



POLITÉCNICA



Fracciones continuas

Bernardo de la Calle Ysern

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid

Orthonet

...but the question of what is the driving mechanism for, and how it explains the mystery of, orthogonal polynomials remained open. It was clear to me that most likely this mechanism is continued fractions.

S. Khrushchev^{*}

^{*} *Orthogonal Polynomials and Continued Fractions*, Cambridge University Press, Cambridge 2008.

Esquema de la lección

1. Ejemplos históricos
2. Propiedades
3. Aproximación rápida. Consecuencias
4. Conclusión

Ejemplos históricos

Algoritmo euclídeo de división

- Sean dos números naturales x_0 y x_1 con $x_0 > x_1$. Entonces

$$x_0 = b_0 x_1 + x_2,$$

$$x_1 = b_1 x_2 + x_3,$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = b_{n-1} x_n + x_{n+1},$$

$$x_n = b_n x_{n+1}.$$

- El último divisor x_{n+1} es el m.c.d. de x_0 y x_1 .

Algoritmo euclídeo de división

- Sean dos números naturales x_0 y x_1 con $x_0 > x_1$. Entonces

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{x_2}{x_1} = b_0 + \frac{1}{x_1/x_2},$$

$$\frac{x_1}{x_2} = b_1 + \frac{x_3}{x_2} = b_1 + \frac{1}{x_2/x_3},$$

$\vdots$

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = b_{n-1} + \frac{x_{n+1}}{x_n} = b_{n-1} + \frac{1}{x_n/x_{n+1}},$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = b_n.$$

Algoritmo euclídeo de división

- Entonces

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \cdots \frac{1}{b_{n-1} + \frac{1}{b_n}}}}$$

- Por tanto todo número racional se puede expresar como una fracción continua **finita**.

Algoritmo euclídeo de división

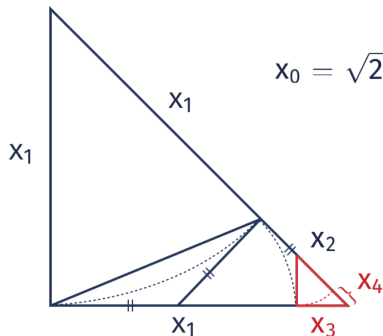
- El proceso se puede repetir con cualquier número real x dando en general una fracción continua **infinita**:

$$x \sim b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}$$

- *Notación*: $x \sim [b_0; b_1, b_2, \dots, b_n, \dots]$

Es una representación universal e intrínseca
de los números reales

Hipaso de Metaponto (450 a. C.)



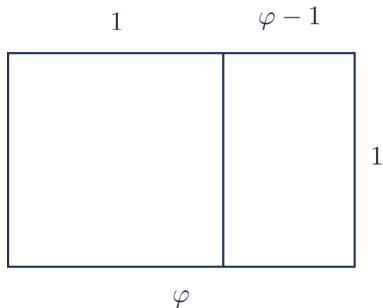
$$x_0 = x_1 + x_2$$

$$x_1 = 2x_2 + x_3$$

$$x_2 = 2x_3 + x_4$$

$$\sqrt{2} \sim [1; 2, 2, \dots, 2, \dots]$$

Hipaso de Metaponto (450 a. C.)



$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi - 1}$$

$\Downarrow$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sim [1; 1, 1, \dots, 1, \dots]$$

Calendario gregoriano (1582)

- Duración del año en el calendario de Julio César:

365 días 6 h. $\Rightarrow$ años bisiestos

- Duración precisa del año astronómico:

365 días 5 h. 48' 55"

- La diferencia es 0.0076968 días por año

$$= \frac{1}{129 + \frac{1}{1 + \frac{1}{12 + \dots}}} \Rightarrow \text{un día cada 130 años.}$$

La rueda dentada de Huygens (1682)

- Huygens diseñó un planetario con los movimientos de los planetas desde Mercurio hasta Saturno que se movía mediante un mecanismo de ruedas dentadas.
- Las ruedas dentadas ponían en relación los diferentes periodos de los planetas. El cociente de los de Saturno y la Tierra es (en segundos):

$$\frac{77708431}{2640858}$$

$$= 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}} \approx \frac{206}{7}, \text{ con un error de } 3.1 \times 10^{-3}.$$

Raíces cuadradas (Bombelli 1572)

- Sea n un número natural que no sea cuadrado perfecto.

$$n = m^2 + a \implies \sqrt{m^2 + a} = m + x \iff x = \frac{a}{2m + x}$$

$$\sqrt{n} \sim m + \frac{a}{2m + \frac{a}{2m + \dots}}$$

- Por ejemplo: $\sqrt{7} \sim 2 + \frac{3}{4 + \frac{3}{4 + \dots}} \sim [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$

Raíces cuadradas (Bombelli 1572)

$$\sqrt{7} = 2.6457 \dots$$

$$2 + \frac{3}{4 + \frac{3}{4 + \frac{3}{4}}} = \frac{233}{88} \approx 2.6477;$$

$$[2; 1, 1, 1] = \frac{8}{3} \approx 2.6667$$

$$2 + \frac{3}{4 + \frac{3}{4 + \frac{3}{4 + \frac{3}{4}}}} = \frac{1082}{409} \approx 2.6454;$$

$$[2; 1, 1, 1, 4] = \frac{37}{14} \approx 2.6429$$

Propiedades

Definiciones

- Una **fracción continua** es una expresión del tipo

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

donde $a_n, b_n \in \mathbb{C}$.

- Se llama **simple** o **regular** si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$a_n = 1 \quad \text{y} \quad b_n \in \mathbb{N}.$$

Definiciones

- Los **convergentes** p_n/q_n son las fracciones

$$\frac{p_n}{q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \cdots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}}}$$

- Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = L$$

entonces se dice que la fracción continua es **convergente** y converge a L .

Definiciones

- Una fracción continua es una expansión de $z \in \mathbb{C}$ si

$$z = b_0 + \frac{a_1}{z_1}, \quad z_1 = b_1 + \frac{a_2}{z_2}, \quad \dots \quad z_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{z_{n+1}}, \dots$$

- ¡Cuidado! Un número racional puede tener una expansión infinita:

$$2 = 1 + \frac{2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \sim 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \dots}}$$

¿La expansión converge a 2?

- Una fracción continua es una expansión de $z \in \mathbb{C}$ si

$$z = b_0 + \frac{a_1}{z_1}, \quad z_1 = b_1 + \frac{a_2}{z_2}, \quad \dots \quad z_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{z_{n+1}}, \dots$$

- ¡Cuidado! Un número racional puede tener una expansión infinita.
- ¡Cuidado! Una expansión puede no ser convergente o converger a un número distinto del que se partió.

$$z + \frac{1}{z} = a$$

$$z = a - 1/z = a - \frac{1}{a - 1/z} \sim a - \frac{1}{a - \frac{1}{a - \dots}}$$

$$\frac{1}{z} = a - \frac{1}{1/z} = a - \frac{1}{a - \frac{1}{1/z}} \sim a - \frac{1}{a - \frac{1}{a - \dots}}$$

Relaciones de Euler-Wallis

- Se cumplen las relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned}p_n &= b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}, & p_{-1} &= 1, \quad p_0 = b_0, \\q_n &= b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2}, & q_{-1} &= 0, \quad q_0 = 1.\end{aligned}$$

- De aquí se deduce que

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$$

Relaciones de Euler-Wallis

- De aquí se deduce que

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$$

- Es decir, los convergentes p_n/q_n de la fracción continua resultan ser las sumas parciales de la serie

$$b_0 + \frac{a_1}{q_1} - \frac{a_1 a_2}{q_1 q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{q_2 q_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{q_3 q_4} + \dots$$

Relaciones de Euler-Wallis

- Los convergentes de la expansión de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en fracción continua **simple** son fracciones irreducibles y cumplen

$$\frac{1}{2q_{n+1}^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Las fracciones continuas simples son convergentes

Relaciones de Euler-Wallis

- Los convergentes de la expansión de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en fracción continua **simple** son fracciones irreducibles y cumplen

$$\frac{1}{2q_{n+1}^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

- Además son **óptimos** en el sentido de que si $p/q \in \mathbb{Q}$ con $q \leq q_n$, entonces

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

Legendre-Pringsheim

Supongamos que a_n y b_n son números enteros tales que

$$|a_n| + 1 \leq b_n.$$

Entonces

- i) La fracción continua es convergente.
- ii) El límite L es un número irracional (si la desigualdad es estricta infinitas veces).
- iii) $|L| \leq 1$ (si $b_0 = 0$).

- Brouncker, un siglo antes de Euler, descubrió la fórmula

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}$$

que puede deducirse de

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

La ecuación de Pell

Problema

Dado $M \in \mathbb{N}$ (no cuadrado perfecto) encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 = M y^2 + 1.$$

Lagrange (1768)

Existen infinitas soluciones (x, y) y todos los cocientes x/y son convergentes impares de la fracción continua simple de $\sqrt{M}$.

La ecuación de Pell

- Además todas las soluciones se escriben de la forma

$$x_n + y_n\sqrt{M} = \left(x_1 + y_1\sqrt{M}\right)^n,$$

donde (x_1, y_1) es la solución mínima.

Ejemplo: $x^2 = 7y^2 + 1$.

Los convergentes de $\sqrt{7}$ son: 2; 3, 5/2, **8/3**, ... y

$$\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^2 = 127 + 48\sqrt{7}, \quad \left(8 + 3\sqrt{7}\right)^3 = 2024 + 765\sqrt{7}.$$

Tras dedicarle tus desvelos, si participas de la sabiduría, haz la cuenta extranjero, de la cantidad de bueyes del Sol que pacían en las llanuras de la siciliana isla...

Arquímedes de Siracusa^{**}

- La primera parte del problema es equivalente a un sistema lineal de 7 ecuaciones con 8 incógnitas:

$$x_1 = 10366482 n,$$

$$x_3 = 7358060 n,$$

$$x_2 = 7460514 n,$$

$$x_4 = 4149387 n.$$

^{**} Carta a Eratóstenes de Alejandría

Y tú, extranjero, si llegaras a decir exactamente cuántas eran las reses del Sol, no serías llamado ignorante ni inexperto en números. Pero tampoco, desde luego, te contarían entre los sabios...

Arquímedes de Siracusa^{**}

- La segunda parte supone resolver la ecuación de Pell con

$$M = 410286423278424.$$

^{**} Carta a Eratóstenes de Alejandría

Amthor (1880)

La solución mínima del problema del rebaño tiene 206545 dígitos, de los cuales los 4 primeros son 7760.

- Simplificó el problema considerando

$$x^2 = My^2 + 1 = 4729494 (2 \cdot 4657 y)^2 + 1 = Nz^2 + 1$$

$\Downarrow$

$$u = 109931986732829734979866232821433543901088049 \\ + 50549485234315033074477819735540408986340\sqrt{N}$$

$\Downarrow$

$$x + y\sqrt{M} = u^{2329}$$

Números irracionales

- Euler probó en 1737 la irracionalidad de e mediante su expansión en fracción continua simple:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots] \quad \text{¿Cómo calcularla?}$$

- Aunque en general la expansión puede no tener una forma regular... como la del número π :

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$$

- El número 292 acelera la convergencia:

$$\frac{p_4}{q_4} - \pi = \frac{355}{113} - \pi < \frac{p_4}{q_4} - \frac{p_5}{q_5} = 2.673 \times 10^{-7}$$

- En el año 1768 Lambert consiguió calcular una expansión de $\tan x$ en fracción continua de la siguiente manera:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots}$$

Números irracionales

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots}$$
$$\frac{x}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots}$$

$$= \frac{x}{1 - \frac{\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30} + \dots}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{\frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots}}}$$
$$\frac{x}{1 - \frac{x^2}{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} + \dots}}$$

- Repitiendo la operación indefinidamente, se llega a

$$\tan x \sim \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots}}}}$$

Números irracionales

Lambert (1768)

Si $x \neq 0$ es un número racional, entonces $\tan x$ es irracional.

Demostración:

$$\tan \frac{p}{q} \sim \frac{\frac{p}{q}}{1 - \frac{\frac{p^2}{q^2}}{3 - \frac{\frac{p^2}{q^2}}{5 - \frac{\frac{p^2}{q^2}}{7 - \dots}}}} \sim \frac{p}{q - \frac{p^2}{3q - \frac{p^2}{5q - \frac{p^2}{7q - \dots}}}}$$

Números irracionales

Lambert (1768)

Si $x \neq 0$ es un número racional, entonces $\tan x$ es irracional.

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1} \implies \boxed{\pi \text{ es irracional}}$$

Números irracionales

Lambert (1768)

Si $x \neq 0$ es un número racional, entonces $\tan x$ es irracional.

La función $\tanh x$ verifica la misma propiedad y como

$$\exp x = \frac{1 + \tanh(x/2)}{1 - \tanh(x/2)},$$

también se cumple que

$\exp x$ es irracional si $x \neq 0$ es racional

Aproximación rápida. Consecuencias

Teorema

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{p_n/q_n\} \subset \mathbb{Q}$ una sucesión tal que:

- i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $q_n x - p_n \neq 0$.
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n x - p_n = 0 \iff x - \frac{p_n}{q_n} = o\left(\frac{1}{q_n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$

Entonces x es un número irracional.

Aproximación rápida por racionales implica irracionalidad

Teorema

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{p_n/q_n\} \subset \mathbb{Q}$ una sucesión tal que:

- i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $q_n x - p_n \neq 0$.
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n x - p_n = 0 \iff x - \frac{p_n}{q_n} = o\left(\frac{1}{q_n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$

Entonces x es un número irracional.

- El número e es irracional:

$$0 \leq e - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \leq \frac{e^\theta}{(N+1)!} < \frac{3}{(N+1)!} = \frac{3}{N+1} \frac{1}{N!}.$$

Teorema

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{p_n/q_n\} \subset \mathbb{Q}$ una sucesión tal que:

- i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $q_n x - p_n \neq 0$.
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n x - p_n = 0 \iff x - \frac{p_n}{q_n} = o\left(\frac{1}{q_n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$

Entonces x es un número irracional.

- El polinomio de Taylor no proporciona en general aproximaciones rápidas:

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

Teorema

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{p_n/q_n\} \subset \mathbb{Q}$ una sucesión tal que:

- i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $q_n x - p_n \neq 0$.
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n x - p_n = 0 \iff x - \frac{p_n}{q_n} = o\left(\frac{1}{q_n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$

Entonces x es un número irracional.

¿Cómo conseguir buenos aproximantes racionales?

Apéry (1978)

El número $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es irracional.

- Usa la fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \left[\binom{2n}{n} \right]^{-1}.$$

La demostración no es generalizable al caso de otros valores del exponente.

⋮

Números algebraicos y trascendentes

- Se dice que $\alpha \in \mathbb{C}$ es un número algebraico si α es raíz de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$.
- El polinomio mínimo de α es el polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{Q}$ de menor grado que tiene a α como raíz. Se caracteriza por ser irreducible en $\mathbb{Q}$.
- El grado de un número algebraico es el grado de su polinomio mínimo.
- El conjunto de los números algebraicos, que denotaremos por $\mathbb{A}$, tiene estructura de **cuerpo**.

Números algebraicos y trascendentes

- Los elementos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$ se llaman **números trascendentes**.
 - ¿Existen números trascendentes?
 - ¿Cuántos hay?
 - ¿Cómo se prueba que un número es trascendente?
 - ¿Son e o π trascendentes?

Los trascendentes de Liouville

Liouville (1844)

Sea α un número algebraico de grado $m \geq 2$ (no racional).
Entonces existe $c_\alpha \in (0, 1)$ tal que para toda fracción p/q :

$$\frac{c_\alpha}{q^m} \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Aproximación muy rápida por racionales
implica trascendencia

Los trascendentes de Liouville

Liouville (1844)

Sea α un número algebraico de grado $m \geq 2$ (no racional). Entonces existe $c_\alpha \in (0, 1)$ tal que para toda fracción p/q :

$$\frac{c_\alpha}{q^m} \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

- Primeros ejemplos de trascendentes: $x = \sum_{n=1}^{\infty} 1/10^{n!}$.

$$x - \sum_{n=1}^N \frac{1}{10^{n!}} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} < \sum_{n=(N+1)!}^{\infty} \frac{1}{10^n} < \frac{2}{10^{(N+1)!}} = \frac{2}{q^{N+1}}.$$

Los trascendentes de Liouville

Liouville (1844)

Sea α un número algebraico de grado $m \geq 2$ (no racional). Entonces existe $c_\alpha \in (0, 1)$ tal que para toda fracción p/q :

$$\frac{c_\alpha}{q^m} \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

- ¿Cuál es el menor exponente que se puede elegir en c_α/q^m de modo que el teorema de Liouville siga siendo cierto?
 - **Thue (1909)**: $m/2 + 1 + \varepsilon$, con ε arbitrario.
 - **Siegel (1921)**: $2\sqrt{m}$.
 - **Roth (1955)**: $\frac{m}{2} + \varepsilon$, con ε arbitrario. (¡Medalla Fields!)

Aproximación por racionales algo más rápida de lo normal implica trascendencia

Khinchin (1926)

El conjunto de números trascendentes que se pueden aproximar por racionales a velocidad $2 + \varepsilon$ tiene medida nula.

⋮

- El conjunto $\mathbb{A}$ de números algebraicos tiene cardinal numerable.
- Dada una sucesión cualquiera de números reales es posible construir un número real que no pertenece a la sucesión. En particular existen infinitos números trascendentes.
- El conjunto $\mathbb{R}$ de números reales tiene cardinal no numerable.

Casi todos los números reales son trascendentes

Conclusión

Algunas ideas importantes para recordar

- Relación de recurrencia a tres términos.
- Aproximación óptima y constructiva.
- En ocasiones representación no equivale a convergencia.
- Una representación adecuada permite probar resultados inversos.
- Veremos otra manera de probar que un número es trascendente relacionada con los aproximantes de Padé.

Para saber más



Hairer y Wanner, *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, New York 1996.



Khinchin, *Continued Fractions*, Dover, Mineola, NY 1997.



Khrushchev, *Orthogonal Polynomials and Continued Fractions*, Cambridge University Press, Cambridge 2008.



Nikishin y Sorokin, *Rational Approximation and Orthogonality*, AMS, Providence, RI 1991.

Irracionales cuadráticos

- Un número real x se llama **irracional cuadrático** si es raíz de un polinomio de grado 2 con coeficientes enteros y no es un número racional.
- El hecho de que la ecuación de Pell siempre tiene soluciones no triviales está relacionado con:

Euler-Lagrange

La fracción continua regular de $x \in \mathbb{R}$ es periódica si y solo si x es un irracional cuadrático.

Euler-Lagrange

La fracción continua regular de $x \in \mathbb{R}$ es periódica si y solo si x es un irracional cuadrático.

- Euler ideó un algoritmo en enteros para computar el desarrollo.
- Los coeficientes del periodo son simétricos respecto al centro del periodo si se exceptúa el último de ellos:

$$\sqrt{29} = [5; 2, 1, 1, 2, 10, \dots],$$

$$\sqrt{31} = [5; 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, \dots].$$

La constante de Khinchin

Khinchin (1935)

Para casi todo número real $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right]^{\log n / \log 2} \approx 2,68545 \dots$$

- Una notable excepción al teorema es el número e cuyas medias geométricas $\sqrt[3n]{2^n n!}$ tienden a $+\infty$.