Departamento de Física Aplicada I

Escuela Universitaria Politécnica

PRÁCTICAS DE FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INGENIERÍA:

TEORÍA DE ERRORES Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

1. Introducción

Todas las ciencias experimentales, como la Física, se basan en observaciones cuantitativas que llamamos medidas, que son el resultado de los experimentos y se describen con números. Estrictamente, la medida de cualquier magnitud se expresa mediante un número acompañado además de la unidad en que se ha medido y que presta su significación al número. Pero el proceso de medida está sujeto a una serie de limitaciones que se traducen inevitablemente en la existencia de cierta incertidumbre en el número obtenido. Consecuentemente, el resultado de una medida sólo tiene sentido si, además del número obtenido y su unidad correspondiente, va acompañado de otro número, denominado error, que dé cuenta de la incertidumbre asociada a ella. Las definiciones de magnitud, medida y unidades están íntimamente relacionadas entre sí:

Magnitud: Propiedad física que puede ser medida o inferida a partir de otras medidas (como tiempo, longitud, intensidad, peso, etc.).

Medir: Comparación de una cantidad de cierta magnitud con otra cantidad fija de la misma, denominada unidad.

Para tratar los datos experimentales obtenidos en el laboratorio, es pues crucial entender que todas las medidas de magnitudes físicas están sometidas siempre a incertidumbres, ya que no es posible medir algo de forma totalmente exacta. En ciencia, la palabra "error" no significa "equivocación" o "fallo" sino que se refiere a la incertidumbre inevitable que existe al realizar cualquier medida. Por supuesto, lo ideal es conseguir hacer el error lo más pequeño posible, pero éste siempre existirá. Para poder obtener conclusiones válidas a partir de las medidas, **el error debe aparecer siempre claramente indicado** y debe ser manejado adecuadamente.

2. Errores en las medidas de magnitudes físicas

Cada vez que se lleva a cabo un experimento o se mide una cantidad con el instrumento adecuado, surgen dos cuestiones: ¿Cómo de fiable es el resultado? ¿Cómo de cerca está del valor real, cualquiera que sea éste? La primera cuestión está relacionada con la **precisión** o reproducibilidad del experimento y la segunda, con la **exactitud** o proximidad al valor verdadero del mismo (si fuese conocido). Las palabras precisión y exactitud tienen significados completamente distintos en la teoría de errores, mientras que se usan de manera indistinta en el lenguaje cotidiano. La distinción se aprecia claramente si atendemos a los posibles tipos o fuentes de errores. Éstos se clasifican en dos grandes grupos: errores sistemáticos y errores accidentales.

2.1. Clasificación de los tipos de error

a) **Errores sistemáticos.** Son errores que tienen lugar siempre en el mismo sentido y que se repiten constantemente en el transcurso de un experimento. Pueden ser causados por errores de calibración (o errores de cero) de los aparatos de medida, condiciones experimentales no apropiadas (presión, temperatura, etc.) que afectan a los instrumentos de medida, tendencias erróneas en el observador, técnicas de medida inadecuadas, uso de fórmulas o modelos aproximados, etc. Un minucioso análisis del instrumento y del procedimiento de medida permite eliminar en lo posible la presencia de estos errores. Por lo tanto, los errores sistemáticos afectan a la **exactitud** de la medida, es decir, a la proximidad al valor verdadero, ya que hacen que todos los resultados sean erróneos en el mismo sentido (demasiado altos o demasiado bajos).

b) Errores accidentales o aleatorios. Son debidos a diversas causas difíciles o imposibles de controlar y alteran las medidas realizadas en diferente cuantía y sentido cada vez. Pueden ser causados por fluctuaciones en las condiciones ambientales durante el experimento, errores de apreciación debidos a las limitaciones de nuestros sentidos, errores de precisión impuestos por la sensibilidad del aparato de medida, etc. Todo esto da lugar a que la repetición reiterada de la medición realizada por un mismo observador no siempre lleve al mismo resultado. El error debido a la superposición de todos estos efectos sólo puede ser detectado si el instrumento de medida es suficientemente sensible. Su valor no puede ser estimado a partir de una medida aislada, siendo necesaria la realización de una serie de medidas que permita, mediante un tratamiento estadístico de los datos, determinar una cota máxima de error. Los errores accidentales afectan a la **precisión** o **reproducibilidad** de un experimento. Por ejemplo, la obtención de varias medidas de la misma magnitud, diferentes entre sí, nos permitirán determinar el valor de dicha magnitud de forma menos precisa que si los valores obtenidos hubiesen sido más parecidos entre sí.

Ambos tipos de errores pueden darse simultáneamente y de forma independiente, de forma que se pueden tener resultados precisos aunque inexactos, exactos pero imprecisos, etc., dependiendo de los tipos de errores implicados.

2.2. Problema de la medida

Eliminados los errores de tipo sistemático o, al menos, minimizados en lo posible, siempre existirán errores como consecuencia de:

a) El error del instrumento de medida utilizado: Todos los instrumentos de medida tienen un margen de tolerancia o error, que aparece especificado por el fabricante en el manual de instrucciones.

b) Errores accidentales: Errores de tipo aleatorio, sólo detectables cuando el orden de magnitud de los mismos es superior a la precisión del aparato.

Si al medir con un instrumento una serie de veces (por ejemplo, tres veces) se obtiene la misma medida exactamente, se considera que los errores accidentales son despreciables frente al error instrumental, **adoptándose como cota de error el error asociado al instrumento**.

Cuando los errores accidentales sean superiores a la precisión del instrumento utilizado, resulta necesario repetir varias veces la medida (al menos 10 veces). **Para determinar el error hay que realizar un tratamiento estadístico de los datos.** En estos casos, **el error instrumental resulta despreciable y se considera que el error en la medida viene dado por el error accidental.** Todo esto se explicará con más detalle a continuación.

3. Error absoluto y error relativo

Dado que, como hemos visto, no es posible conocer el valor exacto de ninguna magnitud, en toda medida resulta necesario dar alguna indicación del error cometido que dé cuenta de cuánto puede alejarse el resultado obtenido del valor exacto. Por lo tanto, en cualquier medida se debe indicar el error que puede haberse cometido.

El error puede expresarse de dos formas diferentes que no deben ser confundidas:

Error absoluto: Es el valor absoluto de la diferencia entre el valor obtenido experimentalmente y el verdadero valor de ésta. En principio, como el valor exacto no suele ser conocido, no se podría conocer el error absoluto. Ahora bien, la teoría de errores nos permite al menos estimar la incertidumbre asociada a la medida de una magnitud dada, que va a ser lo que consideraremos como error absoluto. El error absoluto tiene las mismas dimensiones físicas y, por tanto, las mismas unidades, que la medida a la que acompaña, y se suele representar como Δx, de forma que el resultado de la medida x de una magnitud X debe expresarse como $X = x \pm \Delta x$ con sus unidades correspondientes (por ejemplo, $L = 12{,}6 \pm 0{,}4$ cm).

Error relativo: Es el cociente entre el error absoluto y el verdadero valor de la misma y, en consecuencia, no tiene dimensiones. Aunque tampoco es conocido, un estimación del mismo viene dada por: $\varepsilon_r = \Delta x/x$ (en tantos por uno, donde x es el resultado de la medida). Suele darse en tantos por ciento ($\varepsilon_r \times 100$). (En el ejemplo anterior, el error relativo sería del 3,2%). En general, una medida con un error relativo de más del 10 % es más bien pobre, mientras que si el error es del 1 % o menor, la medida puede considerarse buena, aunque este criterio cambia según el campo de aplicación.

El error absoluto no nos informa por sí sólo de la bondad de una medida, ya que no es igual de grave tener un error de 1 cm en la medida de un objeto de 5 cm que tener 1 cm de error en la de otro objeto de 1 m. Sin embargo, el error relativo es más informativo, ya que en el primer caso el error relativo sería del 20% mientras que en el segundo sería sólo del 1%.

4. Presentación de resultados. Técnicas de redondeo.

El valor experimental de una magnitud A debe expresarse con un número de cifras que viene determinado por el valor del error absoluto, ya que sería absurdo presentar una medida hasta la diezmilésima cuando el error estuviese en las décimas. Ese número de cifras es lo que se llama **número de cifras significativas**, y determinan el valor de un número aunque no su orden de magnitud. El número de cifras significativas es el número de cifras que hay desde la primera cifra distinta de 0 empezando por la izquierda hasta la primera cifra que venga afectada por el error absoluto, cuando éste es conocido.

Un resultado no estará correctamente expresado si no se aplican adecuadamente las **técnicas de redondeo**. Partiendo de la magnitud y de su error absoluto con todas sus cifras, el procedimiento de redondeo se resume en los siguientes pasos:

1) Se examinan las dos primeras cifras significativas del error absoluto (esto es, descontando los ceros a la derecha e izquierda del número). Si estas dos cifras forman un número menor o igual a 25, se conservan ambas[1]. Si es mayor, se conserva una sola cifra. A continuación, se procede de la siguiente manera:

    i. La última cifra conservada se redondea aumentándola en una unidad si la primera de las cifras a descartar es mayor que 5, y no alterándola si es menor que 5. (Ej.1.: 6,9749515 redondeado a 3 cifras es: 6,97; Ej.2.: 6,9749515 redondeado a 2 cifras es: 7,0)

    ii. Si las cifras a descartar empiezan por 5 y al menos una de las siguientes cifras es mayor que 0, la última cifra conservada se aumenta en 1 unidad. (Ej: 6,9749515 redondeado a 2 cifras es: 7,0; redondeado a 5 cifras es 6,9750)

    iii. Si las cifras a descartar empiezan por 5 y todas las demás son 0, la última cifra

[1] En el caso de que, por ejemplo, sea Δx = 0,25..., sólo se conservarán las dos si la siguiente cifra es menor que 5 (ej: Δx = 0,25124). Si no, pasaría a ser 0,26 ((ej: Δx = 0,25624) que se redondea a 0,3.

conservada no cambia si es par o se incrementa en 1 unidad si es impar (redondeo al número par más próximo). (Ej.1: 6,9749515 redondeado a 7 cifras es: 6,974952; Ej.2: 6,9749505, redondeado a 7 cifras es 6,974950). El redondeo al número par más próximo asegura que unas veces se redondeará por exceso, como 0,75 a 0,8 y otras por defecto, como 0,85 a 0,8.

2) A continuación, se expresa la magnitud de forma que su última cifra sea del mismo orden que la del error, descartando las demás y redondeándola de la misma forma que el error absoluto (apartados i., ii., iii.).

3) Se calcula el error relativo dividiendo el error absoluto por el valor de la magnitud en cuestión, ambos con todas sus cifras. Posteriormente se redondea conservando solamente dos cifras significativas, redondeando la segunda usando las mismas reglas que anteriormente. Nota: Los errores relativos se suelen dar en tantos por ciento.

Una vez redondeados los resultados, se presenta el resultado final de la siguiente manera:

_A_ = valor de _A_ ± error absoluto de _A Unidades_; error relativo de _A_

Por ejemplo, si se ha realizado una experiencia en la que se ha calculado el valor de la gravedad, y los resultados finales dan el valor de 9,684 m/s^2 con un error absoluto de 0,34 m/s^2 y relativo de 0,035 (en tantos por ciento sería del 3,5%), la presentación de resultados sería:

$$g = 9{,}7 \pm 0{,}3 \text{ m/s}^2;\ \varepsilon_r = 3{,}5\ \%$$

En ocasiones hay que tener en cuenta que algunos ceros no se pueden suprimir, ya que están indicando cuál es el orden de magnitud correcto o simplemente que la cifra indicada es efectivamente 0 y no cualquier otra (por ejemplo, escribir 2 ± 0,2 cm es incorrecto, ya que lo correcto sería 2,0 ± 0,2 cm, puesto que ese 0 decimal es una cifra significativa).

Para números muy grandes o muy pequeños conviene usar la notación científica, esto es, en potencias de 10, respetando el número significativo de cifras, expresando el valor y su error relativo con la misma potencia de 10. Por ejemplo $2{,}34 \times 10^9$ ó $1{,}60 \times 10^{-19}$.

Cuando los cálculos se realizan mediante calculadora u ordenador, conviene conservar siempre todas las cifras que éstos permitan, procediéndose al **redondeo SÓLO en el resultado final, NUNCA redondeando resultados intermedios.**

Si en la fórmula o ley que permite el cálculo de una magnitud aparece alguna constante matemática o física (como π, N_A, g, c, etc.), conviene considerar, en el momento de operar, el máximo número significativo de cifras, de forma que el error considerado sea despreciable frente a los de las magnitudes que intervienen en la fórmula.

A continuación se presentan algunos ejemplos de redondeo, aplicados a medidas de intensidad (I) dadas en amperios (A):

Medida (A)	Error absoluto (A)	Resultado
1,43865	0,01239	I = 1,439 ± 0,012 A ; ε_r = 0,86 %
4,81343	0,04661	I = 4,81 ± 0,05 A ; ε_r = 0,97 %
132,2894	2,8754	I = 132 ± 3 A ; ε_r = 2,2 %
5127	234	I = 5130 ± 230 A ; ε_r = 4,6 %
0,53781	0,00962	I = 0,538 ± 0,010 A ; ε_r = 1,8 %
5,03574	0,02574	I = 5,04 ± 0,03 A ; ε_r = 0,51 %

5. Tipos de medidas

Las medidas que se realizan en un laboratorio pueden ser de dos tipos:

Medidas directas: El valor de la magnitud que se quiere conocer se mide directamente con el instrumento de medida (esto es, mediante la comparación con un patrón adecuado o la utilización de un aparato calibrado). Ejemplos de medidas directas son: la medida de una longitud con un calibre, el tiempo con un cronómetro, el voltaje con un voltímetro, etc.

Medidas indirectas: El valor de la magnitud deseada se obtiene como resultado del cálculo realizado a partir de otras magnitudes relacionadas con la magnitud a determinar y de ciertas constantes. Por ejemplo, la determinación (medida indirecta) del volumen V de un cilindro a partir de la medida (directa) de su diámetro D y de su altura H aplicando la fórmula $V = \pi D^2 H/4$.

En todo lo que sigue se va a suponer que **se han identificado todas las fuentes de error sistemático y que éstos han sido reducidos a un nivel despreciable, de forma que las únicas fuentes de error que quedan son las accidentales**. La estimación de los errores en las medidas es diferente si se trata de medidas directas o de medidas indirectas.

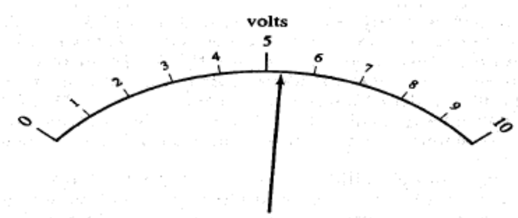
6. Cálculo de errores en medidas directas

Casi todas las medidas directas implican la lectura de una escala o de una pantalla digital. Se pueden distinguir dos casos dependiendo de cómo sean los errores accidentales frente a la precisión del aparato, esto es, dependiendo de si al medir varias veces la misma magnitud con el aparato se obtiene exactamente el mismo resultado o no:

a) Cuando los errores accidentales son pequeños frente a la precisión del aparato (al medir varias veces el resultado es siempre el mismo)

En este caso, los errores accidentales son despreciables frente a la tolerancia del aparato. El margen de error es el que indique el fabricante en el manual de instrucciones. En nuestro caso, para las prácticas que se van a llevar a cabo en el laboratorio, resulta razonable aplicar el criterio siguiente para el límite de error (error absoluto) en sustitución de las especificaciones del fabricante:

- Si la medida se ha hecho con un aparato analógico, es decir, basado en una escala graduada, se toma como error absoluto la menor unidad que pueda medir el aparato (distancia entre dos divisiones). En cuanto al valor de la magnitud medida, éste sería el de la marca más cercana a la posición de la aguja.



  Por ejemplo, en el voltímetro de la figura, cuya escala tiene intervalos de 1 V, se podría tomar como valor experimental de nuestra magnitud (voltaje o diferencia de potencial V) 5 V con un error absoluto $\Delta V = \pm 1$ V, de forma que $V = 5 \pm 1$ V.

- Si la medida se ha hecho con un aparato digital, tomaremos como error absoluto una unidad del último dígito de la lectura del aparato. Por ejemplo, si un voltímetro digital da un valor de 29,7 mV, el error absoluto es ±0,1 mV.

b) Cuando los errores accidentales son superiores a la precisión del aparato (los resultados de la medida no son siempre los mismos)

El error del instrumento es despreciable frente a los errores accidentales y debe hacerse un tratamiento estadístico de los resultados. Por ello en este caso resulta necesario realizar varias medidas. Supongamos que se realiza un conjunto de n medidas (siendo $n \geq 10$) de una misma magnitud X y los valores obtenidos son x_1, x_2, ..., x_n. Como mejor estimación de la cantidad x, esto es, como valor experimental de la magnitud medida, se toma el **valor medio** o **media**:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1}$$

Para estimar el error asociado a este valor medio, lo apropiado es tener en cuenta las distancias de los valores obtenidos x_1, x_2, ..., x_n al valor medio, esto es, la dispersión de los datos. Para ello se define la desviación típica o desviación estándar de los datos:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}} \tag{2}$$

Sin embargo, en esta expresión no se tiene en cuenta que fijados el valor medio y (n-1) valores de x_i, el valor del x_i restante queda perfectamente determinado (se dice que tenemos (n-1) grados de libertad), y tampoco se tiene en cuenta que la desviación típica debería quedar indeterminada si sólo se tiene un valor, en lugar de ser igual a 0 como sugiere la expresión anterior. Estos y otros motivos puramente teóricos, hacen que se prefiera la siguiente definición para la **desviación típica** o **desviación estándar de los datos**, que va a ser la que usemos nosotros[2]:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}} \tag{3}$$

Una estimación del error viene dada por la **desviación típica de la media**[3] (o error cuadrático de la media) definida como:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n(n-1)}} \tag{4}$$

y tomaremos como cota de error **tres veces la desviación típica**[4] de la media ($\Delta x = \pm\, 3\sigma_{\bar{x}}$), por lo que el resultado sería:

---

[2] Cuando se calcule mediante calculadora u ordenador, hay que asegurarse de que se está usando la definición correcta comprobando las instrucciones del aparato o del programa. Las calculadoras suelen indicarlo como σ_{n-1}.

[3] Nótese la diferencia entre desviación típica "de los datos" y "de la media". Habitualmente, cuando hablemos de desviación típica (sin más especificación) de un resultado (obtenido como la media de unos datos), nos estaremos refiriendo a la desviación típica "de la media".

[4] Si el error así obtenido fuese menor que la precisión del aparato, evidentemente deberá tomarse como error la precisión del aparato.

$$\bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}} \quad (5)$$

Se puede demostrar mediante razonamientos estadísticos, en los que no vamos a entrar (su comprobación se puede encontrar en la *Bibliografía*), que si todas **las fuentes de error son pequeñas y aleatorias** y se realizase un número grande de medidas, sería de esperar que el 68,3 % de los resultados cayese dentro de $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$, esto es, la probabilidad de que nuestro resultado esté entre $\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}$ y $\bar{x} + \sigma_{\bar{x}}$ es del 68,3 %. Esto es lo que se conoce como el límite de confianza del 68,3 %. Si en su lugar se escoge $\bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$, estaríamos usando un límite de confianza del 95,4 %, y si es $\bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}}$, sería del 99,7 %. Nosotros adoptaremos el **nivel de confianza del 99,7 %**, teniendo en cuenta que estamos dando $3\sigma_{\bar{x}}$ como cota del error.

Cuando el **número de medidas es pequeño (inferior a 10)**, es ilógico realizar un tratamiento estadístico de los datos, por lo que como cota de error resulta más apropiado tomar la cantidad:

$$\Delta\bar{x} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} \quad (6)$$

donde $x_{\max}$ y $x_{\min}$ representan los valores máximos y mínimos de las medidas realizadas.

En el caso de que el valor de alguna de las medidas resultase ser muy distinto de las demás, conviene rechazarlo y, en su caso, repetir la medida, ya que podría ser el resultado de una equivocación durante el experimento (al medir, al anotar los datos, etc.).

7. Cálculo de errores en medidas indirectas: propagación de errores

Dado que la medida indirecta de una magnitud proviene del cálculo a partir de otras magnitudes medidas a su vez directa o indirectamente, mediante la aplicación de leyes físicas o fórmulas matemáticas en general, es importante saber cómo se propagan los errores desde las segundas hacia la primera. De ello se encarga la teoría de propagación de errores que presentaremos a continuación, fundamentada en el cálculo diferencial.

En algunas ocasiones, una magnitud es medida indirectamente a partir de otra única magnitud (función de una sola variable, $f(x)$), pero, en general, es medida a partir de varias magnitudes (función de varias variables, $f(x,y,\ldots)$, cada una de las cuales tiene su propio margen de error (Δx, Δy, …). Otras veces, el valor de la magnitud viene dado en función de otras magnitudes mediante una tabla de valores que las relaciona en lugar de su relación funcional, de forma que para hallar el valor requerido es necesario recurrir a la interpolación en las tablas. Por otro lado, en unos casos los errores de las magnitudes que intervienen son independientes (no están relacionados entre sí) y son totalmente aleatorios, aunque en otros puede no estar tan clara la independencia de los errores ni su aleatoriedad. Habrá que tener en cuenta todos estos factores a la hora de propagar los errores.

a) Fórmula general de la propagación de errores en fórmulas matemáticas

Supongamos que la magnitud que se quiere determinar indirectamente A sea resultado de la aplicación de una fórmula $A = f(x, y, \ldots)$ en la que aparecen varias magnitudes $x, y, \ldots$ que han sido medidas con errores absolutos Δx, Δy, … El valor experimental de A será el que resulte de evaluar esa función para los valores experimentales de las demás magnitudes $x, y, \ldots$. Si los errores de $x, y, \ldots$ son **independientes y aleatorios**[5], se puede demostrar que una estimación del error absoluto de A viene dada por:

[5] Si los errores no fuesen independientes ni aleatorios, una posible estimación del error puede obtener mediante la expresión:

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y\right)^2 + \cdots} \tag{7}$$

donde $\partial f/\partial x$ es la derivada parcial de f respecto de x, etc., estando evaluadas todas las derivadas parciales en los valores experimentales de x, y, etc. Esta es la **fórmula general de la propagación de errores en fórmulas matemáticas** que usaremos en las prácticas de laboratorio.

b) Interpolación en tablas

El valor de la magnitud A puede venir dado en función de otras magnitudes $x, y, \ldots$ mediante una tabla que relaciona los valores de $x, y, \ldots$ con el correspondiente de A. En general, los valores medidos de estas magnitudes no tienen por qué corresponder exactamente con los que aparecen en la tabla, por lo cual habrá que recurrir a métodos de interpolación (en la mayoría de los casos son métodos de interpolación lineal) para calcular el valor de A.

Normalmente el valor de A depende solamente del valor de una variable x, o a lo sumo de los valores de dos variables x, y. En cada uno de estos casos el método de interpolación lineal se aplica de la siguiente manera:

Tablas de simple entrada

Supongamos que una función $A = f(x)$ viene tabulada como se indica:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	…
A	A_1	A_2	A_3	A_4	…

Si se quiere calcular el valor de A correspondiente a $x = x_0$, determinado con una cota de error Δx_0, siendo $x_1 < x_0 < x_2$, se opera de la siguiente manera, considerando una dependencia lineal en el intervalo comprendido entre x_1 y x_2:

$$A(x_0) = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{x_2 - x_1}\left(x_0 - x_1\right) \tag{8}$$

y el error absoluto de A, ΔA, se puede estimar mediante la siguiente expresión:

$$\Delta A = \left|\frac{A_2 - A_1}{x_2 - x_1}\right| \Delta x_0 + \Delta A_1 \tag{9}$$

donde ΔA_1 es la cota de error correspondiente al valor A_1 (que, salvo que en la tabla se aparezca explicitado, es una unidad de la última cifra significativa del valor tabulado).

Si el valor de x_0 viniese directamente en la tabla, habría que asignarle también un error al resultado de A aplicando la misma fórmula, dado que tanto los valores tabulados (A_i) como la magnitud que se utiliza para hallarlo (x_0) tienen sus propios errores.

Un ejemplo de tabla de simple entrada sería la tabla de densidad ρ del agua en función de la temperatura

---

$$\Delta A = \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f(y)}{\partial y}\right| \Delta y + \ldots$$

T:

T (ºC)	0	5	10	15	20
ρ (g/cm^3)	0,999868	0,999992	0,999727	0,999126	0,998230

Si el termómetro del laboratorio marcase 18 ± 1 ºC, habría que interpolar en la tabla anterior entre 15 ºC y 20 ºC para conocer la densidad del agua en esas condiciones (ρ = 0,99859 ± 0,00018 g/cm^3; ε_r = 0,018 %). Si la temperatura fuese 15 ± 1 ºC, ρ = 0,999126 ± 0,00015 g/cm^3; ε_r = 0,015 %, tomando x_1 y x_2 en 10 y 20 respectivamente.

Tablas de doble entrada

Supongamos que la función $A(x,y)$ viene dada por la siguiente tabla:

x \ y	y_1	y_2	y_3	…
x_1	A_{11}	A_{12}	A_{13}	…
x_2	A_{21}	A_{22}	A_{23}	…
x_3	A_{31}	A_{32}	A_{33}	…
…	…	…	…	…

El valor de A correspondiente a (x_0, y_0), que se han medido con unas cotas de error de Δx_0 y Δy_0, y siendo $x_1 < x_0 < x_2$ e $y_1 < y_0 < y_2$, considerando de nuevo la variación lineal, viene dado por:

$$A(x_0,y_0) = A_{11} + \frac{A_{21} - A_{11}}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1) + \frac{A_{12} - A_{11}}{y_2 - y_1}(y_0 - y_1) \qquad (10)$$

y el error absoluto de A por:

$$\Delta A = \left|\frac{A_{21} - A_{11}}{x_2 - x_1}\right| \Delta x_0 + \left|\frac{A_{12} - A_{11}}{y_2 - y_1}\right| \Delta y_0 + \Delta A_{11} \qquad (11)$$

donde ΔA_{11} es una cota de error del término A_{11}.

8. Representaciones gráficas

A la hora de realizar representaciones gráficas se deben respetar las siguientes normas:

a) Ejes

Abscisa y Ordenada

Un convenio bien establecido en Física para todas las prácticas es representar en el eje de abscisas (horizontal) la variable independiente (aquella que elige el experimentador en cada medida), y en el eje de ordenadas (vertical) la variable dependiente (aquella cuyo valor se determina); brevemente, se trata de representar efecto (en el eje vertical) frente a causa (en el eje horizontal).

Papel

Los papeles más utilizados en las gráficas de Física son el lineal (normalmente graduado en milímetros y por eso comúnmente llamado *papel milimetrado*), y el logarítmico, que puede ser semilogarítmico (de rayado logarítmico en un solo eje y lineal en el otro) y logarítmico sobre ambos ejes.

Identificación de cada eje

Los ejes deben marcarse siempre con el nombre y símbolo de la magnitud representada junto a las unidades en que se expresa.

También debe indicarse, en su caso, la potencia de 10 correspondiente, por la que va multiplicada la unidad. De este modo, las divisiones en un eje pueden enumerarse 1, 2, 3,... en lugar de 10.000, 20.000, 30.000,... ó de 0,001, 0,002, 0,003,... etc., si en el eje se indica $\times 10^4$ ó $\times 10^{-3}$, respectivamente.

En los ejes se marcarán los valores de las variables representadas, a intervalos regulares, de acuerdo con la escala escogida.

Escalas

La selección de la escala utilizada en cada eje debe hacerse de modo que:

- Los puntos experimentales no queden todos juntos, debiendo cubrir toda la zona del papel.

- La escala debe ser sencilla. Lo más sencillo es representar por un milímetro una potencia de 10 de la unidad; la siguiente simplicidad es aquella en que un milímetro (ó un centímetro) representa 2 ó 5 unidades.

- El origen de la representación no tiene por qué ser el punto (0, 0). Salvo en casos especiales **la escala y el origen se tomarán de manera que la curva a representar quede centrada en el papel y ocupe la mayor parte de éste.**

- Cada punto se representa por un punto (.), un asterisco (*), u otro símbolo parecido. Si existen varias curvas en la misma gráfica con diferentes significados, los puntos de cada una se representan con distintos símbolos.

b) Representación gráfica del error de las medidas

Si se representan los errores se deben reflejar como una cruz o un rectángulo, centrados en el punto y de dimensiones horizontales y verticales el doble del valor del error absoluto de las coordenadas horizontales y verticales del punto en cuestión.

c) Ajuste de líneas a los puntos representados

Si se traza una curva para unir una serie de puntos se deben de respetar las siguientes normas:

- Debe de ser lo más regular posible.
- Debe de pasar lo más cerca posible de los puntos, aunque **no tiene que pasar necesariamente por todos ellos (incluso puede que no pase por ninguno).**
- Si existe algún punto aislado lo más normal es que se trate de un error y puede que sea conveniente repetir la medida correspondiente a ese punto.
- **No unir nunca los puntos mediante una línea quebrada.**

9. Relaciones lineales:

En los experimentos físicos es frecuente encontrar relaciones lineales entre pares de magnitudes. En este caso, al representar en una gráfica los pares de valores (*x*, *y*) se busca la recta de mejor ajuste a la nube de puntos:

$$y = m\,x + b \tag{12}$$

también conocida como **recta de regresión** lineal. El problema es encontrar los valores de m y b. Aunque el método riguroso es el denominado de **mínimos cuadrados**, a veces, para simplificar los cálculos, se usan otros que dan con bastante aproximación, la recta de mejor ajuste.

Un método rápido es trazar la recta de mejor ajuste (visual) en papel milimetrado y calcular la pendiente y ordenada en el origen a partir de la gráfica. No obstante, es preferible usar un método de cálculo, como el de los mínimos cuadrados.

10. Ajuste de una nube de puntos por el método de los mínimos cuadrados

Intentemos aplicar de forma matemática las ideas expuestas en la sección anterior: el método llamado de mínimos cuadrado. Esta técnica trata de buscar la recta que mejor ajuste a una nube de puntos, imponiendo la siguiente condición: que la suma de las distancias al cuadrado entre los valores de la variable dependiente y de los correspondientes a los predichos por la ecuación lineal:

$$d = \sum \left[y_i - \left(m x_i + b \right) \right]^2) \tag{13}$$

sea un mínimo de las distintas rectas posibles ($\partial d/\partial m = 0; \partial d/\partial b = 0$). Se deja para el esforzado alumno la demostración de las siguientes expresiones para el valor de la pendiente y de la ordenada en el origen de dicha recta:

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \quad ; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{14}$$

siendo n el número de medidas, m la pendiente de la recta a determinar y b su ordenada en el origen.

Dado un valor x, podemos calcular su y correspondiente a partir de la recta de mejor ajuste (12). El error absoluto de y se puede evaluar definiendo su desviación típica[6] y tomando tres veces este valor:

$$\Delta y = 3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - mx_i - b\right)^2}{(n-2)}} \tag{15}$$

y se pueden calcular los errores absolutos de m y b como:

$$\Delta m = 3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - mx_i - b\right)^2}{(n-2)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}}; \quad \Delta b = 3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - mx_i - b\right)^2}{n(n-2)}} \tag{16}$$

Si estos valores son tan grandes que no permitiesen siquiera obtener una cifra significativa, también se admite tomar los errores absolutos como el valor de la desviación estándar (sin multiplicar por 3), especificando claramente que se ha adoptado este criterio.

El método descrito en los párrafos anteriores parte de la idea de optimizar el ajuste respecto de la variable dependiente. Así, obtenemos lo que se llama la **recta de regresión** de y sobre x. Si hiciéramos lo propio con la variable independiente, obtendríamos otra recta de regresión (de x sobre y) con otra pendiente distinta. A partir de estas pendientes podemos determinar el grado de dependencia lineal que existe entre ambas variables. Esto es lo que se llama correlación lineal entre las variables x e y. El parámetro que da cuenta de esta correlación, es el llamado **coeficiente de correlación lineal *r***. Éste, se calcula obteniendo la media geométrica de las pendientes de las dos rectas de regresión antes descritas. La expresión matemática útil para este parámetro es:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}} \tag{17}$$

El coeficiente de correlación lineal, puede demostrarse que es un número comprendido entre -1 y +1. Cuanto más cerca esté $|r|$ de la unidad, interpretaremos que más fuertemente lineal es la correlación entre las variables. Por ello es importante calcular, previamente al ajuste de mínimos cuadrados, el valor del coeficiente de correlación y comprobar que su módulo es cercano a la unidad, y de esta manera asegurar que la curva que mejor se ajusta a la nube de puntos es una recta. Para valores de $|r|$ inferiores a 0,85, debe buscarse otro tipo de dependencia funcional entre las variables. Si el coeficiente de correlación lineal es mayor o igual que 0,9 y menor que 1, siempre se debe expresar con todas sus cifras hasta la primera que no sea 9, redondeándola en su caso (por ejemplo, si resulta ser 0,9996714, habría que expresarlo como 0,9997). Por debajo de 0,9, se puede expresar con 2 cifras significativas.

Para realizar los cálculos correspondientes al ajuste por mínimos cuadrados, es conveniente programar estas ecuaciones, o bien, utilizar calculadoras donde aparezcan estos parámetros de manera explícita.

---

[6] Por el mismo razonamiento que en el apartado 5.b, donde la desviación típica se definía en la ecuación (3) con (n-1) en el denominador, en este caso se van a tener (n-2) grados de libertad, ya que, aunque se han hecho n medidas, para determinar σ hace falta conocer las dos cantidades m y b.

Bibliografía

Carlos Sánchez del Río, Análisis de Errores, Ed. Eudema, Madrid 1989

John R. Taylor, An Introduction to Error Analysis, Second Edition, University Science Books, 1996.