea de Cauchy.*

La prueba se basa nuevamente en la equivalencia entre $z_n = x_n + iy_n$ y las sucesiones reales $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$.

Además, está claro que si $(z_n)_n$ tiene límite, entonces $(z_n)_n$ es acotada, pero no al contrario.

Teorema 1.13 (Propiedades algebraicas de los límites) *Sean dos sucesiones convergentes $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Entonces:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$. *En particular,* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, a$.
3. *Si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$, *y* $b \neq 0$, *entonces,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Definición 1.14 *Un punto z de un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ es interior si existe un entorno $U_\epsilon(z)$ del mismo contenido por completo en E. Un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores.*

Evidentemente todo entorno $U_\epsilon(z)$ de z es un abierto.

Definición 1.15 *Dado un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ diremos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto de acumulación de E si el cualquier entorno $U_\epsilon(z_0)$ existe al menos un punto de E distinto de z_0 (y por tanto infinitos).*

Por ejemplo, 0 es un punto de acumulación del conjunto $E = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$, mientras que 10^{-k}, cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$ no lo es.

Teorema 1.16 *z_0 es un punto de acumulación de E si y sólo si existe al menos una subsucesión de números $(z_n)_n$, con $z_n \neq z_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.*

Definición 1.17 *Un conjunto E es cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Por ejemplo en conjunto $\overline{U}_\epsilon(z_0) =: \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| \leq \epsilon\}$ es un cerrado.

Definición 1.18 *Un conjunto E es acotado si existe un $M > 0$ tal que, para todo $z \in E$, $|z| < M$.*

A partir de Lema del Bolzano-Weierstrass para los conjuntos acotados de $\mathbb{R}$ se sigue el siguiente resultado:

Lema 1.19 (Bolzano-Weierstrass) *Cualquier subconjunto infinito[2] acotado de $\mathbb{C}$ tiene por lo menos un punto de acumulación.*

Definamos en $\mathbb{C}$ una curva γ mediante las ecuación paramétrica $z(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Si $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas en el parámetro t, se dice que la curva γ es continua.

Definición 1.20 *Un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ se llama conexo si cualesquiera sean dos elementos z_1 y z_2 de E, éstos se pueden unir mediante al menos una curva continua γ perteneciente por completo a E ($\gamma \in E$).*

Definición 1.21 *Un conjunto $\Omega \in \mathbb{C}$ abierto y conexo se denomina recinto o región.*

Definición 1.22 *Un conjunto cerrado y acotado se denomina compacto. Si además es conexo se le denomina conjunto continuo.*

---

[2]Con un número infinito de elementos.

1.5. El ∞ complejo

Sea x_n una sucesión real. Se dice que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ si para todo $M > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para todos $n > N$, $x_n > M$. De manera análoga se define $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Además está claro que al ser $\mathbb{R}$ un cuerpo ordenado sólo existen dos "*infinitos*": uno por la izquierda $-\infty$ y otro por la derecha $+\infty$.

En el caso complejo la situación es algo más complicada. Sea una sucesión $(z_n)_n$ tal que, para todo $M > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para todos $n > N$, $|z_n| > M$. Evidentemente dicha sucesión no puede ser convergente (no es acotada). Por analogía con el caso real diremos que la sucesión anterior converge a *infinito*.

Ejercicio 1.23 *Encuentra los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales la sucesión $z_n = a^n$ tiene límite finito, infinito, o no tiene límite.*

Para que este ∞ tenga sentido hay que además imponerle ciertas reglas (de fácil interpretación mediante sucesiones):

1. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z + \infty = \infty$,
2. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $z \cdot \infty = \infty$,
3. $\infty + \infty = \infty$,
4. $\infty \cdot \infty = \infty$,
5. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z/\infty = 0$.

Este infinito complejo es, por su naturaleza, muy distinto al $\pm\infty$ real y requiere una explicación más detallada. La forma más sencilla de entenderlo se basa en una construcción conocida como la esfera de Riemann y la proyección estereográfica que describiremos brevemente a continuación.

Hagamos la siguiente construcción (ver figura 1). En el origen 0 de coordenadas del plano complejo $\mathbb{C}$ construyamos una esfera S de radio $1/2$ tangente a 0. A continuación trazamos una recta que une el punto $z \in \mathbb{C}$ con el punto N de la esfera (comúnmente denominado polo norte). Obviamente cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$ dicha recta corta en un y un único punto $z' = (\xi, \eta, \zeta)$ a la esfera S. Sea el eje coordenado (x, y) de $\mathbb{C}$ y el correspondiente eje de $\mathbb{R}^3$ (ξ, η, ζ). Entonces la ecuación de la esfera es

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1/2)^2 = 1/4,$$

mientras que la de la recta que pasa por $N = (0, 0, 1)$ y $z = (x, y, 0)$ es

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 0}{0 - 1},$$

luego

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}, \quad |z|^2 = \frac{\zeta}{1 - \zeta},$$

y su transformación inversa es

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}.$$

De ambas expresiones se deduce, en particular, que si $z' \to N$, entonces su imagen z en $\mathbb{C}$ tiende a infinito, por lo que N corresponde al ∞ complejo antes mencionado.

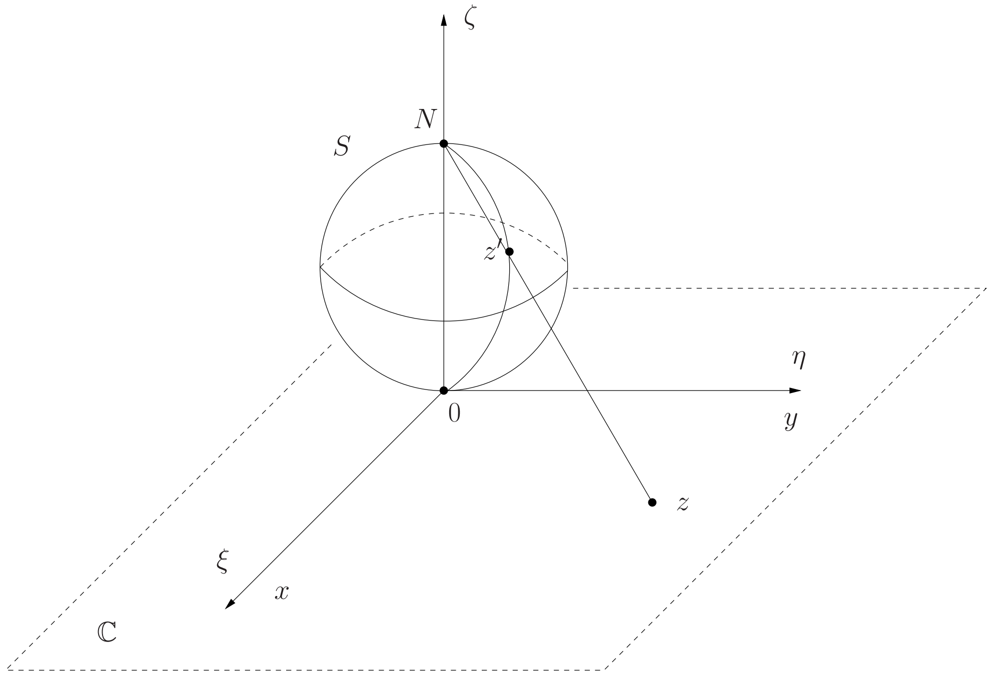

Figura 1: La esfera de Riemann.

Una propiedad fácilmente verificable (ver ejercicio 1.24) de la proyección estereográfica es que ésta transforma las circunferencias que no pasen por N en S en circunferencias en $\mathbb{C}$ y las que contengan a N en rectas de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 1.24 *Sea la circunferencia en S definida por*

$$\begin{cases} A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta) \end{cases} .$$

Prueba que su imagen en $\mathbb{C}$ es:

$$(D+C)(x^2+y^2) + Ax + By = -D.$$

1.6. Problemas.

Problema 1.1 *Calcúlese:*

a) $[(5+5i)/(3-4i)] + [20/(4+3i)]$	
b) $(3i^{30} - i^{19})/(2i-1)$	*c*) $[(1-i)/(1+i)]^5$
d) $i^{1/5}$	*e*) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4}$

Problema 1.2 *Demuéstrese:*

1. *La suma de las raíces n-ésimas de la unidad es cero.*
2. *El producto de las raíces n-ésimas de la unidad es ± 1 según la paridad de n.*

Problema 1.3 *Encuéntrense los valores de n que verifican la identidad $(1+i)^n = (1-i)^n$*

Problema 1.4 *Utilizando la fórmula de* de Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, *demuéstrese que*

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta.$$

2. Series de números complejos

2.1. Series numéricas

Definición 2.1 *Dada una sucesión de números complejos $(a_n)_n$, la expresión*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$$

se denomina serie infinita o serie y a los números a_1, a_2, ..., elementos de la serie. Las sumas

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

se denominan sumas parciales de la serie.

Definición 2.2 *Diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a S, si la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$ tiene límite finito S y a dicho número le denominaremos "suma" de la serie. Si por el contrario, la sucesión de sumas parciales no tiene límite, entonces diremos que la serie diverge.*

Ejercicio 2.3 Calcular, si es posible, las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Describiremos aquí solo el tercer ejemplo. Una ojeada rápida al término S_n basta para comprobar que éste es el $n-$ésimo polinomio de Taylor de la función $f(x) = e^x$ en $x = 0$, es decir

$$S_n = P_n(x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Probemos que S_n tiende a e^x para todo $x \in \mathbb{R}$. Usando la fórmula de Lagrange para el resto tenemos que

$$R_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \xi \in (0, x).$$

Pero si $n \to \infty$, entonces $R_n(x)$ tiende a 0, luego $\lim_{n\to\infty} S_n = e^x$. Esta serie es un ejemplo de las series de potencias que estudiaremos más adelante.

El Criterio de Cauchy para las sucesiones establece que una sucesión $(x_n)_n$ es convergente si y sólo si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},$ tal que si $n > N,$ y $\forall p \in \mathbb{N}$ entonces $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$. Una simple aplicación del mismo a la sucesión de sumas parciales nos conduce a nuestro primer criterio de convergencia para las series.

Teorema 2.4 (Criterio de Cauchy para las series) *La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente si y sólo si , para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para todos $n > N$ y para todo $p \in \mathbb{N}$, $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$*

Este teorema tiene dos consecuencias inmediatas: la primera es que si alteramos un número finito de elementos de la serie, la convergencia de ésta no se afecta; y la segunda es el siguiente resultado:

Teorema 2.5 (Condición necesaria para la convergencia de las series) *Si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejercicio 2.6 Prueba que las las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{300n+n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, son divergentes.

Este último ejemplo ilustra que las condiciones del teorema 2.5 son necesarias pero no suficientes.

Una propiedad de las series convergentes es que si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k + \beta b_k$ también es convergente, además

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k + \beta b_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Nótese, además, que del carácter convergente de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ no se puede inferir el carácter convergente o divergente de las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (¿por qué?).

Definición 2.7 *Diremos que una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es absolutamente convergente si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *es convergente.*

La sucesión $(S_n)_n$ de sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ es una sucesión monótona, luego si está acotada, entonces existirá el límite que es precisamente la suma de la serie. Por el contrario, si la sucesión $S_n \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ es no acotada, entonces será divergente. Luego se cumple el siguiente

Teorema 2.8 *(Weierstrass) Una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es absolutamente convergente si y sólo si la sucesión* $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ *está acotada.*

A partir del criterio de Cauchy 2.4 se sigue el siguiente teorema:

Teorema 2.9 *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Un ejemplo muy sencillo de serie absolutamente convergente es la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Veamos a continuación algunos criterios para estudiar la convergencia de series. El primero, y uno de los más sencillos, es el criterio de comparación. Su demostración es una simple consecuencia del teorema de las sucesiones monótonas y acotadas.

Teorema 2.10 (Criterio de Comparación de Weierstrass) *Sean* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *dos series de números complejos. Si existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$, $|a_n| \leq |b_n|$, *entonces si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ *converge, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| <$ *converge, y si* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *diverge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ *diverge.*

Ejercicio 2.11 Prueba, calculando el límite de sus sumas parciales, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Usando lo anterior y el criterio de comparación deduce la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Teorema 2.12 (Criterio de comparación por paso al límite) *Sean las sucesiones* $(a_n)_n$ *y* $(b_n)_n$ *tales que* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = q > 0$. *Entonces,* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *converge si y sólo si* $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ *converge.*

Ejercicio 2.13 Estudiar las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Nota: De la prueba del Criterio de comparación por paso al límite se deduce que si $q = 0$, sólo podemos afirmar lo mismo que en el teorema de comparación es decir, que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ converge, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| <$ converge, y si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ diverge.

Veamos ahora dos criterios donde se involucra una única serie, es decir sólo precisamos la información relacionada con la serie que queremos estudiar.

Teorema 2.14 (Criterio del cociente de D'Alembert) *Sea* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie de números complejos tal que* $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = q$*. Entonces,*

1. *Si* $q < 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es absolutamente convergente*
2. *Si* $q > 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *es divergente.*
3. *Si* $q = 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *puede ser convergente o divergente.*

Este criterio no siempre funciona aún en casos sencillos como el siguiente: sea la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$. Obviamente tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 1/6 & n \text{ par} \\ 3/2 & n \text{ impar} \end{cases},$$

luego no existe el límite del cociente. No obstante,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} + \frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k,$$

y estas dos últimas obviamente son convergentes.

Teorema 2.15 (Criterio de la raíz de Cauchy) *Sea* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie de números complejos tal que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$*. Entonces,*

1. *Si* $q < 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente*
2. *Si* $q > 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es divergente.*
3. *Si* $q = 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *puede ser convergente o divergente.*

Si aplicamos este criterio a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^k}$ tenemos

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\frac{-1+2}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{(-1)^n+2}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{1+2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{3}}{2},$$

por tanto $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ y según el criterio de Cauchy 2.15 converge.

El ejemplo anterior nos indica que el criterio de Cauchy es más general que el de D'Alembert en el sentido que el criterio de criterio de D'Alembert implica en de Cauchy, pero no viceversa.

Ejercicio 2.16 Estudia el carácter de las series $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

2.1.1. Más sobre series de números reales

Vamos a discutir ahora algunas propiedades de las series de números reales. Comenzaremos considerando serie de gran importancia en las matemáticas –y fuera de ellas–: las series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Estas series se conocen como series armónicas. Ya vimos ejemplos de ellas cuando $p = 1$, serie que divergía, y $p = 2$, serie que convergía. Una pregunta evidente es ¿Para cuáles $p > 0$ converge la serie armónica?

Es evidente del teorema de comparación que para todo $p > 2$ la serie converge y que para $p < 1$ diverge. Ahora bien, para $1 < p < 2$ no nos sirve el teorema de comparación y un calculo sencillo nos muestra que tanto el criterio de Cauchy como el de D'Alembert nos dan 1 con lo cual no son concluyentes. ¿Cómo resolver este problema?

Teorema 2.17 (Criterio de McLaurin-Cauchy) *Sea $f(x)$ una función real no negativa definida en $[1, +\infty)$ y monótona decreciente en todo su dominio. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ y la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ tienen el mismo carácter de convergencia.*

Ejercicio 2.18 Estudiar el carácter de las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ y $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$ para $p > 0$ usando el criterio integral.

Reordenación de términos en una serie

Dada una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, construyamos una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ obtenida de la anterior mediante la reordenación de un número infinito de términos, es decir todos los términos de las sucesiones $(a_n)_n$ y $(a'_n)_n$ coinciden pero están, en general, situados en distintos sitios.

Teorema 2.19 *Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente, entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ también es absolutamente convergente y su suma coincide con la de la serie original.*

Este resultado sólo es cierto para las series absolutamente convergentes. Veamos el siguiente ejemplo.

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Esta serie es convergente (probar como ejercicio), pero no lo hace absolutamente. Además, como

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n}{1+\xi} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{con} \quad \xi \in (0, x),$$

tenemos, sustituyendo $x = 1$, que

$$\left| \log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \to 0, \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

es decir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \cdots = \log 2 \neq 0.$$

Reordenemos la serie

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \cdots$$

de la siguiente forma:

$$S' = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \cdots$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \cdots\right] = \frac{S}{2} = \frac{\log 2}{2},$$

es decir nuestra reordenación cambia el valor de la serie!

Definición 2.20 *Diremos que una serie es condicionalmente convergente si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge pero la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *diverge.*

Teorema 2.21 (Teorema de reordenación de Riemann) *Toda serie condicionalmente convergente se puede reordenar de tal forma que sume cualquier valor real prefijado de antemano.*

2.2. Series de potencias

Las definiciones y teoremas anteriores nos permiten definir y estudiar las series de potencias en $\mathbb{C}$.

Definición 2.22 *Dada una sucesión de números complejos* $(a_n)_n$ *y* $z_0 \in \mathbb{C}$ *definiremos serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

que denominaremos serie de potencias.

Como casos especiales de las series de potencias tenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k},$$

etc. Si la serie converge para todos los valores de z de cierto conjunto $A \subset \mathbb{C}$, entonces podemos definir la función suma $f(z)$ de la serie.

Propiedades de las series de potencias

Sin pérdida de generalidad vamos a considerar las series de potencias del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{2.2}$$

es decir, cuando $z_0 = 0$. Obviamente si tenemos una serie de potencias del tipo (2.1), la podemos reducir a la anterior (2.2) haciendo el cambio de variables $\zeta = z - z_0$ y viceversa.

Teorema 2.23 (Primer Teorema de Abel para las series de potencias) *Sea la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$. *Si la serie converge para cierto* $w \in \mathbb{C}$, *entonces la serie converge absolutamente para todo* $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z| < |w|$.

Corolario 2.24 *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge para algún número complejo w, entonces diverge para todo z con $|z| > |w|$.*

Por tanto, el teorema de Abel nos asegura la existencia de regiones (círculos) de convergencia y divergencia, de una serie de potencias en $\mathbb{C}$. De hecho podemos afirmar que dada una serie de potencias cualquiera siempre existe un número no negativo $R \geq 0$ ó $R = +\infty$ tal que para todo z con $|z| < R$ la serie converge y si $|z| > R$ la serie diverge.

Definición 2.25 *El número $R \geq 0$ anterior se denomina radio de convergencia de una serie de potencias.*

Nota 2.26 *De lo anterior se deduce que la región de convergencia de una serie de potencias es un círculo en el plano complejo que, en el caso de las series de la forma (2.2) está centrado en el origen y en el de las series (2.1), en z_0 (ver la figura 2). Nótese que se puede obtener una región de la otra simplemente mediante una traslación (mediante el vector z_0) en el plano complejo.*

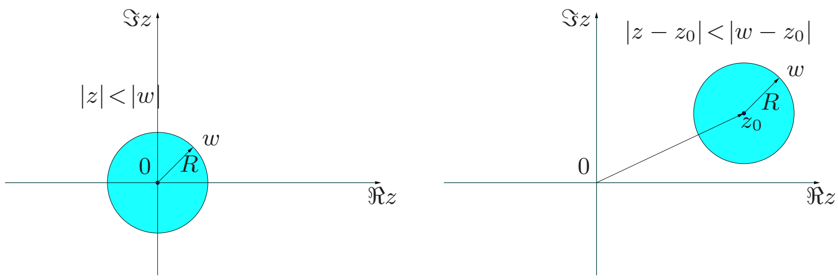

Figura 2: Región de convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (izquierda) y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (derecha).

Teorema 2.27 (Segundo Teorema de Abel para las series de potencias) *Toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$, tiene radio de convergencia $R \geq 0$ ó $R = +\infty$. Además, la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z| < R$.*

Del teorema anterior se sigue que la mayor región de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es el disco $U_R(0)$.

Ejercicio 2.28 *Estudiar la convergencia de las series* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *y* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Veamos ahora un criterio general para encontrar el radio de convergencia de una serie de potencias. Como corolario del criterio de Cauchy para las series tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.29 (Fórmula de Cauchy-Hadamard) *Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, su radio de convergencia R viene dado por la fórmula*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n}} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{2.3}$$

En particular, si existe el límite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, entonces $R = 1/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, y si existe el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, entonces (ver el criterio de D'Alembert) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Ejercicio 2.30 *Repetir el estudio para las series del ejemplo 2.28.*

Ejercicio 2.31 *Calcular el radio de convergencia para las series de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}.$$

Nótese que las series anteriores son tales que no todos los coeficientes a_n son distintos de cero. De hecho solo aparecen los pares o los impares.

Teorema 2.32 *Sea una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia $R > 0$. Entonces*

1. *Para todo $k \geq 1$ la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}, \tag{2.4}$$

tiene radio de convergencia R.

2. *La función $f(z)$ es infinitamente diferenciable en $U_R(0)$ y la k-ésima derivada de f, $f^{(k)}(z)$, viene dada por la serie (2.4).*

3. *Para todo $n \geq 0$, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.*

Como consecuencia del teorema anterior se sigue que si $f(z)$ admite una serie de potencias, $f(z)$ es infinitamente diferenciable en $U_R(0)$, y cada una de las funciones $f^{(k)}(z)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, es continua en $U_R(0)$. Del tercer apartado se tiene además que la serie de potencias de una función dada coincide con la correspondiente serie de Taylor.

Ejercicio 2.33 *Prueba que la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k/k!$ es infinitamente diferenciable y que $f'(z) = f(z)$, es decir, $f(z) = e^z$.*

Ejercicio 2.34 *Encuentra las series de potencias del* $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ *y calcula sus derivadas. ¿Dónde se anulan dichas funciones?*

Una de las principales diferencias entre las funciones complejas de variable compleja y las funciones reales de variable real está precisamente relacionada con la diferenciación y analiticidad. En el análisis real se dice que una función $f(x)$ es analítica en un entorno de un punto z_0 si en dicho entorno $f(x)$ se puede escribir como una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

con radio de convergencia $R > 0$. Una propiedad muy importante de las series de potencias (reales o complejas) es que son infinitamente diferenciables. ¿Será cierto el recíproco? ¿Toda función C_A^{∞} será analítica en algún entorno de $x_0 \in A$?

La respuesta a esta pregunta la dio Cauchy, en 1821. Definamos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Esta función es infinitas veces derivable en $x = 0$ (de hecho en todo $\mathbb{R}$) además $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego su serie de Taylor en $x = 0$ es 0 y por tanto $f(x)$ no admite una serie de potencias en cero (o lo que es lo mismo, el radio de convergencia de la correspondiente serie es 0), i.e., la función de Cauchy no es analítica en $x_0 = 0$.

Teorema 2.35 (Condición necesaria y suficiente de analiticidad de una función real) *Para que una función $f(x)$ infinitamente derivable en todo un entorno de $x = x_0$ sea analítica es necesario y suficiente que el resto de Taylor de la función $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - x_0)^k$, tienda a cero para todo x de dicho entorno.*

El caso complejo es mucho más *sencillo*. De hecho se tiene el siguiente sorprendente resultado

Teorema 2.36 (Goursat) *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región (abierto y conexo) y sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función diferenciable (holomorfa). Entonces, para cada punto $z_0 \in \Omega$, $f(z)$ admite una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con radio de convergencia $R > 0$.*

2.3. Problemas

Problema 2.1

Estudia el carácter de las siguientes series:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^4 + 1}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q (\log n)^p}$, $p \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2 + n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n^2 - 1} - n]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + 4/n^2)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(1/n)$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{a^n - b^n} x^n$, $a, b, x \geq 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n^x}\right)$, $x > 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

Problema 2.2

Suma, si es posible, las siguientes series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n-3}}{4^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right].$$

Problema 2.3

1. Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$, con $a > 0$, según los valores de a.
2. Demuestra que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} < \infty$, donde $b_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ para $n \geq 1$ y $b_0 \in \mathbb{Z}$. ¿Qué representa esta serie y cuál es su importancia?

Problema 2.4

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de términos $u_n > 0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Demuestra que las series $\displaystyle\sum_n u_n$ y $\displaystyle\sum_n \log(1 + u_n)$ comparten el mismo carácter convergente o divergente. Aplica este resultado para determinar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{2}{n^2 + n + 1}\right)$.

Problema 2.5

Determina el radio de convergencia de las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con a_n definido por:

a) $a_n = \log n$ b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, c) $a_n = \dfrac{[(-1)^n + 3]^n}{n}$, d) $a_n = \dfrac{n^2}{a^2}$,

e) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, f) $a_n = \dfrac{1}{n^n}$, g) $a_n = \dfrac{1}{n!}$, h) $a_n = (\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{4})^n$, i) $a_n = (1 + 1/2 + \cdots + 1/n)$,

j) $a_n = \dfrac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$ ($E(x)$ es la parte entera de x, k) $a_n = \left(\dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\right)^p \dfrac{1}{2^n}$.

Problema 2.6

Obtener las series de potencias de las siguientes funciones indicando la región de convergencia de las mismas:

a) $f(z) = \log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$, b) $f(z) = \arctan(z)$, c) $f(z) = \cos(\sqrt{z})$, d) $f(z) = \dfrac{(z-2)^n}{3^n}$,

e) $f(z) = \operatorname{sen}^2 z$, f) $f(z) = \cosh(z)$, g) $f(z) = \log(a + bz)$, $(a \neq 0)$ h) $f(z) = (1 + e^z)^3$.

Problema 2.7

Sumar las siguientes series indicando la región de validez de la misma:

a) $a_n = \dfrac{p(p-q)(p-2q)\cdots(p-nq+q)}{n!q^n}$, b) $a_n = \dfrac{n^2+3n+5}{n}$, c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$,

d) $a_n = \dfrac{3n^2-n+2}{a^2}$, e) $a_{3n-2} = \dfrac{1}{3n}$, $a_n = 0$ en el resto, f) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$,

Problema 2.8

Obtener por el método de los coeficientes indeterminados los cinco primeros términos de las series de potencias de la función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{1-2z}$.

Problema 2.9

Halla una función $y(z)$, desarrollable en serie de potencias, que verifique:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} y'(z) & = & 2y(x) + x^2 \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$, b) $z^2y'' + zy' + (x^2 - n^2)y = 0$ (Ecuación de Bessel),

c) $z(z-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' + \alpha\beta y = 0$ (Ecuación hipergeométrica de Gauss).

3. Sucesiones y series de funciones reales

Definición 3.1 *La sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ tiene límite para cierto $x_0 \in \operatorname{Dom}(f_n)$ si la sucesión numérica $(f_n(x_0))_n$ converge para dicho x_0. En este caso diremos que la sucesión converge puntualmente en x_0,*

Definición 3.2 *El conjunto $\mathbb{X}$ de todos los puntos $x \in \operatorname{Dom}(f_n)$ donde la sucesión $(f_n(x))_n$ converge se denomina conjunto de convergencia de la sucesión de funciones.*

Evidentemente para todo $x \in \mathbb{X}$, existe un único valor del límite de sucesión numérica $(f_n(x))_n$, por tanto podemos definir una función $f(x)$ sobre $\mathbb{X}$ que es la función límite de $f_n(x)$. Así tenemos la siguiente

Definición 3.3 *En el conjunto $\mathbb{X}$ de convergencia de la sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ la función $f(x)$ definida para cada $x \in \mathbb{X}$ de la forma $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ se denomina función límite de $(f_n(x))_n$ y se dice que la sucesión $(f_n(x))_n$ converge puntualmente a $f(x)$ en $\mathbb{X}$ y lo denotaremos como $f_n(x) \to f(x)$.*

Ejemplo 3.4 *Consideremos los siguientes ejemplos representativos.*

1. Definamos en $[0,\infty)$ la sucesión $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Es fácil comprobar que la sucesión de funciones converge si y sólo si $x \in [0,1]$, además
$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0 & 0 \le x < 1 \end{cases},$$
es la función límite. Nótese que si escogemos $\mathbb{X} = [0,q]$, $0 \le q < 1$, entonces $f(x) = 0$.

2. Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$. Es evidente que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.

3. Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$. Como en el ejemplo anterior $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.

4. Sea $f_n(x) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Evidentemente si $x = 0$ o $x = 1$, $f_n(x) = 0$. Si $x \in (0,1)$ entonces $(1-x^2) < 1$, luego $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $\mathbb{X} = [0,1]$ y $f(x) = 0$.

5. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sea $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$. Si $m!x \in \mathbb{Z}$, entonces $f_m(x) = 1$, si $m!z \notin \mathbb{Z}$, entonces $f_m(x) = 0$. Veamos el límite cuando $m \to \infty$ de $f_m(x)$. Si $x \notin \mathbb{Q}$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, $m!x \notin \mathbb{Z}$, por tanto $f_m(x) = 0$ y $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = 0$. Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces a partir de cierto $m \in \mathbb{N}$, $m!x \in \mathbb{Z}$, por tanto, a partir de dicho m, $f_m(x) = 1$, luego $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = 1$. Así, tenemos que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x)$ es la función de Dirichlet $D(x)$
$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}.$$

Nuestro objetivo fundamental es estudiar, no cuando las sucesiones funcionales convergen o no –pues eso ya lo hemos visto en temas anteriores pues para cada x la sucesión $(f_n(x))_n$ es una sucesión numérica– sino decidir en que condiciones las propiedades de f_n se traspasan a la función límite. ¿Hereda $f(x)$ todas las propiedades de las $f_n(x)$? Los ejemplos anteriores sirven de ilustración a nuestro problema.

En el ejemplo 1 las funciones x^n son continuas en $[0,1]$ pero la función límite $f(x)$ no lo es. No ocurre lo mismo en el intervalo $\mathbb{X} = [0,q]$.

En el ejemplo 2 la función $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, y su función límite también, pero por ejemplo, la sucesión de sus derivadas $f_n'(x) = n \cos n^2 x$ no tiene límite excepto cuando $n^2 x = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Es decir la sucesión de derivadas no converge a la derivada de la función límite.

En el ejemplo 3, a diferencia del anterior la sucesión de sus derivadas $f_n'(x) = \dfrac{\cos nx}{n}$ converge a cero que justamente es la derivada de la función límite. Es decir, en este ejemplo si que tenemos $f_n'(x) \to f'(x)$.

Analizando el ejemplo 4 vemos que la función $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$ es integrable en $[0,1]$ y además

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 2(n+1)\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = 2(n+1)\left[-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1\right] = 1,$$

pero $\displaystyle\int f(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$, luego $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \not\to \int f(x)dx$.

A diferencia del caso anterior, podemos comprobar que en $[0,1]$ la función $f_m(x)$ del ejemplo 5 vale cero excepto un número finito de puntos, luego f_m es integrable y su integral vale cero, pero su función límite es una función no integrable.

Finalmente, en el ejemplo 1 tenemos

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0 = \int_0^1 0\,dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Todo lo anterior nos dice que dada una sucesión $f_n(x)$ con determinadas propiedades como la continuidad, derivabilidad, integrabilidad, la función límite puede o no tenerlas. Por tanto nuestro objetivo es claro. Encontrar condiciones bajo las cuales la función límite "herede" las propiedades de las funciones de la sucesión.

Definición 3.5 *Una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ converge puntualmente en $I \in \mathbb{X}$ si para todo $x_0 \in I$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(x_0,\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$ y lo denotaremos $f_n \to f$.*

Claramente vemos que, en general, nuestro N dependerá de x_0. Consideremos como ejemplo la sucesión $f_n(x) = x^n$ en $[0,1)$. Obviamente $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,1)$. Sea $0 < \epsilon < 1$ cualquiera y $x_0 \in [0,1)$. Entonces, tendremos $|f_n(x_0) - 0| = x_0^n < \epsilon$. Si escogemos N tal que $x_0^N < \epsilon$, o equivalentemente $N \log x_0 < \log \epsilon$, tendremos, como $\log x_0 < 0$ que, para todo $n > N = \log\epsilon / \log x_0$, $x_0^n < \epsilon$. Es decir que nuestra N depende explícitamente de x_0 y lo que es peor, a medida que x_0 se va acercando a 1, N claramente va tomando valores más grandes. La siguiente figura 3 aclara lo anterior.

En la figura 3 (izquierda) vemos la sucesión $f_n(x) = x^n$ dibujada en $[0,1)$. Las curvas son, de arriba hacia abajo, x, x^2, $\ldots x^N$. La linea horizontal representa a nuestro $\epsilon > 0$ y la vertical

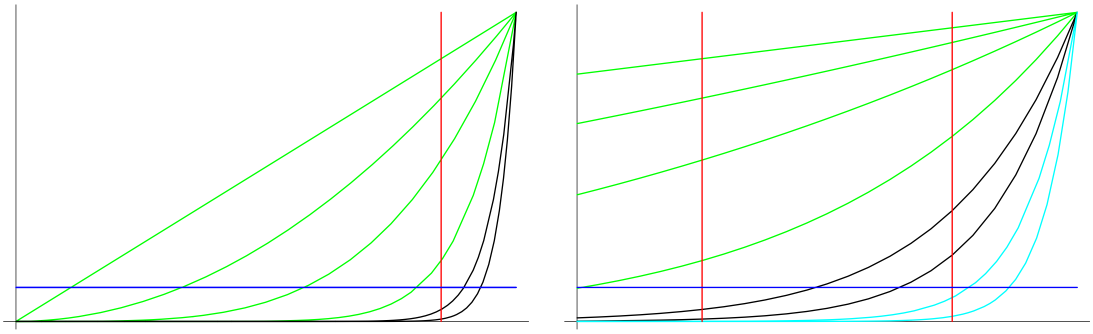

Figura 3: La sucesión $f_n(x) = x^n$ en $[0, 1)$ (izq.) y $f_n(x) = x^n$ en $[q, 1)$ (der.)

a nuestro x_0. Como vemos, dado el $\epsilon > 0$ de la figura, luego de varios N tenemos que x_0^N es menor que el $\epsilon > 0$ dado –ver la quinta gráfica de arriba abajo–. Veamos que ocurre más cerca del 1, para ello quedémonos sólo con un pequeño intervalo cercano al 1, digamos $[q, 1)$, estando q “suficientemente” cercano a 1. Aumentemos nuestro x_0 hasta hacerlo más próximo a 1 tal y como observamos en la figura de la derecha –la primera linea vertical era nuestro anterior x_0 y la segunda, más a la derecha es nuestro nuevo x_0–. Como vemos, ahora tenemos que aumentar nuestro N hasta llegar a la séptima curva. En ambos casos las primeras seis curvas son las misma.

A modo de ejemplo, tomaremos los valores numéricos. Numéricamente hemos escogidos los siguientes valores $\epsilon = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}85$ y el N necesario fue 20. En el segundo caso $\epsilon = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}95$ y el N necesario fue 50. Obviamente a medida que nos acercamos a 1 nuestro N crecerá tal y como hemos mostrado antes.

Una pregunta evidente es la siguiente. ¿Cualquiera sea una sucesión $f_n(x))_n$ siempre ocurrirá lo mismo. Para responderla consideremos el siguiente ejemplo: Sea la misma sucesión $f_n(x) = x^n$ pero en $[0, q]$ con $q \in (0, 1)$.

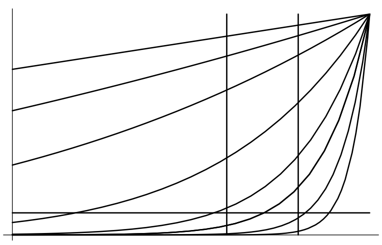

Figura 4: La sucesión $f_n(X) = x^n$, en $[0, q]$.

Hagamos un experimento numérico como el anterior usando como antes $\epsilon = 0{,}1$. En la figura 4 representaremos nuevamente mediante linea horizontal a nuestro $\epsilon > 0$, la primera linea vertical corresponderá a un x cualquiera en $[0, q]$ y la segunda linea vertical corresponderá a q, el extremo del intervalo. Dibujaremos la sucesión x^n para que se vea con más claridad el comportamiento de la misma. Obviamente $x \leq q$, así que escogeremos $q = 0{,}95$, por ejemplo. Un simple vistazo a la figura 4 nos permite ver que cualquiera sea el $x \leq q$ que escojamos, dado el $\epsilon > 0$ tenemos un valor de N, que en nuestro caso corresponde a la séptima gráfica tal que $x^n < \epsilon$ para todo $n > N$ y ¡cualquiera sea la $x \in [0, q]$! Es decir podemos encontrar una N válida en todo punto de $[0, q]$. En realidad esto no es de extrañar pues para todo $\epsilon > 0$ si escogemos $N = \log \epsilon / \log q$, entonces tendremos $q^n < \epsilon$, por tanto para todo $x \in [0, q]$, y para todo $n > N$ tendremos $x^n \leq q^n < \epsilon$, es decir x^n tiende a 0 en todo $[0, q]$ y además lo hace *uniformemente* en todo el intervalo.

Lo anterior nos conduce de manera natural a la siguiente

Definición 3.6 *Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en un intervalo $I \in \mathbb{X}$, diremos que $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N}$*

tal que para todo $n > N$ y para todos los $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, y lo denotaremos $f_n \rightrightarrows f$.

Gráficamente la convergencia uniforme está representada en la figura 5, gráfico de la izquierda. La función f está al centro y está localizada en el interior de cierto entorno de longitud ϵ. Cualquiera sea la $x \in I$, $f_n(x)$ debe estar contenida en el entorno $(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$ tal y como se muestra en dicha figura. En esta misma figura 5 podemos ver a la derecha lo que ocurre cuando la convergencia es no uniforme. Y es que para todo n siempre existe un x tal que $f_n(x)$ sale fuera del entorno $(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$.

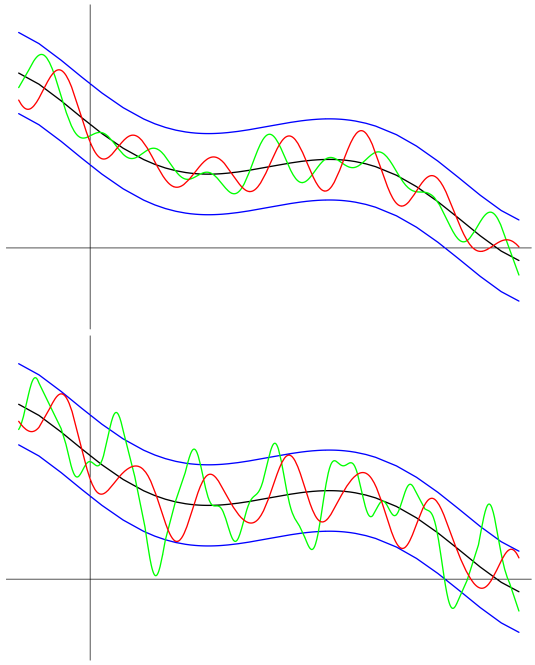

Figura 5: Convergencia uniforme (izquierda) y no uniforme (derecha) de una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$.

Es evidente que si $f_n \rightrightarrows f$ entonces $f_n \to f$.

Nuestro próximo objetivo es dar condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión de funciones converja uniformemente.

Para ello vamos a considerar las funciones representadas en la figura 5. Vamos a representar gráficamente –ver gráfico 6– las funciones $|f(x) - f_n(x)|$ de la figura 5. La línea horizontal representa el valor de ϵ escogido. Podemos ver de un simple vistazo que para que la convergencia sea uniforme, todos los gráficos de las funciones $\phi_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$ han de estar contenidos en el entorno $[0, \epsilon)$ lo cual ocurrirá si los máximos o supremos de cada función $\phi_n(x)$ –que son números– están contenidos en dicho intervalo. No ocurre lo mismo en el caso de la convergencia no uniforme, donde siempre, cualquiera sea el ϵ que escojamos siempre habrá un valor de n tal que el valor de la función $\phi_n(x)$ en cierto punto x_0 del dominio sobrepasa a ϵ, pero entonces, si ese punto no corresponde al máximo, éste, si existe, también ha de sobrepasar a ϵ. Los anteriores razonamientos "geométricos" nos lleva al siguiente

Teorema 3.7 *(Condición necesaria y suficiente de convergencia uniforme para una sucesión de funciones)*

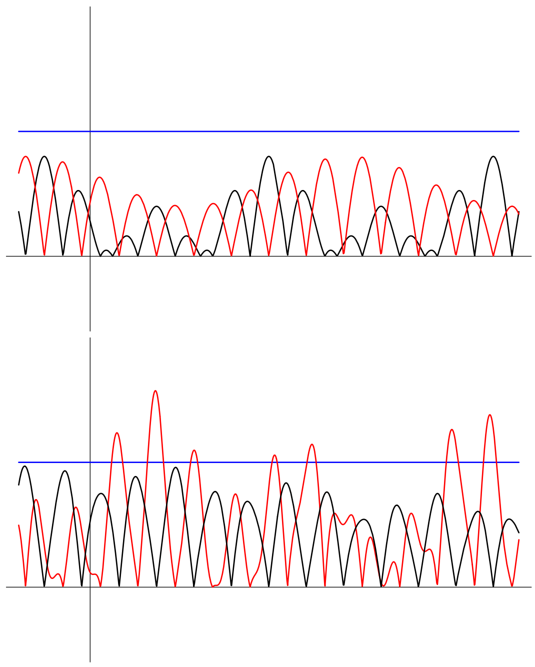

Figura 6: Gráficos de $|f(x) - f_n(x)|$ en el caso de la convergencia uniforme (izquierda) y no uniforme (derecha) de $(f_n(x))_n$.

Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathbb{X}$, $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Corolario 3.8 *Para que una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathbb{X}$, $f_n(x)$ converja uniformemente a $f(x)$ en I es necesario y suficiente que exista una sucesión $(a_n)_n$ de términos no negativos con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y un número $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$.*

Ejercicio 3.9 Probar que la sucesión $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a cero en $[0, q]$, $0 < q < 1$, pero no lo hace en $[0, 1)$.

En efecto, en el primer caso tenemos

$$\sup_{x\in[0,q]} |x^n - 0| = q^n = a_n, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

mientras que en el segundo

$$\sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \qquad \text{que no tiende a 0 cuando } n \to \infty.$$

Teorema 3.10 *(Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones)*
Dada una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathbb{X}$, $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, para todo $p \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in I$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

Proposición 3.11 *Si $(f_n(x))_n$ y $(g_n(x))_n$ son dos sucesiones de funciones uniformemente convergentes en I a las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, entonces*

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \rightrightarrows \alpha f(x) + \beta g(x), \quad \text{en } I, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

y

$$h(x) f_n(x) \rightrightarrows h(x) f(x), \qquad \text{para toda función } h(x) \text{ acotada en } I.$$

Pasemos a continuación a estudiar lo que ocurre en el caso de las series de funciones. Por analogía con el caso de las series numéricas definiremos las series de funciones

Definición 3.12 *Dada una sucesión de funciones $(a_n(x))_n$, la expresión*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_k(x) + \cdots$$

se denomina serie funcional infinita o serie de funciones. Las funciones

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_n(x),$$

se denominan sumas parciales de la serie de funciones.

Obviamente las sumas parciales $S_n(x)$ son a su vez una sucesión de funciones por tanto podemos definir la convergencia puntual y uniforme de una serie de funciones.

Definición 3.13 *Diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge a $S(x)$, para cierto $x \in \mathbb{R}$ si la sucesión de sumas parciales $(S_n(x))_n$ tiene límite $S(x)$. Si por el contrario, la sucesión de sumas parciales no tiene límite, entonces diremos que la serie diverge.*

Definición 3.14 *Una serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge puntualmente en $I \in \mathbb{X}$ si para todo $x \in I$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ y lo denotaremos $S_n \to S$.*

Definición 3.15 *Una serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ en I si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y para todos los $x \in I$, $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ y lo denotaremos $S_n \rightrightarrows S$.*

Si definimos el resto de la serie

$$r_n(x) \equiv S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x), \tag{3.1}$$

entonces, la serie converge uniformemente si y sólo si $r_n(x) \rightrightarrows 0$, en caso contrario la convergencia no es uniforme. Una prueba sencilla es usar el Teorema 3.7 para la sucesión de funciones $S(x) - S_n(x)$. En efecto, puesto que $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, tenemos si $r_n(x) \rightrightarrows 0$, entonces existe una sucesión $(a_n)_n$ de términos positivos que tiende cero tal que $|r_n(x)| \leq a_n$, luego $|S(x) - S_n(x)| \leq a_n \to 0$. El recíproco es análogo.

Lo anterior nos conduce al siguiente

Teorema 3.16 *Si* $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ *en* I*, es decir si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *es uniformemente convergente en* I*, entonces,* $a_n(x)$*, el término general de la serie converge uniformemente a 0 en* I*, es decir* $a_n(x) \rightrightarrows 0$.

Teorema 3.17 *Criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de una serie de funciones. Sea* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de funciones definidas en* $I \subset \mathbb{R}$*, y* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números reales no negativos, tales que* $|a_n(x)| \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $x \in I$ *y cuya serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es convergente. Entonces la serie de funciones* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *es uniformemente convergente en* I.

Ejercicio 3.18 Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. La serie converge uniformemente en el intervalo $x \in [-q, q]$, para todo $q \in (0, 1)$.

Efectivamente, como $x^n \leq q^n$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge, entonces el criterio de Weierstrass nos asegura la convergencia.

3.1. Propiedades de las sucesiones y series de funciones

En este apartado vamos a estudiar en que condiciones las propiedades de f_n se traspasan a la función límite. Es decir, responderemos a la pregunta formulada al principio: ¿hereda $f(x)$ todas las propiedades de las $f_n(x)$?

Teorema 3.19 *Sobre la conmutatividad del límite de una sucesión de funciones*
Sea $(f_n(x))_n$ *una sucesión de funciones definidas en* $I \subset \mathbb{R}$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe el límite* $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_n$*,* $x_0 \in I$*. Si* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *en* I*, entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)$$

Como corolario trivial tenemos el siguiente

Teorema 3.20 *Sobre la continuidad de una sucesión de funciones*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de funciones definidas en* $I \subset \mathbb{R}$*. Si* f_n *es continua en* I *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, y* f_n *converge uniformemente a* f *en* I *entonces* f *es continua en* I.

Teorema 3.21 *Sobre la conmutatividad del límite y la suma para una serie de funciones*
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *una serie de funciones uniformemente convergente en* I *tales que* $\lim_{x \to x_0} a_n(x) = a_n$*, entonces*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} a_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si además, las funciones $a_n(x)$ *son continuas, entonces la suma* $S(x)$ *de la serie es una función continua.*

Teorema 3.22 *Sobre la integrabilidad de una sucesión de funciones*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e integrables en $[a,b]$ y sea f_n uniformemente convergente a f en $[a,b]$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.$$

En el caso de las series tenemos

Teorema 3.23 *Sobre la integrabilidad de una serie de funciones*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e integrables en $[a,b]$ tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente en I. Entonces su suma $S(x)$ es integrable y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx.$$

Teorema 3.24 *Sobre la derivabilidad de una sucesión de funciones*
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo acotado $I \subset \mathbb{R}$ y derivables en I tales que para cierto $x_0 \in I$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = l$ y además la sucesión de funciones $(f_n')_{n=0}^{\infty}$ converja uniformemente a g en I. Entonces la sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a cierta función f en I y además $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, es decir la sucesión se puede derivar término a término, i.e.,

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

El teorema anterior se adapta fácilmente al caso de series de funciones:

Teorema 3.25 *Sea $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ una serie de funciones que converge al menos en un punto $x_0 \in I$, cuyos términos $a_n(x)$ son derivables en todo I, y cuya serie de las derivadas de $a_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ converge uniformemente en I. Entonces la serie $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge uniformemente en I y además se cumple que*

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n'(x)\right),$$

o sea, es derivable término a término.

3.2. Problemas

Problema 3.1 Estudia la convergencia uniforme de las sucesiones de funciones consideradas en el ejemplo 3.4.

Problema 3.2 Estudia la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $0 \le x \le 1$,

2. $f_n(x) = xe^{-nx}$, $0 \le x < +\infty$,

3. $f_n(x) = \dfrac{2n^2x}{1+n^2x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Problema 3.3 Demuestra la proposición 3.11

Problema 3.4 Demuestra la condición necesaria de convergencia uniforme de una serie: Teorema 3.16.

Problema 3.5 Sea $f_n(x) = \arctan(nx)$.

a) Estudiar la convergencia puntual de $\{f_n\}$. ¿Es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$?.

b) Demostrar que converge uniformemente en $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq a > 0\}$.

c) Estudiar la convergencia uniforme de la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\arctan(nx)}{n^2+1}$.

d) Demostrar que la función suma de la serie anterior es derivable en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Problema 3.6 Como vimos en el apartado 2.2, toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$, tiene un radio de convergencia $R \geq 0$ ó $R = +\infty$. Además, la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z| < R$. Prueba que toda serie de potencias converge uniformemente en cualquier región Ω del plano complejo contenida en el círculo de radio $r < R$, i.e., $\Omega \subset \{z;\ |z| \leq r < R\}$.

Problema 3.7 Aplica los teoremas 3.21, 3.23 y 3.25 a las series de potencias y deduce los correspondientes teoremas. Compáralos con los del apartado §2.2. Discute cuando las series de potencias convergen uniformemente.

4. Espacios métricos

Los espacios métricos son la extensión natural de los espacios antes estudiados $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Definición 4.1 *Un espacio métrico es un par* $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

En adelante diremos simplemente que $\mathbb{X}$ es el espacio y ρ su métrica.

4.1. Ejemplos

Ejemplo 4.2 *Sea* $\mathbb{X}$ *un conjunto arbitrario y definamos la métrica* trivial $\rho(x, y) = 1$ *si* $x \neq y$ *y* $\rho(x, y) = 0$ *si* $x = y$. *Este espacio se suele denominar espacio métrico discreto.*

Ejemplo 4.3 *Si* $\mathbb{X}$ *es el conjunto de todos los números reales y* $\rho(x, y) = |x - y|$*, donde* $|x|$ *es el valor absoluto de* x*, obtenemos un espacio métrico normalmente denotado por* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4.4 *El espacio métrico* $\mathbb{C}$ *es el espacio definido por el par* $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ *y la métrica* $\rho(x, y) = |x - y|$*, donde* $|x|$ *es el módulo de* x.

Ejemplo 4.5 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$*, es decir el espacio de las* n*-tuplas* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *con la métrica*

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}.$$

Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}_2^n$. *Análogamente se puede definir para el caso complejo.*

Ejemplo 4.6 *Si* $\mathbb{X}$*, es el espacio de las* n*-tuplas reales* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *pero con la métrica*

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

obtenemos otro espacio métrico (distinto al anterior) que denotaremos por $\mathbb{R}_1^n$. *Análogamente se puede definir para el caso complejo.*

Una generalización de los dos ejemplos anteriores es el siguiente:

Ejemplo 4.7 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$*, es decir el espacio de las* n*-tuplas* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *con la métrica*

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}_p^n$. *Análogamente se puede definir para el caso complejo.*

Ejemplo 4.8 $\mathbb{R}_\infty^n$. *Es decir,* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *espacio de las* n*-tuplas* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *pero con la métrica:*

$$\rho(x, y) = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - y_k|.$$

Ejemplo 4.9 *Sea $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a,b]$. Definamos la función*

$$\rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

El par obtenido $C_\infty([a,b])$ es un espacio métrico.

Ejemplo 4.10 *Sea nuevamente $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a,b]$ y definamos la métrica*

$$\rho(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

El par obtenido $C_p([a,b])$ es un espacio métrico. Como caso particular (de especial relevancia) tenemos el caso $p = 2$, i.e., $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$ y ρ es la función

$$\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2}.$$

Ejemplo 4.11 *Sea $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ acotadas y definimos la métrica*

$$\rho(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|.$$

El espacio obtenido es un espacio métrico que denotaremos por l^∞.

Ejemplo 4.12 *Sea ahora $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones reales (o complejas) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ tales que $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < +\infty$ con la métrica*

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

Dicho espacio lo denotaremos por l^p.

Un caso particular de estos espacios corresponde al caso $p = 2$ que conduce al espacio métrico l^2 de Hilbert. O sea, $l^2 = (\mathbb{X}, \rho)$ donde $\mathbb{X}$ es el espacio de todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ tales que $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < +\infty$ con la métrica

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k - y_k|^2}.$$

Ejemplo 4.13 *Sea ahora $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ y definamos la métrica por*

$$\rho(x,y) = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

Este espacio también es un espacio métrico.

Ejemplo 4.14 *Sea el espacio métrico $(\mathbb{X}, \rho)$. Entonces si definimos sobre $\mathbb{X}$ una nueva métrica $\sigma(x,y)$*

$$\sigma(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)},$$

obtenemos un nuevo espacio métrico $(\mathbb{X}, \sigma)$.

Ejercicio 4.15 *Prueba que todos los espacios considerados en los ejemplos anteriores son espacios métricos.* ***Ayuda:*** En caso necesario utiliza las desigualdades de Minkowski (ver problemas) para n números, series o integrales.

4.2. Definiciones generales

Definición 4.16 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico, $x_0 \in \mathbb{X}$ y $r > 0$. Definiremos la bola abierta $B(x_0, r)$ al conjunto*

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) < r\},$$

bola o esfera cerrada $S(x_0, r)$ al conjunto

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) \leq r\}.$$

Definición 4.17 *Se dice que el conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es abierto en $\mathbb{X}$ si todos sus puntos (elementos) se pueden encerrar en una bola abierta contenida completamente en $\mathbb{X}$. Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es cerrado en $\mathbb{X}$ si es su complementario en $\mathbb{X}$, $\mathbb{X} \backslash M$ es abierto.*

Las bolas abiertas $B(x_0, \epsilon)$ se suelen denominar ϵ-vecindades (o entornos) de x_0. Es evidente que toda ϵ-vecindad de x_0 contiene al propio x_0.

Definición 4.18 *Un punto x_0 se denomina punto interior del conjunto $M \subset \mathbb{X}$ si existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.*

De lo anterior se deduce que el conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es abierto si y sólo si todos sus puntos son interiores.

Proposición 4.19 *Sea Σ en conjunto de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{X}$. Entonces*

1. *$\emptyset \in \Sigma$, $\mathbb{X} \in \Sigma$,*
2. *la unión (finita o infinita) de subconjuntos abiertos de $\mathbb{X}$ es abierto: Si U_k, $k = 1, 2, \ldots$ son abiertos, $\bigcup_k U_k \in \Sigma$*
3. *La intersección de un número finito de abiertos es abierto: Si U_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ son abiertos, $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \Sigma$.*

Las tres propiedades anteriores son de extrema importancia. Tal es así que ellas definen un tipo de espacios muy generales: Los espacios topológicos. Así, el par, dados un conjunto $\mathbb{X}$ y una colección Σ de subconjuntos de $\mathbb{X}$, $(\mathbb{X}, \Sigma)$ se denomina espacio topológico si Σ cumple con los *axiomas* (propiedades) 1, 2 y 3 de la proposición anterior. Al conjunto Σ se le denomina *topología* de $\mathbb{X}$. Así pues, todo espacio métrico es un espacio topológico.

Antes de continuar vamos a describir como es la *geometría* de algunos espacios métricos.

Como ejemplo tomaremos $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ y escogeremos distintas métricas. En la figura 7 están representados las bolas $B(0, 1)$ para las métricas de los ejemplos 4.5–4.8.

4.3. Aplicaciones en espacios métricos

Definición 4.20 *Por aplicación (operador) o función entenderemos una regla T que le hace corresponder a cada elemento del subconjunto $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ un único elemento del espacio métrico $\mathbb{Y}$. Así, $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $y = Tx$ o $y = T(x)$, donde $x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ e $y \in \mathbb{Y}$. Al conjunto $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ se le denomina dominio de la aplicación.*

Definición 4.21 *Si a cada $x \in \mathcal{D}(T)$ le corresponde un valor $y = Tx \in \mathbb{Y}$ diremos que Tx es la imagen de x según T. Al conjunto de todas las imágenes Tx le denominaremos imagen de T y le denotaremos por $\mathcal{I}(T)$.*

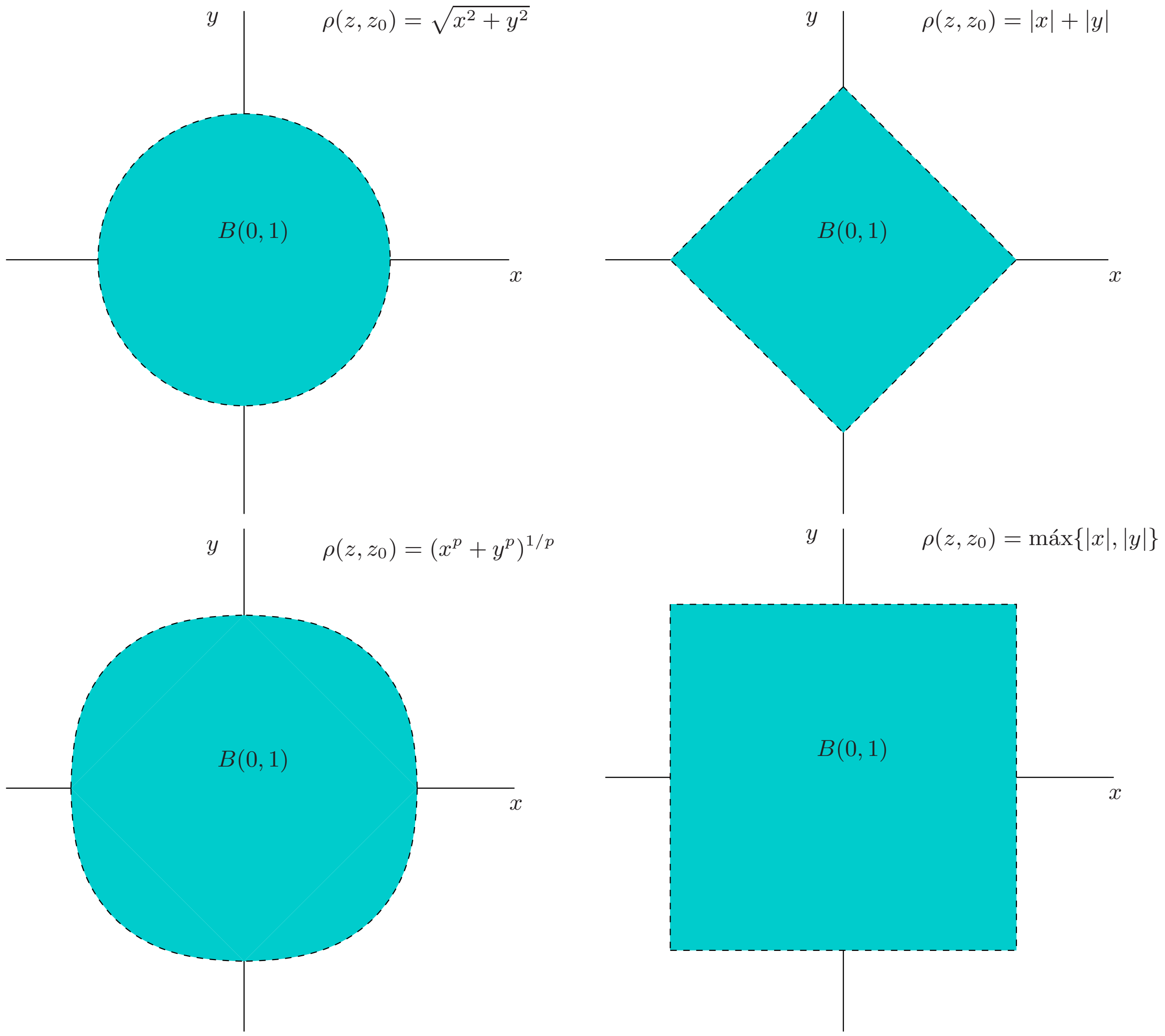

Figura 7: Métricas de los ejemplos 4.5 y 4.6 (arriba) y 4.7 y 4.8 (abajo). Las distancias $\rho(z,z_0)$ corresponden a los puntos $z=(x,y)$ y $z_0=(0,0)$.

Definición 4.22 *La imagen inversa de $y \in \mathbb{Y}$ es el conjunto de todas las $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = y$. La imagen inversa de un subconjunto $N \subset \mathbb{Y}$ es el conjunto de todas las $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = y$ para todos $y \in M$.*

La imagen inversa de un elemento $y \in \mathbb{Y}$ puede ser el conjunto vacío, un único punto (elemento) de $\mathcal{D}(T)$ o un subconjunto $M \subset \mathcal{D}(T)$.

Definición 4.23 *Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ se llama sobreyectiva si todo elemento y de $\mathbb{Y}$ es imagen de algún elemento x del dominio, es decir T es tal que*

$$\forall y \in \mathbb{Y}, \quad \exists x \in \mathcal{D}(T) \text{ tal que } Tx = y, \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}(T) \equiv \mathbb{Y}.$$

Definición 4.24 *Una función se llama inyectiva si todo elemento y de la imagen de T es imagen a lo sumo de uno y sólo un elemento x del dominio. Es decir $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es tal que*

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{I}(T), \text{ tales que } y_1 = Tx_1 = y_2 = Tx_2, \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

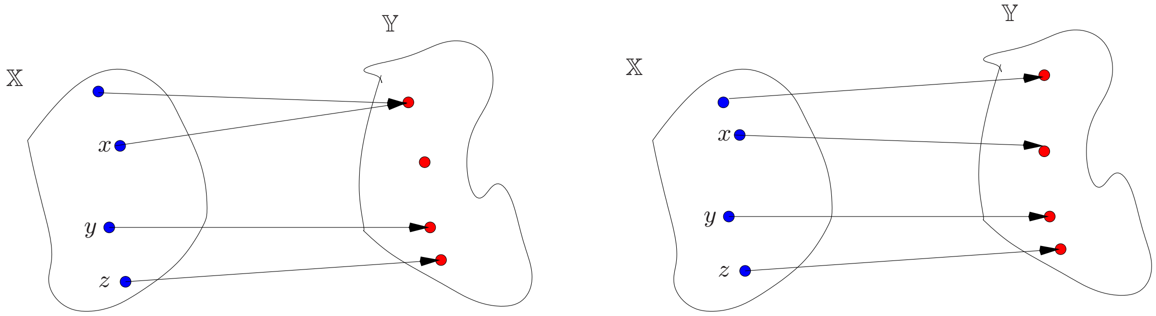

Figura 8: Aplicaciones $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y $U : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$. U es inyectiva y T no lo es.

O, equivalentemente, si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ *con* $x_1 \neq x_2$*, se tiene* $Tx_1 \neq Tx_2$.

Es decir una función inyectiva es tal que diferentes puntos tienen diferentes imágenes y por tanto la imagen inversa de cada $y \in \mathcal{I}(T)$ es un único elemento de $\mathcal{D}(T)$.

Definición 4.25 *Una aplicación inyectiva y sobreyectiva se denomina biyectiva.*

Es decir una aplicación es sobreyectiva si, para todo $y \in \mathbb{Y}$, la ecuación $Tx = y$ tiene al menos una solución, e inyectiva si la ecuación anterior tiene o bien una única solución, o bien no tiene solución. Así mismo, T es biyectiva si para todo $y \in \mathbb{Y}$, la ecuación $Tx = y$ tiene una y sólo una solución.

Para las funciones inyectivas se puede definir la aplicación inversa.

Definición 4.26 *Sea* $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación inyectiva. Definiremos su aplicación inversa* T^{-1} *a la aplicación* $T^{-1} : \mathcal{I}(T) \subset \mathbb{Y} \mapsto \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ *tal que a cada elemento* $y \in \mathcal{I}(T)$ *le hace corresponder un único* $x \in \mathcal{D}(T)$ *tal que* $Tx = y$.

Como ejemplo de los conceptos anteriores usaremos las funciones reales.

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ no es inyectiva pues para $f(x) = 4$, por ejemplo, existen dos valores de x del domino tales que $f(x) = 4$, ellos son $x = -2$ y $x = 2$. Esta función tampoco es sobreyectiva pues para $y = -1$ no existe ningún x del dominio tal que $f(x) = -1$ ($f(x) = -1 \iff x^2 = -1$). Un ejemplo de función sobreyectiva es $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = x^3$. La función $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es inyectiva pues a cada $y \in f(A)$ le corresponde una $x \in [0, +\infty)$ tal que $f(x) = y$. Dicha x es $x = \sqrt{y}$. Por tanto la función $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tiene inversa y ficha inversa es $f^{-1} : [0, +\infty) \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Definición 4.27 (Composición de funciones) *Sean* $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathcal{I}(T)\mathbb{Y}$ *y* $U : \mathcal{D}(U) \subset \mathbb{Y} \mapsto \mathcal{I}(U)\mathbb{Z}$ *dos aplicaciones tales que* $\mathcal{I}(T) \subset \mathcal{D}(U)$*. Entonces definiremos la aplicación* $U \circ T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Z}$ *y la denominaremos aplicación compuesta de* U *y* T *a la aplicación que le hace corresponder a cada* $x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ *un elemento* $z \in \mathbb{Z}$ *tal que* $z = U(Tx)$ $(z = UTx)$.

En general $UTx \neq TUx$, de hecho que exista $U \circ T$ no implica que exista $T \circ U$.

Por ejemplo: sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$. Es evidente que la imagen de f está contenida en el dominio de g, por tanto podemos definir la función $(g \circ f)(x) = g(f(x))$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2.$$

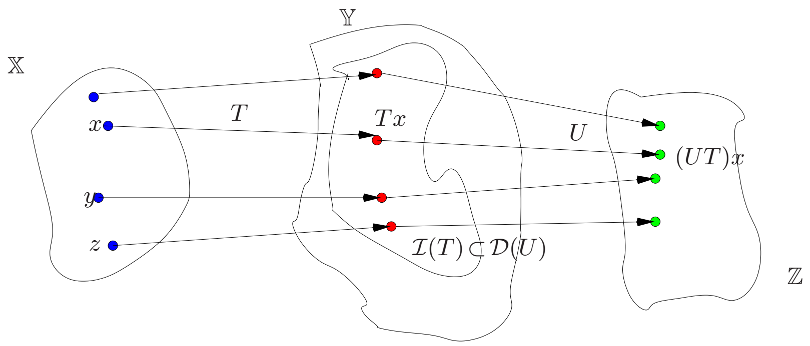

Figura 9: Composición de funciones $f \circ g$ de $f : A \mapsto C = f(A) \quad g : B \mapsto D$, $C = f(A) \subset B$.

Además, la imagen de g también está contenida en el dominio de f, por lo que podemos definir la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2.$$

Nótese que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. De hecho que exista $(f \circ g)(x)$ no implica que exista $(g \circ f)(x)$. Por ejemplo: $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x$ y $g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, para las cuales tenemos $(f \circ g)(x) : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2$ pero $(g \circ f)(x)$ no existe.

Nótese que si T es invertible, entonces $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$.

Definición 4.28 *La restricción de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ a un subconjunto $B \subset \mathcal{D}(T)$ es la aplicación $T|_B$ que se obtiene de T cuando x se restringe al conjunto $B \subset \mathcal{D}(T)$.*

Definición 4.29 *La extensión de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ a un subconjunto $C \supset \mathcal{D}(T)$ es la aplicación $\widetilde{T}$ tal que $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$, i.e., $\widetilde{T}x = Tx$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$.*

Definición 4.30 *Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es continua en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ con $\rho(x, x_0) < \delta$ es tal que*[3] *$\sigma(Tx, Tx_0) < \epsilon$. Se dice que T es continua en todo $M \subset \mathcal{D}(T)$ si T es continua en todo $x \in M$.*

La definición anterior es equivalente a decir que para toda sucesión $(x_n)_n$ con $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, $Tx_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$.

Proposición 4.31 *Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es continua si y sólo si la imagen inversa de cualquier subconjunto abierto (cerrado) de $\mathbb{Y}$ es un subconjunto abierto (cerrado) de $\mathbb{X}$.*

4.4. Puntos límites y límite de sucesiones

Definición 4.32 *Sea $M \subset \mathbb{X}$. Diremos que $x \in \mathbb{X}$ es un punto de contacto (o adherente) de M si en cualquier bola $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay al menos un elemento de M. Así mismo, diremos que x es un punto de acumulación (o punto límite) de M si en cualquier bola $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay al menos un elemento de M distinto de x, o equivalentemente, en cada bola $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay infinitos elementos de M. Un punto x se denomina aislado de M si existe una bola $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ que no contiene ningún elemento M excepto el propio x.*

[3] Aquí ρ denota la métrica de $\mathbb{X}$ y σ la de $\mathbb{Y}$.

Es fácil ver que si M solo contiene puntos aislados entonces M es cerrado (pues $\mathbb{X}\backslash M$ es abierto). De lo anterior se deduce además que los puntos de contacto de M o bien son puntos límites, o bien son aislados.

Definición 4.33 *Dado un subconjunto $M \in \mathbb{X}$, se denomina clausura de M al conjunto $\overline{M}$ de los elementos de M y sus puntos de contacto.*

De lo anterior se sigue que $\overline{M} = M \cup \{\text{conjunto de sus puntos límites}\}$.

Por ejemplo, si $\mathbb{X} = \mathbb{Q}$, entonces $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ pues todo $x \in \mathbb{R}$ es un punto límite de $\mathbb{Q}$ (¿por qué?).

Proposición 4.34 *Un subconjunto $M \in \mathbb{X}$ es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$.*

De hecho como $M \subset \overline{M}$, $\overline{M}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a M.

Definición 4.35 *Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es acotado si su diámetro $d(M) = \sup_{x,y\in M} \rho(x, y)$ es es finito.*

Definición 4.36 *Dada una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$, diremos que $(x_n)_n$ es acotada si existe un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ acotado tal que $x_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Lo anterior es equivalente a que exista un $x \in \mathbb{X}$ y un número $K > 0$ tal que $\rho(x, x_n) < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.37 *Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ es convergente, y lo denotaremos por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, si existe un $x \in \mathbb{X}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ es divergente.*

Nótese que en la propia definición de límite está explícito que el límite ha de ser un elemento de $\mathbb{X}$. Por ejemplo, sea $\mathbb{X}$ el intervalo abierto $(0, 1)$ con la métrica habitual de $\mathbb{R}$. La sucesión $x_n = 1/(n + 1)$ no tiene límite en $\mathbb{X}$ ya que claramente $1/(n + 1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pero $0 \notin (0, 1)$.

Ejercicio 4.38 *Da una interpretación* geométrica (topológica) *del concepto de límite en un espacio métrico cualquiera.*

Definición 4.39 *Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ se denomina de Cauchy o fundamental si existe para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.*

En $\mathbb{R}$ toda sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy. Esta propiedad fundamental de $\mathbb{R}$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$. Por ejemplo, si escogemos nuevamente $\mathbb{X}$ como el intervalo abierto $(0, 1)$ con la métrica habitual de $\mathbb{R}$, la sucesión $x_n = 1/(n + 1)$, que es de Cauchy (¿por qué?) no tiene límite en $\mathbb{X}$.

Definición 4.40 *Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{X}$ converge (a un elemento de $\mathbb{X}$).*

Por ejemplo, el espacio $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$, es completo. También lo es $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ con la métrica usual de $\mathbb{C}$. Sin embargo $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, es incompleto (¿por qué?), y el conjunto $\mathbb{X} = (0, 1)$ de antes también lo es.

Teorema 4.41 *Sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente de elementos de un espacio métrico $\mathbb{X}$. Entonces $(x_n)_n$ es de Cauchy.*

Teorema 4.42 *Un subespacio M de un espacio métrico completo $\mathbb{X}$ es completo si y sólo si es cerrado en $\mathbb{X}$.*

Ejemplo 4.43 *Prueba que el espacio métrico l^2 del ejemplo 4.12 es completo.*

Sea $x^{(n)} := (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$ una sucesión de Cauchy de l^2, i.e., $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^2 < +\infty$, y cualquiera sea $\epsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(n+p)}|^2 < \epsilon^2, \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

con tal que n sea lo suficientemente grande. Pero entonces como todos los sumandos son positivos, podemos asegurar que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(n+p)}| < \epsilon, \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

y n suficientemente grande. I.e., cada una de las sucesiones reales (o complejas) $x_k^{(n)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, es de Cauchy. Pero $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) es un espacio completo por lo que existe $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ para cada k. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$. Probemos que $x \in l^2$ y que $x^{(n)}$ converge a x en la métrica de l^2. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(n+p)}|^2 < \epsilon^2$$

entonces tenemos que, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k^{(n+p)}|^2 < \epsilon^2.$$

Entonces $x_k^{(n)}$ converge a x_k para cada k, y tomando el límite cuando $p \to \infty$ tenemos que para todo N

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k|^2 \leq \epsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^2 \leq \epsilon^2$$

o, equivalentemente, $\rho(x^{(n)}, x) \leq \epsilon$, si n es suficientemente grande. Luego hemos probado que $x^{(n)}$ converge a x en la métrica de l^2. Finalmente, usando la desigualdad $(0 = (0, 0, 0, \ldots))$

$$\rho(x, 0) \leq \rho(x, x^{(n)}) + \rho(x^{(n)}, 0),$$

y usando que $x^{(n)}$ es de l^2, se tiene que $\rho(x, 0)$ está acotada, por lo que $x \in l^2$. Al ser $x^{(n)}$ una sucesión fundamental arbitraria, se sigue que l^2 es completo.

De forma análoga se puede probar que l^p, $p \geq 1$ es completo.

Ejercicio 4.44 *Prueba que el espacio métrico $C_{[a,b]}$ de las funciones continuas en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con la métrica $\rho(f, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ (ver ejemplo 4.9) es completo. I.e., prueba que toda sucesión de Cauchy en dicho espacio converge a una función continua.* ***Ayuda:*** *Prueba que toda sucesión de Cauchy es uniformemente convergente.*

Ejemplo 4.45 *Prueba que el espacio $C_{[a,b]}^2$ del ejemplo 4.10 no es completo.*

Vamos a probar que existe una sucesión fundamental de funciones continuas cuyo límite no puede ser, en la métrica de $C^2_{[a,b]}$, una función continua.

Para ello construyamos la sucesión de funciones en $[-1,1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x \le -\frac{1}{n}, \\ nx, & -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Obviamente para cada $x \in [-1,1]$ (esta convergencia *punto a punto* se denomina *convergencia puntual*)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ -1, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

De la figura 10 se deduce[4] además que

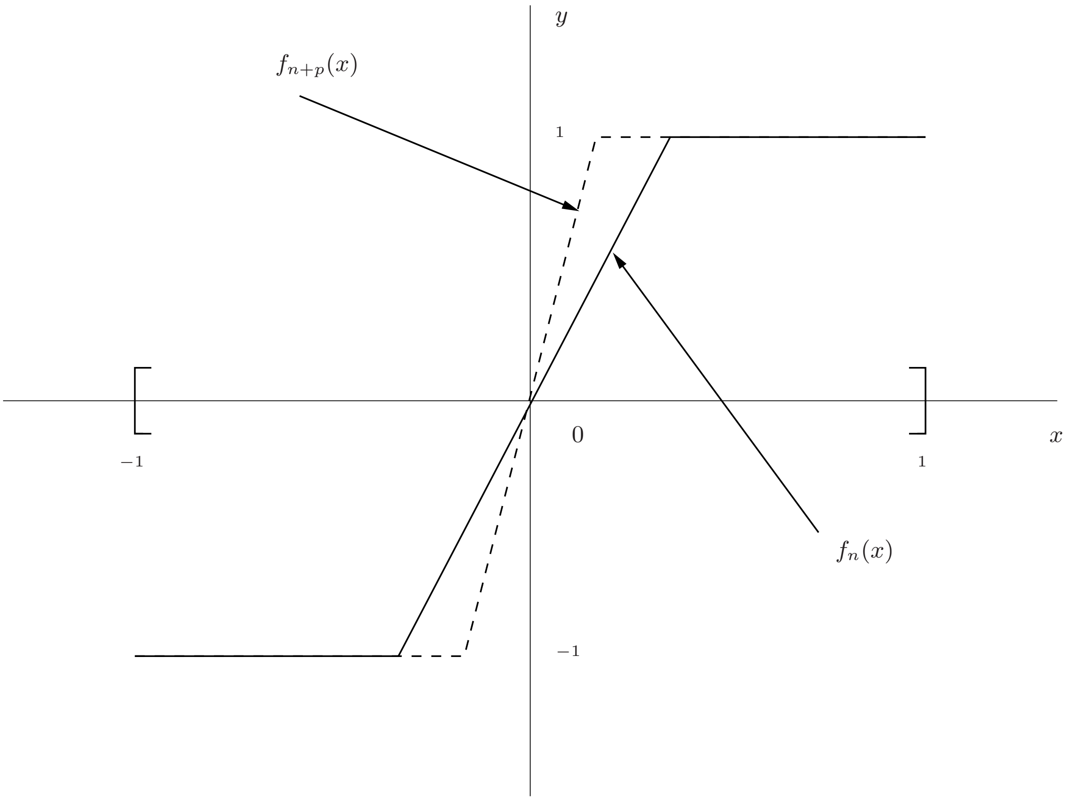

Figura 10: Sucesión de funciones del ejercicio 4.45.

$$\rho(f_n, f_{n+p}) = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_{n+p}(x)|^2 dx} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

es decir $(f_n)_n$ es una sucesión fundamental. Además,

$$\rho(f_n, f) = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

[4] Acótese la integral con el área del triángulo con vértices en $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1/n,1)$.

Sea ahora una función continua cualquiera $g \in C^2_{[a,b]}$. De la desigualdad

$$\rho(f,g) \leq \rho(g,f_n) + \rho(f_n,f),$$

teniendo en cuenta que $\rho(f,g) \neq 0$ y que $\rho(f_n,f)$ se puede hacer tan pequeño como se quiera, se deduce que $\rho(g,f_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho(f,g) \neq 0$ por lo que no existe ninguna función $g \in C^2_{[a,b]}$ que sea límite de $(f_n)_n$ en la métrica de $C^2_{[a,b]}$. Luego $C^2_{[a,b]}$ no es completo.

Definición 4.46 *Sea sucesión de esferas (bolas cerradas) $(S_n(x_n,r_n))_n$, $S_n(x_n,r_n) \subset \mathbb{X}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tales que*

$$S_1(x_1,r_1) \supset S_2(x_2,r_2) \supset \cdots \supset S_n(x_n,r_n) \supset S_{n+1}(x_{n+1},r_{n+1}) \supset \cdots .$$

se denomina sucesión de esferas (cerradas) encajadas.

Teorema 4.47 (De las esferas encajadas) *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico. $\mathbb{X}$ es completo si y sólo si, cualquier sucesión de esferas encajadas cuyos radios tiendan a cero ($r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) tiene intersección no vacía, i.e., $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n,r_n) \neq \emptyset$.*

Un ejemplo de aplicación es el espacio métrico $\mathbb{R}$. Como sabemos $\mathbb{R}$ es completo, luego toda sucesión de esferas encajadas, en este caso los intervalos cerrados $[x_n - r_n, x_n + r_n]$, tales que $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ es tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_n - r_n, x_n + r_n] \neq \emptyset$, que es precisamente el Teorema de Cantor de los intervalos encajados en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4.48 *Prueba que si $\mathbb{X}$ es completo, entonces la $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n,r_n)$ contiene un único punto.*

Definición 4.49 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación inyectiva del espacio métrico $(\mathbb{X},\rho)$ al espacio métrico $(\mathbb{Y},\sigma)$. Diremos que T es una isometría si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \qquad \rho(x_1,x_2) = \sigma(Tx_1, Tx_2).$$

Esto tiene una implicación muy importante: Si dos espacios son isométricos, entonces las distancias de los elementos originales y de sus imágenes según T son las mismas, es decir los espacios sólo difieren por la naturaleza del conjunto $\mathbb{X}$ pero son *idénticos* según la métrica. En particular los conceptos *topológicos* (entorno, cercanía, etc) son los equivalentes en ambos espacios.

Definición 4.50 *Sea $(\mathbb{X},\rho)$ un espacio métrico y sea $(\overline{\mathbb{X}},\rho)$ su clausura. Llamaremos completamiento de $\mathbb{X}$ al espacio métrico $\mathbb{X}^*$ tal que $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^*$ y $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$.*

Por ejemplo, el conjunto de todos los reales $\mathbb{R}$ es el completamiento del conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 4.51 *¿Cuál es el completamiento del espacio $(0,1)$ discutido anteriormente?*

Teorema 4.52 *Todo espacio métrico $(\mathbb{X},\rho)$ tiene un completamiento. Dicho completamiento es único salvo isometrías. Es decir, si $\mathbb{X}^*$ y $\mathbb{X}^{**}$ son dos completamientos de $\mathbb{X}$, entonces existe una aplicación $T : \mathbb{X}^* \mapsto \mathbb{X}^{**}$, $x^{**} = Tx^*$ tal que $Tx = x$ para todo $x \in \mathbb{X}$ y $\rho^*(x^*,y^*) = \rho^{**}(Tx^*,Ty^*)$.*

4.5. Espacios métricos separables

Definición 4.53 *Un subconjunto* $M \subset \mathbb{X}$ *es denso en* $\mathbb{X}$ *si su clausura* $\overline{M} = \mathbb{X}$.

De la definición anterior se infiere que si M es denso $\mathbb{X}$ entonces cualquiera sea la bola $B(x, \epsilon)$ (por pequeño que sea $\epsilon > 0$) siempre contiene puntos de M. En otras palabras, cualquiera sea $x \in \mathbb{X}$, siempre tiene elementos de M tan cerca como se quiera.

Por ejemplo $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ pues como ya hemos visto $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Definición 4.54 *Un espacio métrico* $\mathbb{X}$ *es separable si contiene un subespacio numerable*[5] $M \subset \mathbb{X}$ *denso en* $\mathbb{X}$.

Así pues, $\mathbb{R}$ es separable pues $\mathbb{Q}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4.55 *Prueba que* $\mathbb{C}$ *es separable.*

Ejemplo 4.56 *Estudia la separabilidad del espacio métrico trivial del ejemplo 4.2*

Es evidente que por la naturaleza de la métrica del espacio del ejemplo 4.2 este espacio no puede ser separable pues no en cualquier entorno de $x \in \mathbb{X}$ hay puntos de M (basta escoger $\epsilon = 1/2$, por ejemplo), a no ser que M sea el propio $\mathbb{X}$. En otras palabras, el único posible subconjunto denso de $\mathbb{X}$ es el propio $\mathbb{X}$, así que $\mathbb{X}$ es separable si y sólo si $\mathbb{X}$ es numerable.

Ejemplo 4.57 *Prueba que* l^∞*, el espacio del ejemplo 4.11, no es separable.*

Sea $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ una sucesión de ceros y unos. Obviamente $y \in l^\infty$. Si a cada y le asociamos un número real que en base dos tenga la forma $r = y_1/2 + y_2/2^2 + \cdots + y_n/2^n + \cdots$, entonces acabamos de establecer una relación biunívoca entre los números reales del intervalo $[0, 1]$ y el conjunto de Y de todas las sucesiones de ceros y unos. Como $[0, 1]$ no es numerable, Y tampoco lo es. Sean dos sucesiones y e y' cualesquiera de Y. Obviamente (¿por qué?) $\rho(y, y') = 1$ si $y \neq y'$ y $\rho(y, y') = 0$ si $y = y'$. Sean $y \neq y'$ los centros de sendas bolas de radio $1/3$ cada una. Obviamente dichas bolas no tienen puntos en común. Así pues, el conjunto de todas las bolas con centro en algún $y \in Y$ y radio $1/3$ no tiene puntos en común. Sea M cualquier conjunto denso en l^∞. Entonces, en cada una de las bolas anteriores debe haber al menos un elemento de M, luego M no es numerable (el conjunto de las bolas no lo es) y como M era arbitrario, entonces l^∞ no tiene ningún conjunto numerable denso, así que l^∞ no es separable.

4.6. Aplicaciones de contracción y el Teorema del punto fijo

Definición 4.58 *Sea* $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *una aplicación. Si existe un* $\alpha \in (0, 1)$ *tal que*

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Longrightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y),$$

diremos que T *es una aplicación de contracción.*

Ejercicio 4.59 *Prueba que toda aplicación de contracción es continua.*

Definición 4.60 *Sea* $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *una aplicación. El punto* $x \in \mathbb{X}$ *se denomina punto fijo de* T *si* $Tx = x$.

[5] Un conjunto M cualquiera se denomina *numerable* si se puede poner en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de M y los números naturales. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es numerable, pero $\mathbb{R}$ no lo es.

Teorema 4.61 (Del punto fijo) *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico completo y $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación de contracción. Entonces T tiene un único punto fijo.*

Como ejemplo *sencillo* consideremos las funciones reales en $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ tales que para todos x_1 e x_2 de $[a, b]$ se satisface la condición de Lipschitz

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \qquad K \in (0, 1).$$

Entonces, f es una aplicación de contracción y por el Teorema del punto fijo la sucesión

$$x_0, \quad x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad \ldots$$

converge a un único límite x tal que $x = f(x)$. En particular, f satisface la condición de Lipschitz si f es diferenciable y $|f'(x)| \leq K < 1$ en $[a, b]$.

4.7. Sucesiones y series de funciones

Definición 4.62 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de aplicaciones $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y sea $M \subset \mathcal{D}(T)$. Diremos que T_n converge puntualmente en M a $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, si para todo $x \in M$ la sucesión $(T_n x)_n$ es convergente, i.e., para cada $x \in M$ $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx = y$.*

En otras palabras

$$\forall \epsilon > 0 \quad \text{y} \quad \forall x \in M, \quad \exists N := N(\epsilon, x) \in \mathbb{N}; \quad \forall n > N, \quad \Longrightarrow \rho(T_n x, Tx) < \epsilon.$$

Está claro de la definición anterior que el número N depende no sólo del valor de ϵ sino también del punto x. Para diferentes x tendremos en general diferentes N.

Definición 4.63 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de aplicaciones $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y sea $M \subset \mathcal{D}(T)$. Diremos que T_n converge uniformemente en M a $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N := N(\epsilon) \in \mathbb{N}; \quad \forall n > N, \quad y \quad \forall x \in M, \quad \Longrightarrow \rho(T_n x, Tx) < \epsilon.$$

Es decir, fijado el $\epsilon > 0$, podemos escoger un N tal que la desigualdad $\rho(T_n x, Tx) < \epsilon$ es cierta en todo el subconjunto M.

4.8. Problemas

Problema 4.1

Prueba la desigualdad de Young: Dados dos números reales $a, b > 0$ y $p > 1$, entonces,

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4.1}$$

Además la igualdad sólo tiene lugar si $a = b$. **Ayuda**: Encuentra los extremos de la función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, $\alpha \in (0, 1)$ y prueba que $f(x) \leq 0$ para todo $x \geq 0$. Escogiendo $x = a/b$, $a, b > 0$ y $\alpha = 1/p$, $p > 1$ se deduce el resultado.

Problema 4.2

Prueba la desigualdad de Hölder: Sean los números x_i e y_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ y $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.2}$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i^p = c \, y_i^q$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (es decir si x_i^p y y_i^q son proporcionales). **Ayuda**: Usa la desigualdad de Young.

Problema 4.3

Prueba la desigualdad de Minkowski: Seas los números x_i e y_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.3}$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i = c \, y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (es decir si x_i y y_i son proporcionales). **Ayuda**: Usa la desigualdad de Hölder.

Problema 4.4

Encontrar los extremos de la función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, con $\alpha > 1$ o $\alpha < 0$ y probar que $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. Deduce a partir de este resultado las desigualdades análogas a las desigualdades de Young (4.1), de Hölder (4.2) y Minkowski (4.3), respectivamente.

Problema 4.5

Extiende a las series infinitas las desigualdades de Hölder (4.2) y Minkowski (4.3), respectivamente.

Problema 4.6

Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$. Usando la desigualdad de Young (4.1) prueba las desigualdades de Hölder

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4.4}$$

y Minkowski

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1. \tag{4.5}$$

¿Son ciertas estas igualdades si f y g son integrables?

Problema 4.7

Sea M un subespacio no vacío de un espacio métrico $\mathbb{X}$, y sea $\overline{M}$ su clausura. Entonces

1. $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M, i.e., $\forall n,\ x_n \in M$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

2. M es cerrado si y sólo si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ implica que $x \in M$.

Problema 4.8

Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico y sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente. Prueba que

1. $(x_n)_n$ es acotada.
2. El límite de $(x_n)_n$ es único.
3. Si $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, entonces $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$.

Problema 4.9

Prueba que una aplicación $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es continua si y sólo si cualquiera sea la sucesión $(x_n)_n$ con $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, la sucesión $(Tx_n)_n$ converge a Tx, i.e., $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$.

Problema 4.10

Sea $(x_n)_n$ una sucesión fundamental (de Cauchy) de elementos cualquiera de un espacio métrico $\mathbb{X}$. Sea $(x_{n_k})_k$ una subsucesión de $(x_n)_n$. Prueba que si $(x_{n_k})_k$ converge a x, entonces $(x_n)_n$ también converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Problema 4.11

Prueba que el espacio métrico trivial del ejemplo 4.2 es completo.

Problema 4.12

Prueba que los espacios métricos de los ejemplos 4.5–4.7 son completos. ¿Y el del ejemplo 4.8?

Problema 4.13

Prueba que los espacios métricos definidos en el ejemplo 4.5–4.7 y 4.12 son separables. **Ayuda**: Usa los subespacios definidos mediante los vectores $y = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $q_k \in \mathbb{Q}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ para los espacios de los ejemplos 4.5–4.7 y los subespacios definidos por los vectores $y = (q_1, q_2, \ldots, q_n, 0, 0, \ldots)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, en el espacio del ejemplo 4.12 y prueba que son numerables y densos en los correspondientes espacios métricos.

Problema 4.14 Prueba que el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica discreta (ver ejemplo 4.2) no es separable.

Problema 4.15 Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico separable y sea $M \subset \mathbb{X}$. Prueba que M también es separable.

Problema 4.16

Estudia bajo que condiciones la aplicación $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ definida por el sistema de ecuaciones

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

es de contracción en los siguientes casos

1. Si usamos la métrica del ejemplo 4.5.
2. Si usamos la métrica del ejemplo 4.6
3. Si usamos la métrica del ejemplo 4.8

Problema 4.17 Utiliza el Teorema del punto fijo para probar que si $f(x, y)$ es continua en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0) y satisface la condición de Lipschitz en y, i.e.,

$$\exists K > 0;\ \forall x, y, \tilde{y} \in \Omega,\ |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq K|y - \tilde{y}|,$$

entonces existe un δ-entorno de x_0, donde el problema de valores iniciales

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

tiene solución única.

Problema 4.18 Sea la ecuación integral de Fredholm de 2º tipo

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x),$$

donde el *núcleo* $K(x, y)$ de la ecuación integral y g son funciones conocidas y continuas en el cuadrado definido por las desigualdades $a \leq x \leq b$ y $a \leq y \leq b$. Prueba que en el espacio $C_{[a,b]}$ con la métrica $\rho(f, g) = \text{máx}_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ (ver ejemplo 4.9) la ecuación anterior tiene una única solución si $|\lambda| < (M(b - a))^{-1}$, donde M es el máximo de la función $K(x, y)$. **Ayuda:** Utiliza el Teorema del punto fijo.

5. Espacios normados y espacios de Banach

5.1. Espacios vectoriales

Definición 5.1 *Sea $\mathbb{V}$ un conjunto de elementos cualesquiera y $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$. Definiremos en $\mathbb{V}$ las operaciones* suma "+" *de dos elementos x, y de $\mathbb{V}$ y* multiplicación "·" *de un elemento de $\mathbb{V}$ por un número (real o complejo) $\alpha \in \mathbb{K}$ por un elemento de $\mathbb{V}$. Diremos que $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (real o complejo si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, respectivamente), si se cumplen las siguientes propiedades (axiomas):*

1. *Para todos x e y,* vectores *de $\mathbb{V}$, el vector suma, $w = x + y$, también es un vector de $\mathbb{V}$ y para todos $x, y, z \in \mathbb{V}$ se cumple que:*

   a) $x + y = y + x$

   b) $(x + y) + z = x + (y + z)$

   c) *Existe un elemento "nulo" de $\mathbb{V}$, tal que $x + 0 = 0 + x = x$*

   d) *Cualquiera sea el vector x de $\mathbb{V}$, existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

2. *Para todo x* vector *de $\mathbb{V}$, el vector que se obtiene al multiplicar por un escalar, $w = \alpha \cdot x$, también es un vector de $\mathbb{V}$ y para todos $x, y \in \mathbb{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se cumple que:*

   a) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

   b) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

   c) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

   d) $1 \cdot x = x$

Ejemplos.

1. El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándard.

2. El conjunto de las matrices $m \times n$ cuando la suma de dos matrices y la multiplicación por un escalar es la estándard. Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}^{m \times n}$.

3. El conjunto de los polinomios reales[6] de grado a lo sumo n, que denotaremos por $\mathbb{P}_n$, o sea,
$$\mathbb{P}_n = \{p_n(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n, \quad a_0, ..., a_n \text{ números reales.}\},$$
donde definiremos la suma de dos polinomios y la multiplicación por un escalar de la siguiente forma:
$$p(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n, \quad q(x) = b_0 + b_1\, t + \cdots + b_n\, t^n,$$
$$(p + q)(t) := p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$
$$(\alpha \cdot p)(t) := \alpha\, p(t) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + \cdots + (\alpha a_n)t^n.$$
Además, $p_n = 0$, si y sólo si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

[6] De forma totalmente análoga se puede definir para el caso complejo.

4. El conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, que denotaremos por $C_{[a,b]}$, cuando la suma de dos funciones f y g y la multiplicación por un escalar α están dadas por
$$(f + g)(t) := f(t) + g(t), \qquad (\alpha \cdot f)(t) := \alpha \cdot f(t).$$

Definición 5.2 *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto $H \subset \mathbb{V}$ de elementos de $\mathbb{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones* suma "+" *y* multiplicación "·" *que $\mathbb{V}$.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = \mathbb{V}$ (el mismo espacio vectorial).

2. Para $\mathbb{V} = C_{[a,b]}$, $H = \mathbb{P}_n$ es un subespacio vectorial, para cualquier $n = 0, 1, 2, ...$ entero no negativo.

3. Para $\mathbb{V} = \mathbb{P}_n$, $H = \mathbb{P}_k$ es un subespacio vectorial para todo $k < n$.

Ejercicio 5.3 *Prueba que el espacio l^p de las sucesiones (ver ejemplos 4.11 y 4.12) son espacios vectoriales.*

Teorema 5.4 *Un subconjunto H de elementos de $\mathbb{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si y sólo si se cumple*[7] *que para todos x e y,* vectores *de H y α, $\beta \in \mathbb{K}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

La demostración es inmediata de la definición de subespacio vectorial.

Definamos ahora la envoltura lineal $\operatorname{span}(v_1, v_2, ..., v_p)$ de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales de dichos vectores:
$$\operatorname{span}(v_1, v_2, ..., v_p) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_k \;\middle|\; \alpha_k \in \mathbb{K},\ k = 1, 2, \dots, p \right\}.$$

Usando el teorema anterior se deduce el siguiente

Teorema 5.5 *Dado un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, el conjunto* $\operatorname{span}(v_1, v_2, ..., v_p)$ *es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$. Dicho subespacio vectorial comúnmente se denomina subespacio generado por los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.*

Conjuntos linealmente independientes. Bases.

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se denomina linealmente independiente si la ecuación vectorial
$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0,$$
tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

[7] Usualmente se impone además que el elemento nulo de $\mathbb{V}$ pertenezca a H, pero eso se deduce de la condición $w = \alpha x + \beta y \in H$ tomando $\alpha = \beta = 0$.

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ se denomina linealmente dependiente si existen los valores $x_1, x_2, \cdots, x_p$ no todos iguales a cero tales que se verifique la ecuación vectorial

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_pv_p = 0.$$

Se dice que un conjunto infinito de vectores es linealmente independiente si cualquier subsistema finito del mismo es linealmente independiente. En caso contrario se dice que el sistema es dependiente.

Las siguientes propiedades se pueden verificar fácilmente:

1. *Un conjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ de dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los demás.*

2. *Un conjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ de dos o más vectores de $\mathbb{V}$ con alguno de los vectores $v_i = 0$ $(1 \le i \le p)$ es necesariamente un conjunto de vectores linealmente dependientes, o sea si alguno de los vectores de S es el vector nulo entonces S es un conjunto de vectores linealmente dependientes.*

3. *Dos vectores v_1 y v_2 de $\mathbb{V}$ son linealmente dependientes si y sólo si son proporcionales, es decir, si existe un número real α tal que $v_1 = \alpha v_2$ o $v_2 = \alpha v_1$*

Los vectores linealmente independientes de un espacio vectorial juegan un papel fundamental en el estudio de los sistemas lineales gracias a la siguiente definición:

Definición 5.6 *Dado un subespacio vectorial H del espacio vectorial $\mathbb{V}$ diremos que el conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de $\mathbb{V}$ es una base de H si*

i) B es un conjunto de vectores linealmente independientes

ii) $H = \operatorname{span}(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.

En particular si H coincide con $\mathbb{V}$, entonces B es una base de todo el espacio vectorial $\mathbb{V}$.

Por ejemplo, si tomamos una matriz $n \times n$ invertible, entonces sus columnas $a_1, ..., a_n$ son linealmente independientes y además $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$. En particular, si $A = I_n$, la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son una base de $\mathbb{R}^n$ la cual se conoce como base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Otro ejemplo lo constituye el conjunto de vectores $S = \{1, t, t^2, ..., t^n\}$ del espacio vectorial $\mathbb{P}_n$. Es fácil comprobar que dichos vectores son linealmente independientes y que $\operatorname{span}(1, t, t^2, ..., t^n) = \mathbb{P}_n$. S se conoce como la base canónica de $\mathbb{P}_n$.

El siguiente teorema es de gran importancia en las aplicaciones.

Teorema 5.7 *Si un espacio vectorial $\mathbb{V}$ tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de $\mathbb{V}$ es linealmente dependiente. Más aún, si un espacio vectorial $\mathbb{V}$ tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de $\mathbb{V}$ tendrá que tener n vectores de $\mathbb{V}$.*

Por tanto el menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio. Dicho número se denomina *dimensión del espacio vectorial.*

Un espacio vectorial es de dimensión finita n si $\mathbb{V}$ está generado por una base de n elementos, es decir si $\mathbb{V} = \operatorname{span}(b_1, ..., b_n)$, donde $B = \{b_1, ..., b_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y lo escribiremos de la forma $\dim V = n$. En el caso que $\mathbb{V} = \{0\}$ sea el espacio vectorial nulo, $\dim\{0\} = 0$. Si $\mathbb{V}$ no puede ser generado por una base finita de vectores, entonces diremos que $\mathbb{V}$ es de dimensión infinita y lo denotaremos por $\dim V = \infty$.

Por ejemplo, $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$, $\dim C_{[a,b]} = \infty$ y $\dim l^p = \infty$.

5.2. Espacios normados y de Banach

Definición 5.8 *Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ se denomina espacio normado si $\forall x \in \mathbb{X}$ existe un número real denominado norma, y que denotaremos por $\|x\|$, que cumple con las condiciones*

1. *Para todo $x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ y si $\|x\| = 0$ entonces $x = 0$.*
2. *Para todo $x \in \mathbb{X}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,*
3. *Para todos $x, y \in \mathbb{X}$ se tiene la desigualdad triangular*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{5.1}$$

Es evidente que si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos la función $\rho(x, y) = \|x - y\|$, esta satisface los axiomas de la definición 4.1, i.e., todo espacio normado es un espacio métrico. La función ρ anterior se denomina métrica inducida por la norma.

Definición 5.9 *Un espacio normado completo (en la métrica inducida por la norma) se denomina espacio de Banach.*

5.3. Ejemplos

Ejemplo 5.10 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *($\mathbb{C}^n$), es decir el espacio de las n-tuplas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$, es un espacio de Banach.*

Ejercicio 5.11 *¿Qué ocurre con $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) si usamos las normas $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$? ¿Y con la norma $\|x\| = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$?*

Ejemplo 5.12 *Sea $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a, b]$ y definamos la norma $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$. Este espacio es un espacio normado pero no de Banach (¿por qué?).*

Ejemplo 5.13 *Sea $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a, b]$. Definamos la norma $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Este espacio es un espacio de Banach.*

Ejemplo 5.14 *Sea ahora $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ reales (o complejas) tales que $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < +\infty$ con la norma $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$. Dicho espacio lo denotaremos por l^p y es un espacio de Banach.*

Ejercicio 5.15 *Decide si el espacio $\mathbb{X}$ de todas las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ acotadas con la métrica $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$, es un espacio de Banach.*

Una pregunta inmediata es si el recíproco es cierto, es decir, si todo espacio métrico es normado.

Ejemplo 5.16 *Sea ahora $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ con la métrica (ver ejemplo 4.13)*

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

Esta métrica no puede ser inducida por ninguna norma ya que de ella nunca podremos obtener la propiedad 2 de la norma.

Lema 5.17 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones*

1. $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\rho(x, y)$.

Obviamente en los espacios normados podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.. Basta considerarlos como espacios métricos con la métrica ρ inducida por la norma: $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Lo interesante es que, a diferencia de los espacios métricos, en los espacios normados al tener una estructura algebraica podemos definir las series:

Definición 5.18 *Dada una sucesión de elementos $(x_n)_n$ de un espacio normado $\mathbb{X}$ definiremos la sucesión de sumas parciales $(s_n)_n$*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si s_n converge (en norma) a cierto $s \in \mathbb{X}$, cuando $n \to \infty$, diremos que la serie es convergente en $\mathbb{X}$ y s es su suma. Si converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$, diremos que la serie converge absolutamente.

Teorema 5.19 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach (normado y completo). Entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.*

El teorema anterior no es cierto si $\mathbb{X}$ no es completo.

Ejercicio 5.20 *Prueba que si $\mathbb{X}$ es un espacio normado, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente si y sólo si $\mathbb{X}$ es completo.*

Definición 5.21 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y sea M un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$. Si M es un espacio normado con la norma de $\mathbb{X}$ restringida a M se dice que M es un subespacio de $\mathbb{X}$. Si M es cerrado en $\mathbb{X}$ entonces se dice que es un subespacio cerrado.*

Definición 5.22 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Sea $(e_n)_n$ una sucesión de elementos de $\mathbb{X}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{X}$, existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_n$ tales que $\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dicha sucesión se denomina base de Schauder.*

Por ejemplo en l^p, la sucesión $e_k = \delta_{i,k}$, i.e., la sucesión de vectores de l^p con 1 en la posición k y 0 en el resto es una base de Schauder.

Ejercicio 5.23 *Prueba que si un espacio normado $\mathbb{X}$ tiene una base de Schauder, entonces es separable.*

El recíproco no es cierto en general. Enflo en 1973 encontró un espacio de Banach, separable que no tiene ninguna base de Schauder.

Una consecuencia directa del Teorema 4.52 es el siguiente teorema:

Teorema 5.24 *Sea $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espacio normado. Entonces existe un espacio de Banach $\widehat{\mathbb{X}}$ y una isometría A de $\mathbb{X}$ en $W \subset \widehat{\mathbb{X}}$, tal que W es denso en $\widehat{\mathbb{X}}$. Además, $\widehat{\mathbb{X}}$ es único excepto isometrías.*

5.4. Espacios normados de dimensión finita

Comenzaremos con un lema técnico.

Lema 5.25 *Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ linealmente independientes de un espacio normado $\mathbb{X}$. Entonces, existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \tag{5.2}$$

Demostración: Sea $s = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Si $s = 0$ el lema es trivial así que asumiremos $s > 0$. Dividiendo por s 5.2 se sigue que 5.2 es equivalente a probar que si $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes, entonces existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los los escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$, con $\sum_{k=1}^n |\beta_k| = 1$

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geq c.$$

Supongamos que la desigualdad anterior es falsa. Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^n |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^n |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas. Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_1^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$. Escojamos de cada una de las sucesiones restantes $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 2, \ldots, n$, las subsucesiones definidas por los índices m_j de antes. Entonces la sucesión $(\beta_2^{(m_j)})_j$ es acotada y por Bolzano-Weierstrass de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_2^{(j_l)} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_2$. Además, si escogemos los índices j_l definidos por esta sucesión, la subsucesión $(\beta_1^{(j_l)})_j \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$ (¿por qué?). Continuando este proceso n veces tenemos que existe una subsucesión de índices l_i tales que $\beta_k^{(l_i)} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k$ para todos los $k = 1, 2, \ldots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ tal que

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^n \beta_k^{(l_i)} x_k, \qquad \beta_k^{(l_i)} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k.$$

Luego

$$\lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k := y \text{ y } \sum_{k=1}^n |\beta_k| = 1.$$

De lo anterior se sigue que no todos los β_k pueden ser ceros al mismo tiempo. Como los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes entonces $y \neq 0$ (¿por qué?). Ahora bien, como la norma es una aplicación continua (ver problema 5.2), entonces se tiene

$$\lim_{i\to\infty} y_{l_i} = y \quad \Longrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = \|y\|,$$

pero como $\|y_m\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces $\lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = 0$, luego $\|y\| = 0$ de donde se sigue que $y = 0$ lo cual es una contradicción. □

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema 5.26 *Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.*

Corolario 5.27 *Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado $\mathbb{X}$ es cerrado en $\mathbb{X}$.*

Definición 5.28 *Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial $\mathbb{X}$ es equivalente a otra norma $\|\cdot\|'$ si existen dos números reales a, b positivos ($a > 0$, $b > 0$) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$*

$$a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'.$$

Ejercicio 5.29 *Prueba que toda sucesión de Cauchy en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ también lo es en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|')$, y viceversa.*

Teorema 5.30 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.*

Es decir, en cualquier espacio normado de dimensión finita la convergencia (o divergencia) de sucesiones es independiente de la norma.

Definición 5.31 *Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina compacto si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.*

Entenderemos que $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto como subconjunto de $\mathbb{X}$, i.e., cualquier $(x_n)_n$ de elementos de M tiene una subsucesión convergente en M.

Lema 5.32 *Si $M \subset \mathbb{X}$ es compacto, entonces M es cerrado y acotado.*

El recíproco es falso. Por ejemplo escojamos $\mathbb{X} = l^2$ y sea el conjunto M de los vectores $e_k = \delta_{k,i}$, i.e., vectores que todas las coordenadas son cero excepto la k-ésima que es 1. Obviamente $\|e_k\| = 1$. Además todos los puntos de M son aislados (¿por qué?), por tanto M es cerrado. Ahora bien, como M solo tiene puntos aislados, M no tiene ningún punto de acumulación por lo tanto ninguna sucesión que escojamos de elementos distintos de M contiene una subsucesión convergente.

Teorema 5.33 *En un espacio normado $\mathbb{X}$ de dimensión finita, todo subconjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Ejercicio 5.34 *Prueba que el espacio métrico discreto del ejemplo 4.2 constituido por infinitos puntos no es compacto.*

Recordemos la definición 4.30: Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset (\mathbb{X}, \rho) \mapsto (\mathbb{Y}, \sigma)$ es continua en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ con $\rho(x, x_0) < \delta$ es tal que $\sigma(Tx, Tx_0) < \epsilon$. Equivalentemente, una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset (\mathbb{X}, \rho) \mapsto (\mathbb{Y}, \sigma)$ es continua en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si toda sucesión $(x_n)_n$ con $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx_0$. Una aplicación es continua en $M \subset \mathcal{D}(T)$ si es continua en todo $x \in \mathcal{D}(T)$.

Teorema 5.35 *Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset (\mathbb{X}, \rho) \mapsto (\mathbb{Y}, \sigma)$ continua en el compacto $M \subset \mathcal{D}(T)$. Entonces la imagen $T(M)$ de M, también es un conjunto compacto. I.e., las aplicaciones continuas transforman compactos en compactos.*

Corolario 5.36 *Sea una aplicación continua $T : M \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ de un compacto M en los reales. Entonces T alcanza su máximo y su mínimo.*

Este corolario es una generalización del teorema de Weierstrass para las funciones continuas.

5.5. Aplicaciones lineales

En este apartado trabajaremos con un caso particular de las aplicaciones discutidas en el apartado **4.3**. Como allí $\mathcal{D}(T)$ denotará el dominio de la aplicación T e $\mathcal{I}(T)$ la imagen de T. Asumiremos que los espacios $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$) y que tenemos el operador $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$.

Definición 5.37 *Una aplicación (operador) $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es lineal si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T), \qquad T(\alpha z + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Veamos algunos ejemplos de operadores lineales:

Ejemplo 5.38 *Se operador identidad $I : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $y = Ix = x$ para todo $x \in \mathbb{X}$.*

Ejemplo 5.39 *Se operador nulo $\Theta : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $y = \Theta x = 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$.*

Ejemplo 5.40 *Sea $\mathbb{P}$ el espacio de los polinomios reales $p(t)$ (o complejos) de cualquier grado. Definamos el operador $D : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}$, $y(t) = Dp(t) = p'(t)$ que denominaremos operador derivación (o derivada).*

Ejemplo 5.41 *Sea $C_{[a,b]}$ el espacio de las funciones continuas $f(t)$. Definamos el operador $S : C_{[a,b]} \mapsto C_{[a,b]}$, $y(t) = Sf(t) = tf(t)$ que denominaremos operador multiplicación por t.*

Ejemplo 5.42 *El operador $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $y = Tx = A \cdot x$, donde A es una matriz $n \times m$, x e y son los correspondientes vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente, y $\cdot$ denota la multiplicación usual de matrices.*

Definición 5.43 *Llamaremos espacio nulo o núcleo de T al espacio $\mathcal{N}(T)$ de todos los vectores $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = 0$.*

Teorema 5.44 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal. Entonces*

1. *$\mathcal{I}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Y}$.*
2. *Si $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, entonces $\dim \mathcal{I}(T) \geq n$.*
3. *$\mathcal{N}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}(T)$.*

Teorema 5.45 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal con $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ y $\mathcal{I}(T) \subset \mathbb{Y}$. Entonces*

1. *Existe la aplicación inversa T^{-1} de T, si y sólo si $Tx = 0$ implica $x = 0$.*

2. *Si existe T^{-1}, entonces T^{-1} es lineal.*

3. *Si T es invertible y $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, entonces $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathcal{D}(T) = n$.*

Ejercicio 5.46 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal y supongamos que $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y} = n < \infty$. Prueba que $\mathcal{I}(T) = \mathbb{Y}$ si y sólo si T^{-1} existe. Este resultado no es cierto para dimensión infinita. En efecto, sea $\mathbb{X}$ el conjunto de las funciones infinitamente derivables en $\mathbb{R}$. Sea $D : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $y(t) = Dx(t) = x'(t)$ (derivada). Prueba que $\mathcal{I}(T) = \mathbb{X}$ pero no existe T^{-1}.*

Definición 5.47 *Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios normados y sea el operador $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathbb{Y}$ lineal. T es acotado si existe $c \geq 0$ tal que*[8]

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T). \tag{5.3}$$

De lo anterior se sigue que si T es acotado, entonces para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T),\ x \neq 0. \tag{5.4}$$

El menor valor de c para el cual (5.3) se cumple lo denotaremos por $\|T\|$ y se denomina *norma del operador* lineal T. Tomando supremos en $x \neq 0$ en (5.4) e ínfimos en c tenemos

$$\sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|.$$

Por otro lado, para todo $y \neq 0$

$$\frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} := c',$$

luego $\|Ty\| \leq c'\|y\|$ por lo tanto

$$\|T\| = \inf\{c : \|Ty\| \leq c\|y\|, \quad \forall y \in \mathbb{X}\} \leq c' = \sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

de donde se sigue que

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{5.5}$$

Si $T = 0$ obviamente $\|T\| = 0$. Además de (5.3), tomando ínfimos en c se tiene

$$\forall y \in \mathbb{X}, \quad \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \|T\| \quad \Longleftrightarrow \quad \|Ty\| \leq \|T\|\|y\|.$$

Ejercicio 5.48 *Prueba que $\|T\|$ es una norma, es decir se cumplen los axiomas de la definición 5.8, i.e., efectivamente $\|T\|$ es una norma.*

---

[8] Se sobrentiende que $\|x\|$ es la norma en $\mathbb{X}$ y $\|Tx\|$ es en $\mathbb{Y}$.

Ejemplo 5.49 *El operador I del ejemplo 5.38 es acotado y $\|I\| = 1$. El operador Θ del ejemplo 5.39 es acotado y $\|\Theta\| = 0$. El operador D del ejemplo 5.40 es no acotado. En efecto, escojamos el espacio $\mathbb{P}$ en $J = [0, 1]$ e introduzcamos la norma $\|p\| = \max_{t\in J} |p(t)|$. Como $Dp(t) = p'(t)$, entonces si escogemos la sucesión $p_n(t) = t^n$, $\|p_n\| = 1$, tenemos $\|Dp_n\| = n$ luego*

$$\frac{\|Dp_n\|}{\|p_n\|} = n$$

que obviamente no es acotada. Finalmente, para el ejemplo 5.42 de las matrices, si usamos por ejemplo la norma $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$, entonces

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \qquad c = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2},$$

donde a_{kj} son los elementos de la matriz A.

Ejercicio 5.50 *Decide si el operador del ejemplo de las matrices 5.42 es acotado si en vez de la norma anterior escogemos las normas $\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$. En caso de que sea acotado calcula su norma.*

Teorema 5.51 *Toda aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ de un espacio normado de dimensión finita $\mathbb{X}$ en otro espacio normado cualquiera $\mathbb{Y}$ es acotada.*

Teorema 5.52 *Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal de un espacio normado $\mathbb{X}$ a otro espacio normado $\mathbb{Y}$. Entonces*

1. *T es continuo si y sólo si T es acotado.*
2. *Si T es continuo en algún $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, T es continuo en $\mathcal{D}(T)$.*

5.6. Problemas

Problema 5.1 Prueba que los espacios $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{P}_n$ y $C_{[a,b]}$ son espacios vectoriales.

Problema 5.2 Prueba que para todos x, y de un espacio normado $\mathbb{X}$ se cumple la desigualdad $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Deduce de este resultado que la norma $\|\cdot\| : \mathbb{X} \mapsto [0, \infty)$ es una aplicación continua.

Problema 5.3 Prueba que el espacio l^∞ de las sucesiones acotadas $(x_n)_n$ con con la *norma* $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$ es un espacio normado. Demuestra que en este espacio el subespacio Y de las sucesiones con un número finito de términos no nulos no es cerrado en l^∞.

Problema 5.4 Prueba que los operadores de los ejemplos 5.38-5.42 son operadores lineales. Decide si el operador del ejemplo 5.41 es acotado.

Problema 5.5 Prueba que el operador $T : C^2_{[0,1]} \mapsto C^2_{[0,1]}$ con $y = Tx$ definido por

$$y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

con $k(t,\tau)$ continua (en la norma $C^2_{[0,1]}$) en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ es lineal y acotado y que

$$\|T\| \leq \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |k(t,\tau)|^2 dt d\tau}$$

Problema 5.6 Sean A, B dos operadores lineales y biyectivos $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, y $B : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{Z}$, $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ espacios vectoriales. Entonces existe el operador T inverso del operador $BA : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Z}$, $T = (BA)^{-1} : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{X}$ y $T = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Problema 5.7 Sean dos operadores A, B de $\mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach, lineales y acotados. Prueba que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. En particular, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Problema 5.8 Sea $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ el espacio de todas las aplicaciones lineales acotadas $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach. Dadas dos aplicaciones lineales $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$, definamos la aplicación $T : \mathcal{L}(\mathbb{X}) \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{X})$ por $TX = AXB$, $X \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Prueba que el operador T es lineal y acotado (respecto a la norma de operadores) y que $\|T\| \leq \|A\|\|B\|$.

6. Espacios de Hilbert

6.1. Espacios euclídeos y espacios de Hilbert

En adelante asumiremos que $\mathbb{E}$ es un espacio vectorial complejo, y por $\overline{z}$ denotaremos al complejo conjugado del número complejo z.

Definición 6.1 *Se dice que un espacio vectorial $\mathbb{E}$ es un espacio euclídeo si dados dos elementos cualesquiera $x, y \in \mathbb{E}$ existe un número denominado* producto escalar *y que denotaremos por $\langle x, y\rangle$ tal que*

1. *Para todo $x, y \in \mathbb{E}$, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.*
2. *Para todo $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.*
3. *Para todo $x, y \in \mathbb{E}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$*
4. *Para todo $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$, $\langle x, x\rangle > 0$ y si $\langle x, x\rangle = 0$, entonces $x = 0$.*

Ejercicio 6.2 *Prueba que como consecuencia de la definición anterior se tiene que*

1. *Para todos $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.*
2. *Para todos $x, y \in \mathbb{E}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$.*
3. *Para todo $x \in \mathbb{E}$, $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$.*
4. *Si $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ para todos los $z \in \mathbb{E}$, entonces $x = y$.*

Ejemplos: El ejemplo más sencillo de espacio euclídeo es el espacio $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar estándar: dados $x = (x_1, \dots, x_n)$, e $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

Obviamente este es un espacio de dimensión finita.

Otro ejemplo importante es l^2, el espacio de las sucesiones $(x_n)_n$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, donde si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Nótese que de la desigualdad de Hölder (ver problema 4.5) se sigue que dicho producto escalar esta bien definido.

Otro ejemplo es el espacio $C_{[a,b]}$ (que denotaremos por $C^2_{[a,b]}$) de las funciones continuas en $[a, b]$ cerrado y acotado con el siguiente producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{6.1}$$

Una propiedad importante de los espacios euclídeos es la desigualdad de Cauchy-Schwarz[9]

[9]Para los casos de $\mathbb{C}^n$, l^2 y $C_{[a,b]}$ discutidos antes esta desigualdad no es más que la desigualdad de Hölder.

Teorema 6.3 *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Entonces para todos $f, g \in \mathbb{E}$,*

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle. \tag{6.2}$$

Teorema 6.4 *Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es normado si en él definimos la norma mediante la fórmula $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Además, $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.*

La demostración se deja como ejercicio.

De lo anterior se sigue que todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es un espacio métrico con la métrica inducida por el producto escalar mediante la fórmula

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

Por ejemplo, en $\mathbb{C}^n$ tenemos que la norma inducida es

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

en l^2

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2},$$

y en $C_{[a,b]}$ la norma viene dada por

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

En los ejemplos anteriores la métrica inducida es la correspondiente a los ejemplos 4.5, 4.12 ($p = 2$) y 4.10 ($p = 2$) del apartado 4.

Ejercicio 6.5 *Prueba que, en la norma inducida por el producto escalar, las operaciones adición de vectores, multiplicación por un escalar y producto escalar de vectores son continuas, i.e., si $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ y $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$, entonces $x_n + y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x + y$, $\alpha_n x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha x$, y $\langle x_n, y_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle$.* ***Ayuda:*** *Usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.*

Definición 6.6 *Un espacio euclídeo $\mathbb{E}$ completo*[10] *se denomina espacio de Hilbert y lo denotaremos por $\mathbb{H}$.*

Definición 6.7 *Sea el sistema de vectores $(\phi_n)_n$ (finito o infinito) de un espacio euclídeo $\mathbb{E}$. Diremos que $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortogonal dos a dos si*

$$\langle \phi_n, \phi_m\rangle = \delta_{n,m}\|\phi_n\|^2. \tag{6.3}$$

Si además $\|\phi_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que el sistema es ortonormal.

[10] Es decir, un espacio $\mathbb{E}$ donde cualquier sucesión de Cauchy converge a un vector de $\mathbb{E}$ (en la norma inducida por el producto escalar).

Por ejemplo, el sistema de los vectores canónicos de $\mathbb{C}^n$ $(e_k)_{k=1}^n$, definido por

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\dots,0,0),\\ e_2 &= (0,1,0,\dots,0,0),\\ &\vdots\\ e_n &= (0,0,0,\dots,0,1). \end{aligned} \tag{6.4}$$

es un sistema ortonormal. Análogamente, el sistema $(e_k)_{k=1}^n$, definido por

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0,\dots),\\ e_2 &= (0,1,0,0,\dots),\\ e_n &= (0,0,1,0\dots),\\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.5}$$

es un sistema ortonormal de l^2. Finalmente, el sistema de funciones $\{1\} \cup \{\sin nx, \cos nx\}_{n=1}^\infty$ es un sistema ortogonal dos a dos de $C_{[-\pi,\pi]}$, i.e., del espacio euclídeo de las funciones continuas en $[-\pi,\pi]$, con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Ejercicio 6.8 *Prueba que si los vectores $x_1,\dots,x_n$ de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces son linealmente independientes.*

Teorema 6.9 *En un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ de cualquier conjunto de vectores linealmente independiente se puede construir un conjunto de vectores ortonormales (ortogonales).*

Para probar el teorema tomamos un sistema de vectores linealmente independiente $(\phi_n)_n$ de $\mathbb{H}$ cualquiera y definimos un nuevo sistema de vectores $(\psi_n)_{n=1}^\infty$

$$\tilde{\psi}_1 = \phi_1, \quad \tilde{\psi}_2 = \phi_2 + \alpha_{2,1}\psi_1, \quad \dots \quad \tilde{\psi}_n = \phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k}\psi_k,$$

de forma que las constantes $\alpha_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1,\dots,n-1$ sean tales que ψ_k sea ortogonal a todos los vectores ϕ_j, $j = 1,2,\dots,k-1$, anteriores. Es fácil comprobar por inducción que los coeficientes $\alpha_{n,k}$ son proporcionales a los productos escalares $\langle \phi_n, \psi_k\rangle$, $k = 1,2,\dots,n-1$. Para obtener la sucesión ortonormal sólo tenemos que dividir los $\tilde{\psi}_n$ por su norma.

El proceso anterior se denomina *proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.*

Nótese que del proceso anterior se sigue además que, para cada $n \geq 1$,

$$\tilde{\psi}_n = \phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k}\tilde{\psi}_k \Longrightarrow \phi_n = \tilde{\psi}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{n,k}\tilde{\psi}_k.$$

Luego,

$$\langle \tilde{\psi}_k, \tilde{\psi}_n\rangle = 0, \quad \forall k = 0,1,\dots n-1 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \phi_k, \tilde{\psi}_n\rangle = 0, \quad \forall k = 0,1,\dots n-1.$$

Usando lo anterior es fácil ver que $\tilde{\psi}_n$ admite la siguiente expresión explícita:

$$\tilde{\psi}_n = \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \phi_1 \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_{n-1} \rangle & \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle & \phi_n \end{vmatrix}. \tag{6.6}$$

Para ello basta notar que el producto escalar $\langle \phi_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, ya que el determinante resultante tiene dos columnas iguales. Nótese además que

$$\langle \tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n \rangle = \Delta_n,$$

donde Δ_n son los determinantes de Gram

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_2, \phi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{vmatrix}.$$

De lo anterior deducimos también que los ψ_n son un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{H}$ si y sólo si los $\Delta_n \neq 0$ (en nuestro caso $\Delta_n > 0$), para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nótese que los subespacios generados por los vectores $(\phi_n)_n$ y $(\psi_n)_n$ coinciden.

Teorema 6.10 *Si el espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es separable, entonces cualquier sistema ortogonal (ortonormal) de $\mathbb{E}$ es numerable.*

En adelante estudiaremos las propiedades de los espacios de Hilbert $\mathbb{H}$ separables. Nótese que, en virtud del teorema anterior, en estos espacios los sistemas ortogonales son numerables.

6.2. Espacios de Hilbert separables

En este apartado asumiremos que el espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es separable.

Definición 6.11 *Dado un vector $x \in \mathbb{H}$ definiremos la serie de Fourier respecto al sistema ortonormal $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ a la serie*

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \tag{6.7}$$

donde los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$c_n = \langle x, \phi_n \rangle, \quad \forall n \geq 1. \tag{6.8}$$

Teorema 6.12 *Sea H el subespacio lineal de $\mathbb{H}$ generado por los vectores $\{\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, i.e., $H = \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n)$. Entonces*

$$\min_{q \in H} ||x - q||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

donde c_k son los coeficientes definidos en (6.8) y se alcanza cuando q es la suma parcial de la serie de Fourier (6.7)

$$q = s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k.$$

Como corolario de lo anterior tenemos que

$$I_n = \|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2, \tag{6.9}$$

luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ converge y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = 0.$$

La desigualdad (6.9) se conoce como **desigualdad de Bessel**. Nótese que una condición necesaria y suficiente para que la serie de Fourier (6.7) converja a x (en norma) es que

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_n\rangle|^2.$$

Esta igualdad se denomina comúnmente **igualdad de Parseval** y es, en general, muy complicada de comprobar.

Definición 6.13 *Se dice que un sistema de vectores linealmente independientes* $(\phi_n)_n$ *es completo en* $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ *si para todo vector* $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ *y cualquiera sea* $\epsilon > 0$ *existe una combinación lineal* l_n*,*

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k \quad \textit{tal que} \quad \|x - l_n\| < \epsilon\,.$$

En otras palabras cualquier vector $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ se puede aproximar en norma tanto como se quiera mediante alguna combinación finita de vectores del sistema $(\phi_n)_n$. Esta definición es equivalente a decir que $\mathbb{X}$ el menor subespacio vectorial cerrado que contiene al conjunto $\phi_1, \phi_2, \ldots$ ($(\phi_n)_n$ genera a todo $\mathbb{X}$).

Definición 6.14 *Un sistema ortogonal (ortonormal) completo de* $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ *se denomina base ortogonal (ortonormal) de* $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$*.*

Por ejemplo, los sistemas $(e_k)_k$ definidos por (6.4) y (6.5) son bases completas de $\mathbb{C}^n$ y l^2, respectivamente.

Teorema 6.15 *Sea* $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y sea el sistema ortonormal de vectores* $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ *de* $\mathbb{H}$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $(\phi_n)_n$ *es completo en* $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$*.*

2. *Para todo* $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$*,* $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \phi_k\rangle \phi_k$*.*

3. *Para todo* $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$*, se cumple la igualdad de Parseval*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_k\rangle|^2.$$

4. Si $\langle x, \phi_k \rangle = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *entonces* $x = 0$.

Nota 6.16 *La equivalencia entre 1 y 2, así como las implicaciones* $2 \to 3 \to 4$*, son también ciertas para espacios euclídeos cualesquiera (no necesariamente completos).*

Corolario 6.17 *Sea el sistema ortonormal completo* $(\phi_n)_n$ *y sean* $x, y \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ *tales que* $\langle x, \phi_k \rangle = \langle y, \phi_k \rangle$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*, entonces* $x = y$.

En otras palabras, dos elementos de $\mathbb{H}$ con iguales coeficientes de Fourier son iguales, por tanto cualquier vector de $\mathbb{H}$ queda biunívocamente determinado por sus coeficientes de Fourier.

Definición 6.18 *Se dice que un sistema ortonormal* $(\phi_n)_n$ *es cerrado en un espacio euclídeo* $\mathbb{E}$ *si para todo vector* $x \in \mathbb{E}$ *se cumple la igualdad de Parseval*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

De la definición anterior y el teorema 6.15 se sigue que un un sistema ortonormal $(\phi_n)_n$ es completo en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ si y sólo si $(\phi_n)_n$ es cerrado en $\mathbb{H}$.

Teorema 6.19 *Todo espacio de Hilbert* $\mathbb{H}$ *separable tiene una base ortonormal.*

Demostración: Como $\mathbb{H}$ es separable, existe un conjunto numerable de vectores $(\phi_n)_n$ denso en $\mathbb{H}$. Si de dicho conjunto eliminamos aquellos vectores ϕ_k que se pueden obtener como combinación lineal de los anteriores ϕ_j, $j < k$ obtenemos un sistema completo de vectores linealmente independientes de $\mathbb{H}$. La base ortonormal se obtiene al aplicar a dicho sistema el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. ■

Este teorema anterior se puede generalizar a cualquier espacio euclídeo separable.

Teorema 6.20 (Riesz-Fischer) *Sea* $(\phi_n)_n$ *un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert* $\mathbb{H}$ *y sean los números* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

Entonces, existe un elemento $x \in \mathbb{H}$ *cuyos coeficientes de Fourier son precisamente los números* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$*, i.e.,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2, \qquad c_n = \langle x, \phi_n \rangle.$$

Definición 6.21 *Una aplicación* U *entre dos espacios de Hilbert* $\mathbb{H}$ *y* $\mathbb{H}^*$ *se denomina unitaria si* U *es lineal, biyectiva y preserva el producto escalar, i.e.*[11],

$$\langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle_* = \langle x^*, y^* \rangle_*.$$

Los espacios $\mathbb{H}$ *y* $\mathbb{H}^*$ *son isomorfos si existe una aplicación unitaria* $U : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}^*$ *tal que* $x^* = Ux$*, donde* $x \in \mathbb{H}$ *y* $x^* \in \mathbb{H}^*$.

[11] Se entiende que $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ denota el producto escalar en $\mathbb{H}^*$ que no tiene por que ser el mismo que en $\mathbb{H}$.

Como consecuencia de los Teoremas 6.15, 6.19 y 6.20 se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6.22 (del isomorfismo) *Cualquier espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ o a l^2.*

Definición 6.23 *Sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Denominaremos complemento ortogonal de M, y lo denotaremos por $M^\perp$, al conjunto*

$$M^\perp = \{x \in \mathbb{H};\ \langle x, y\rangle = 0,\ \ \forall y \in M\}.$$

Ejercicio 6.24 *Prueba que cualquiera sea $M \subset \mathbb{H}$ subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{E}$, $M^\perp$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{E}$.*

Nótese que al ser $M^\perp$ cerrado, es completo (pues $\mathbb{H}$ es completo).

Teorema 6.25 *Sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y $M^\perp$ su complemento ortogonal. Entonces, todo vector $x \in \mathbb{H}$ admite una única representación de la forma $x = y + y^\perp$ donde $y \in M$ e $y^\perp \in M^\perp$.*

6.3. Teoría espectral y operadores compactos autoadjuntos

Definición 6.26 *Sea la aplicación (operador) linear $A : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}'$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ espacios euclídeos. Si existe el operador lineal $A^* : \mathbb{E}' \mapsto \mathbb{E}$ tal que para todo $x \in \mathbb{E}$ e $y \in \mathbb{E}'$*

$$\langle Ax, y\rangle' = \langle x, A^* y\rangle,$$

lo denominaremos adjunto de A.

Por sencillez asumiremos $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$.

Por ejemplo sea el operador $S : l^2 \mapsto l^2$

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots),$$

comúnmente denominado *operador desplazamiento* (shift). Entonces su adjunto S^* es el operador $S : l^2 \mapsto l^2$

$$S^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots),$$

Ejercicio 6.27 *Sea el operador multiplicación $M : C^2_{[a,b]} \mapsto C^2_{[a,b]}$ definido por*

$$Mx(t) = f(t)x(t), \quad f(t) \in C_{[a,b]}, \quad \forall x(t) \in C^2_{[a,b]}.$$

Prueba que M^* existe y es el operador multiplicación por la función complejo conjugada $\overline{f(t)}$. Prueba que este operador es acotado y que $\|M\| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Nótese que si $f(t)$ es real entonces $M^* = M$.

Para los espacios euclídeos la existencia del operador adjunto no está garantizada en general, no obstante si que lo está en el caso de espacios de Hilbert. De hecho se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6.28 *Sea la aplicación (operador) linear $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}'$ espacios de Hilbert. Entonces existe un único operador $A^* : \mathbb{H}' \mapsto \mathbb{H}$ adjunto a A.*

Antes de pasar al teorema espectral vamos a hacer una breve incursión por el algebra lineal. Por sencillez supondremos que $\mathbb{H} = \mathbb{H}'$. Supongamos que $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert de dimensión finita. Entonces como ya hemos visto, $\mathbb{H}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Sea $(e_k)_k$ una base de $\mathbb{H}$. Entonces para todo $x \in \mathbb{H}$

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \quad \Longrightarrow \quad y = Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k A e_k.$$

Si

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i \quad \Longrightarrow \quad y = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \quad \Longrightarrow$$

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k, \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Es decir, si consideramos los vectores $x, y \in \mathbb{C}^n$ con coordenadas x_i, y_i, $i = 1, \ldots, n$, respectivamente, entonces el operador A se puede representar como una matriz $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$, i.e., tenemos la aplicación $A : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$, $y = Ax$, donde A es una matriz $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.29 *Prueba que la matriz de la aplicación identidad es la matriz identidad.*

Nótese que lo anterior se puede generalizar al caso de dimensión infinita, sólo que en este caso la matriz sería una matriz infinita

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Definición 6.30 *Sea el operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach. Diremos que A es invertible si existe un operador B, $A : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$ tal que $AB = I_{\mathbb{Y}}$, $BA = I_{\mathbb{X}}$.*

Está claro que para el caso de dimensión finita, existirá el inverso de A si $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y}$ y la matriz correspondiente será la matriz inversa de A. En dimensión infinita la situación es *algo* más complicada. Por ejemplo, el operador desplazamiento S cumple con $S^*S = I$ pero $SS^* \neq I$, luego S no tiene inverso.

Teorema 6.31 *Sea el operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach. Si $\|A\| < 1$, entonces $I - A$ es invertible y (en norma)*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

En adelante denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ el conjunto de todos los operadores lineales en $\mathbb{X}$, i.e., $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$. Es fácil ver que el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ es un espacio de Banach respecto a la norma de los operadores.

Teorema 6.32 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y sea $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ el conjunto de todos los operadores lineales $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$. El conjunto $E \subset \mathcal{L}(\mathbb{X})$ de los operadores invertibles en $\mathbb{X}$ es abierto en $\mathcal{L}(\mathbb{X})$.*

Definición 6.33 *Un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach es compacto para toda sucesión acotada $(x_n)_n$ de $\mathbb{X}$, la sucesión $(Ax_n)_n$ de $\mathbb{Y}$ tiene una subsucesión convergente.*

Nótese que si A es compacto, A es acotado pues en caso contrario existiría una sucesión acotada $(x_n)_n$ tal que $\|Ax_n\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ y entonces la sucesión $(Ax_n)_n$ no tendría una subsucesión convergente.

Ejemplo 6.34 *Cualquier operator $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, con $\mathbb{H}$ espacio de Banach de dimensión finita es compacto.*

Ejercicio 6.35 *Prueba que el operador identidad $I : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert de dimensión infinita no es compacto.*

Definición 6.36 *Un operador $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, se llama hermítico o autoadjunto si $A = A^*$, i.e.,*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, \qquad \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

Teoría espectral

En un espacio de dimensión finita podemos definir el espectro de un operador como el conjunto de los autovalores de su correspondiente matriz (en alguna base[12]), i.e., es el conjunto de los números complejos λ tales que

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0. \tag{6.10}$$

Puesto que para cualquier matriz $n \times n$ existen n autovalores, en el caso finito es relativamente simple de estudiar. No así el caso infinito.

Por ejemplo el operador desplazamiento ya visto antes $S : l^2 \mapsto l^2$, $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, no tiene autovalores pues la igualdad $Sx = \lambda x$ implica $x = 0$.

Así se precisa de una definición más general.

Definición 6.37 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y A una aplicación lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$. El espectro de A, que denotaremos por $\sigma(A)$ es el conjunto de números complejos tales que el operador $(\lambda I - A)$ es no invertible, i.e., no existe $(\lambda I - A)^{-1}$.*

El operador $A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1}$ se denomina resolvente de A. El conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el operador A_λ está bien definido se denomina conjunto resolvente de A y se suele denotar por $\rho(A)$. Obviamente el espectro de A, $\sigma(A)$ es el conjunto $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

La cantidad $r(A) = \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in \sigma(A)\}$ se denomina radio espectral de A.

Ejercicio 6.38 *Prueba que en dimensión finita $\sigma(A)$ es el conjunto de todos los autovalores.*

Teorema 6.39 *$\sigma(A)$ es un compacto de $\mathbb{C}$ (conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$) contenido en el interior del disco cerrado $D = \{z;\, |z| \leq \|A\|\}$.*

[12]Es un hecho conocido del álgebra lineal que los autovalores de un operador no dependen de la base escogida.

Teorema 6.40 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y A una aplicación lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ hermítica (autoadjunta). Entonces todos los autovalores de A (si los tiene) son reales. Además los autovectores correspondientes son ortogonales.*

Como hemos visto en dimensión infinita un operador lineal A en general puede no tener autovalores. No ocurre así con los operadores compactos y autoadjuntos.

Teorema 6.41 *Sea A un operador compacto en un espacio de Hilbert y $(\phi_n)_n$ una sucesión ortonormal de $\mathbb{H}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} A\phi_n = 0$.*

Teorema 6.42 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y A una aplicación lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunta y compacta. Entonces $\lambda = \|A\|$ o $\lambda = -\|A\|$ es un autovalor de A.*

Del teorema anterior se sigue que todo operador compacto y autoadjunto tiene siempre al menos un autovalor. De hecho se tiene el siguiente teorema:

Teorema 6.43 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y A una aplicación lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunta (hermítica) y compacta. Entonces A tiene un número finito de autovalores λ_n reales distintos o si es infinito, entonces, es numerable y si lo ordenamos de mayor a menor $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Del teorema anterior se sigue además que los espacios $\ker(\lambda_k I - A)$, para cada λ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ son de dimensión finita, pues en caso contrario $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Teorema 6.44 (Teorema espectral) *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y A una aplicación lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunta y compacta. Existe una sucesión numerable (finita o infinita) de autovectores ortonormales $(x_n)_n$ de A cuya correspondiente sucesión de autovalores denotaremos por $(\lambda_n)_n$ tales que,*

$$Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n, \qquad \forall x \in \mathbb{H}, \tag{6.11}$$

donde se tiene que:

1. *En (6.11) aparecen todos los autovalores de A.*
2. *Si la sucesión $(\lambda_n)_n$ es infinita se puede reordenar de forma que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*
3. *Los correspondientes espacios $\ker(\lambda_n I - A)$, para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ son de dimensión finita, siendo la dimensión de estos el número de veces que aparece un mismo λ_k en la fórmula (6.11).*

Corolario 6.45 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y A una aplicación lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunta y compacta. Entonces existe un sistema ortogonal completo (base ortonormal) de vectores ortonormales $(e_n)_n$ de $\mathbb{H}$ consistente en los correspondientes autovectores de A. Además,*

$$Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n, \qquad \forall x \in \mathbb{H},$$

donde $(\lambda_n)_n$ es la correspondiente sucesión de autovalores asociados a $(e_n)_n$.

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que todo operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunto y compacto en $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert separable, se le puede puede hacer corresponder una matriz (finita o infinita) que además es diagonalizable y en cuya diagonal aparecen los correspondientes autovalores. Además se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6.46 *Sean A y B dos operadores autoadjuntos y compactos en un espacio de Hilbert separable. Si A y B conmutan, entonces tienen un sistema completo de autovectores común.*

6.4. Problemas

Problema 6.1 Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo y $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto escalar. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Esta igualdad se suele denominar *ley del paralelogramo*.

Problema 6.2 Prueba que un espacio normado $\mathbb{X}$ es euclídeo si y sólo si para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Es decir, la ley del paralelogramo caracteriza los espacios euclídeos. **Ayuda:** Prueba que la cantidad

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2)$$

define un producto escalar en $\mathbb{X}$.

Problema 6.3 Usando el ejercicio anterior prueba que los espacios normados $\mathbb{R}^n_p$, l^p y $C^p_{[a,b]}$ correspondientes al ejercicio 5.11 y los ejemplos 5.14 y 5.12 no son espacios euclídeos salvo para $p = 2$.

Problema 6.4 Prueba que si dos elementos x e y de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

La igualdad anterior es una generalización del teorema de Pitágoras.

Problema 6.5 Prueba que cualquier subespacio cerrado $M \subset \mathbb{H}$ de un espacio de Hilbert separable es a su vez un espacio de Hilbert. Además, M tiene una base ortonormal.

Problema 6.6 A partir del Teorema 6.25, prueba que todo sistema ortogonal $(\phi_n)_n$ en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable se puede completar hasta obtener una base ortogonal de $\mathbb{H}$.

Problema 6.7 Sea el operador integral T del problema 5.5: $T : C^2_{[0,1]} \mapsto C^2_{[0,1]}$, $y = Tx$

$$y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

con $k(t,\tau)$ continua en el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$. Demuestra que el adjunto de dicho operador es el operador $T^* : C_{[0,1]} \mapsto C_{[0,1]}$, $y = T^*x$

$$y(t) = \int_0^1 \overline{k(\tau,t)}x(\tau)d\tau.$$

Luego $T^* = T$ si y sólo si $\overline{k(\tau,t)} = k(t,\tau)$.

Problema 6.8 Prueba que el conjunto de todos los operadores compactos de $\mathbb{H}$ es un espacio vectorial.

Problema 6.9 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sean y y z dos elementos dados de $\mathbb{H}$. Sea la aplicación $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ definida por $Tx = \langle x, y\rangle z$. Prueba que T es compacta.

Problema 6.10 Prueba que si $(T_n)_n$ es una sucesión de operadores compactos de $\mathbb{H}$ y $T_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$, entonces T es compacto. **Ayuda:** Dada una sucesión acotada $(x_n)_n$ prueba que existe una subsucesión x_{n_m} tal que $T_k x_{n_m}$ converge para cada k cuando $m \to \infty$. Utiliza dicha sucesión para probar que Tx_{n_k} es de Cauchy, entonces por la completitud de $\mathbb{H}$, Tx_{n_k} converge de donde se deduce el resultado.

Problema 6.11 Prueba que si A es autoadjunto, entonces A^*A y $A + A^*$ también lo son.

Problema 6.12 Sean A y B dos operadores autoadjuntos. Prueba que el operador $A + B$ es autoadjunto. Prueba que el producto AB es autoadjunto si y sólo si $AB = BA$. De lo anterior se deduce que si A es autoadjunto A^n, $n = 2, 3, \dots$ también lo es.

Problema 6.13 Usando el ejercicio anterior prueba que si A es autoadjunto, entonces cualquier polinomio con coeficientes reales de A, i.e., $P_n(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, también es autoadjunto.

Problema 6.14 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador lineal autoadjunto y compacto. Prueba que si para cierto $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \Theta$ (operador nulo), entonces A es el operador nulo. **Ayuda:** Prueba que A^k es autoadjunto y compacto y usa el teorema espectral para probar que todos autovalores de A^k son cero, de donde se deduce, de nuevo usando el teorema espectral que $A = 0$.

Bibliografía

- Sucesiones y series (§**1, 2 y 3**)

  1. T.M, Apostol. Análisis Matemático. Ed. Reverté, 1993.
  2. J.E. Marsden y M.J. Hoffman. Basic Complex Analysis. W. H. Freeman & Co., 1987.
  3. V.A. Zorich. Mathematical Analysis, tomos I y II, Springer, 2004.

- Análisis funcional[13] (§**4, 5 y 6**)

  1. L. Debnath y P. Mikusinsk. Introduction to Hilbert spaces with applications, Academic Press, 1990.^{h}
  2. A.N. Kolmogorov y A.V. Fomín. Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.^{m,h} Editorial MIR, 1978. (Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Dover, 1999)
  3. E. Kreyszig. Introductory Functional Analysis with Applications.^{m,n} Wiley Classics Library Edition, 1989.
  4. J.T. Oden y L.F. Demkowicz. Applied Functional Analysis.^{m,n} CRC Press, 1996.
  5. K. Saxe. Beginning Functional Analysis. Springer, New York, 2002.
  6. N. Young. An introduction to Hilbert Space.^{n,h} Cambridge University Press, 1988.

[13] Se recomienda para el tema de espacios métricos, normados y de Hilbert los libros marcados con "m", "n" y "h", respectivamente.

A. Anexo: Cálculo práctico de límites.

Teorema A.1 *(Criterio de la raíz)*
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. *Entonces,* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Ejemplo A.2 *Calcular los límites* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a^n}{n!}}$, $a \in \mathbb{R}$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Usando el criterio de la raíz tenemos, en el primer caso

$$a_n = \frac{a^n}{n!}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = 0.$$

En el segundo,

$$a_n = n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Una consecuencia de este último límite es que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ cualquiera sea $x > 0$.

Teorema A.3 *(Stolz)*
Sea $\dfrac{a_n}{b_n}$ *una sucesión tal que b_n es creciente con límite infinito y sea que la sucesión* $\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ *es convergente con límite l. Entonces* $\dfrac{a_n}{b_n}$ *es convergente y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l.$$

Ejemplo A.4 *Calcular los límites*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{\log n}.$$

Para el primero podemos usar $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ lo que nos da, en el límite $1/2$, no obstante usaremos el teorema de Stolz. Tomando $a_n = 1 + 2 + \cdots + n$ y $b_n = n$ tenemos que se cumplen todas las condiciones del teorema además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1} - a_n}{b_{n-1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

En el segundo caso tomamos $a_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ y $b_n = \log n$ de forma que se cumplen todas las condiciones del teorema además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1} - a_n}{b_{n-1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\log n - \log(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^n} = 1.$$

Teorema A.5 *(Límites notables) Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

4. $\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$ *para todo* $x \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0,$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0,$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$

7. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0,$ *para todo* $a > 1,\ \alpha > 0.$

8. $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0,$ *para todo* $x \in \mathbb{R}.$ *(*$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$*)*

9. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$ *(*$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$*)*

Definición A.6 *Dos sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *se denominan equivalentes si* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$*, y se escribe* $a_n \sim b_n$*.*

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n!$ es equivalente a la sucesión $b_n = \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$ y por tanto la siguiente fórmula, conocida como la fórmula de Stirling, es válida:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n\,. \tag{A.1}$$

Ejemplo A.7 *Calcular el límite* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2(n!)}$.

Sea $x_n = n!$. Definamos $s_n = \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$. Entonces, como $s_n/x_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2(n!)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2s_n}\frac{s_n}{x_n} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2s_n} \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2s_n},\end{aligned}$$

pero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2s_n}, \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}n^n e^{-n}}{2\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Definición A.8 *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se denomina infinitesimal si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

Definición A.9 *Dos sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *se denominan infinitésimos equivalentes y se escribe* $a_n \sim b_n$ *si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*,* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$*.*

Teorema A.10 *Si* $\{a_n\}$ *es una sucesión infinitesimal, entonces:*

1. $\operatorname{sen} a_n \sim a_n$.

2. $\tan a_n \sim a_n$.

3. $\operatorname{arc\,sen} a_n \sim a_n$.

4. $\arctan a_n \sim a_n$.

5. $1 - \cos a_n \sim \dfrac{a_n^2}{2}$.

6. $(1 + a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, a_n$.

7. $e^{a_n} - 1 \sim a_n, \qquad b^{a_n} - 1 \sim a_n \log b$.

8. $\log(1 + a_n) \sim a_n, \qquad \log_b(1 + a_n) \sim a_n \log_b e$.

Funciones elementales del análisis.

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{A.2}$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{A.3}$$

$$(1 + z)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (-\alpha)_k}{k!} z^k, \qquad |z| < 1, \tag{A.4}$$

donde $(a)_n$ denota al *símbolo de Pochhammer*

$$(a)_0 = 1, \;\; (a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1), \;\; k = 1, 2, 3, \ldots \;\; .$$

Como casos particulares de la serie (A.4) se tienen

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k, \qquad |z| < 1. \tag{A.5}$$

Haciendo el cambio z por z^2 en (A.5) obtenemos

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}, \qquad |z| < 1. \tag{A.6}$$

Escojamos ahora (A.4) con $\alpha = -\frac{1}{2}$ y cambiemos z por $-z^2$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{k!} z^k, \qquad |z| < 1. \tag{A.7}$$

donde $(1/2)_k = (1/2)(1/2 + 1) \cdots (1/2 + k - 1)$.

Finalmente,

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \quad |z| < 1. \tag{A.8}$$

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |z| < 1. \tag{A.9}$$

$$\operatorname{arc\,sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{k!(2k+1)} z^{2k+1}, \qquad |z| < 1. \tag{A.10}$$